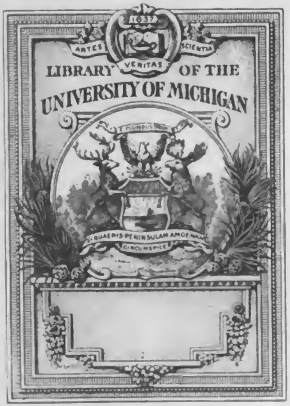
Archiv der Mathematik und Physik


ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN

QA
1
.A67

Digitized by Google

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE
DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

MIT ANHANG:
SITZUNGSBERICHTE DER BERLINER MATHEMATISCHEN GESELLSCHAFT.

HERAUSGEGEBEN
VON

E. LAMPE IN BERLIN. **W. FRANZ MEYER** IN KÖNIGSBERG I. PR. **E. JAHNKE** IN BERLIN.

VIERTER BAND.

MIT 27 TEXTFIGUREN UND 2 TAFELN.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Digitized by Google

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Digitized by Google

Inhalt.

Seite

Appell, Paul, in Paris. Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels . . . . . 20—21
— Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables. Extrait d'une lettre à M. M. Krause . . . . . 292—293
Beyel, Christian, in Zürich. Über Axonometrie und schiefe Parallelprojektionen . . . . . 237—251
Graf, Henri, in Bern. Entwicklung der Funktion Log $\Gamma(a)$ nach fallenden Potenzen des Arguments . . . . . 230—236
Guradze, Hans, in Berlin. Räumliche geometrische Verwandtschaften und Systeme . . . . . 288—292
Haentzschel, Emil, in Berlin. Rotationszykliden und Lamésche Produkte 57—65
Horn, Jacob, in Clausthal. Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittelst successiver Annäherungen . . . . . 213—230
Jahnke, Eugen, in Berlin. Auszüge aus drei Briefen Steiners an Jacobi 268—277
— Schreiben Jacobis an den Staatsminister v. Eichhorn betreffend Jakob Steiner . . . . . 277—280
Jolles, Stanislaus, in Berlin. Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes . . . . . 100—116
Kohn, Gustav, in Wien. Über das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl 312—316
Krause, Martin, in Dresden. Über die Bernoullischen Funktionen zweier veränderlicher Größen. Auszug eines Schreibens an Herrn P. Appell . . . . . 293—295
Kühne, Hermann, in Dortmund. Die Grundgleichungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit . . . . . 300—311
Lampe, Emil, in Berlin. Bemerkungen über einige angenäherte n-Teilungen von Winkeln . . . . . 130—133
Maennchen, Philipp, in Alzey. Ein neues Schließungsproblem . . . 296—298
Majcen, Georg, in Agram. Über gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie 299
— Neue Beiträge zur Dreiecksgeometrie . . . . . 76—99
Netto, Eugen, in Giefsen. Notiz über die Kreisteilungs-Polynome . 65—67
Neuberg, Jean, in Lüttich. Kegelschnitte aus der Dreiecksgeometrie 281—287
Oster, B., in Mannheim. Über die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien . . . . . 44—50
Pringsheim, Alfred, in München. Über Konvergenz-Kriterien für Reihen mit komplexen Gliedern. . . . . 1—19
Pringsheim, Ernst, in Berlin. Über Brechung und Dispersion des Lichts auf der Sonne . . . . . 316—330

239244

Digitized by Google

Seite

Saalschütz, Louis, in Königsberg. Unabhängige Darstellung der Mac Mahonschen symmetrischen Funktionen . . . . . 123—127
Schoeler, Heinrich, in Berlin. Angenäherte n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal . . . . . 128—129
Stäckel, Paul, in Kiel. Eine Eigenschaft der geodätischen Linien. . 68—73
Thienemann, Wilhelm, in Essen. Ein bemerkenswertes Pentagonikositetraeder . . . . . 50—57
Wallenberg, Georg, in Charlottenburg. Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke . . . . . 252—268
Weber, Heinrich, in Strafsburg. Theorie der reellen quadratischen Irrationalzahlen . . . . . 193—212
Weinnoldt, E., in Kiel. Über die Konstruktion von Isophengen auf Flächen 2. Ordnung . . . . . 22—43
Wölffing, Ernst, in Stuttgart. Über eine besondere Klasse transzendenter Kurven . . . . . 117—123
Züge †, Heinrich, in Linden. Zur Lehre von der Teilbarkeit dekadischer Zahlen . . . . . 73—76

Rezensionen.

Andoyer, H. Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure. Von **K. Th. Vahlen** 136
Bardey, E. Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Von **E. Kullrich** 331
v. Bebber. Anleitung zur Aufstellung von Wettervorhersagen. Von **H. Samter** 346
Bernhard, M. Darstellende Geometrie mit Einschlufs der Schattenkonstruktionen. Von **E. Müller** 343
Börnstein, R. Leitfaden der Wetterkunde. Von **H. Samter** 345
Brioschi, F. Opere matematiche I. Von **E. Jahnke** 163
Cesàro, E. Vorlesungen über natürliche Geometrie. Von **G. Hessenberg** 167
Dehn, M. Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Von **E. Müller** 158
Dickson, L. E. Linear groups with an exposition of the Galois field theory. Von **A. Loewy** 333
Forsyth, A. R. Theory of differential equations. Von **L. Heffter** . 166
Gaufs, K. F. Ges. Werke VIII. Von **E. Jahnke** 161
— General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. Von **E. Jahnke** 162
Gaufs, F. G. Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von **C. Faerber** 150
Günther, S. A. v. Humboldt, L. v. Buch. Von **H. Samter** 152
Heger, R. Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln. Von **R. Güntsche** 151
Heussi. Leitfaden der Physik. Von **F. Bremer** 153
Hölder, O. Anschauung und Denken in der Geometrie. Von **E. Lampe** 148
Kraus, K. Grundrifs der Arithmetik. Von **R. Güntsche** 151

Digitized by Google

Seite

Kraus und Böttger. Grundrifs der Physik. Von **F. Bremer** . . . 153
Lange, J. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Von **Edm. Schultze** 156
Lemoine, E. Géométrographie. Von **R. Güntsche** 336
Lorey, W. Über das geometrische Mittel. Von **H. Willgrod** . . . 173
Loria, G. Le scienze esatte nell' antica Grecia. Von **M. Cantor** . . 155
Mahler, G. Ebene Geometrie. Von **R. Güntsche** 151
Meigen, F. Lehrbuch der Geometrie. Von **R. Güntsche** 152
Meyer, W. F. Differential- und Integralrechnung. I. Von **R. Fricke** 164
Močnik. Geometrische Formenlehre und Anfangsgründe der Geometrie. Von **C. Faerber** 150
Monge, G. Darstellende Geometrie (1798). Übers. von R. Haufsner. Von **E. Jahnke** 174
Moroff, A. Die Schulalgebra. Von **C. Faerber** 150
Müller, F. Mathematisches Vokabularium. Von **E. Jahnke** 162
Musil-Ewing. Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Von **H. Lorenz** 347
Öttingen, A. v. Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens. Von **E. Müller** 134
Riem. Rechentabellen. Von **E. Kullrich** 333
Russell, B. Essai sur les fondements de la géométrie. Von **P. Stäckel** 140
Russner. Elementare Experimental-Physik. Von **F. Bremer** . . . 160
Sachs, J. Lehrbuch der projektivischen Geometrie. Von **C. Faerber** 149
Sickenberger und Bauschinger. Kaufmännische Algebra. Von **Edm. Schultze** 157
Smolik. Elemente der darstellenden Geometrie. Von **Edm. Schultze** 154
Veronese, G. Nozioni elementari di Geometria intuitiva. Von **C. Faerber** 172
Vivanti, G. Teoria delle funzioni analitiche. Von **H. Willgrod** . . 172
Wilhelm, J. Die Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt in ihrem Zusammenhang mit den Kreisen der Ebene. Von **E. Müller** 345
Wundt, W. Gustav Theodor Fechner. Von **E. Lampe** 148

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.
A. Aufgaben und Lehrsätze. 62—78. Von **E. N. Barisien, K. Cwojdziński, F. Emde, St. Jolles, A. Kneser, P. Kokott, E. Lampe, W. F. Meyer, G. Olitsch, P. Wolfskehl** . 175—177, 349—352
B. Lösungen. Zu 3 (E. Lemoine) von **C. Moreau** 177
Zu 20 (E. Lemoine) von **E. Lemoine** 178
Zu 37 (S. Gundelfinger) von **S. Gundelfinger** . . . 352
Zu 60 (S. Gundelfinger) von **S. Gundelfinger** . . . 352
2. Anfragen: 7. von **A. Wendler** 178
8. von **E. Jahnke** 178
3. Kleinere Notizen.
Antwort auf Frage 2270 (1902) im Intermédiaire des Math. Von **C. Burali-Forti** 181

Digitized by Google

Seite

Bemerkung zum Aufsatz (C. Isenkrahe) **3**, 257–260. Von **C. Isenkrahe** 180

Bemerkung zum Aufsatz (Schwering) **2**, 280. Von **H. Kühne** . . 180

Solution d'un problème de probabilités (Interméd. d. M. 1894, 1898). Von **C. Moreau** 184

Über einen Satz von Hermite in **1**, 25. Von **P. Wolfskehl** . . . 179

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. **G. Eneström, E. Jahnke, F. Klein, L. Saalschütz, G. Schmidt** 189, 354

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher 190, 360

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft.

Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft.

Zehnte Sitzung am 29. Oktober 1902. 1

Elfte Sitzung am 26. November 1902. 1

Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. Von **E. Landau** 1

Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln. Von **J. Knoblauch** 6

Geometrographische Siebzehnteilung des Kreises. Von **R. Güntsche** . 10

Mitglieder-Verzeichnis 15

Digitized by Google

Über Konvergenz-Kriterien für Reihen mit komplexen Gliedern.

Von Alfred Pringsheim in München.

1. Da die *unbedingte* Konvergenz einer Reihe von der Form $\Sigma a_\nu = \Sigma(\alpha_\nu + \beta_\nu i)$ mit der *absoluten* Konvergenz, d. h. mit der Konvergenz der Reihe $\Sigma|a_\nu|$ zusammenfällt, so hat man zu deren Ermittelung lediglich die für Reihen mit *positiven* Gliedern geltenden Kriterien auf den Term $|a_\nu| = \sqrt{\alpha_\nu^2 + \beta_\nu^2}$ anzuwenden. Bei der Ausführung der erforderlichen Rechnung erweist sich indessen das Auftreten jener Quadratwurzel als ziemlich unbequem, und es mufs daher wünschenswert erscheinen, jene Kriterien so umzugestalten, dafs die zu prüfenden Grenzausdrücke nicht $|a_\nu|$ selbst, sondern lediglich $|a_\nu|^2$ enthalten.

Dies hat bei den sog. Kriterien *erster* Art keine Schwierigkeit. Bezeichnet man nämlich generell mit ΣD_ν^{-1} bezw. ΣC_ν^{-1} eine als *divergent* bezw. *konvergent* erkannte Reihe mit positiven Gliedern und beachtet, dafs die Ungleichungen:

$$|a_\nu| > \frac{g}{D_\nu} \quad \text{bezw.} \quad |a_\nu| < \frac{G}{C_\nu}$$

stets die folgenden nach sich ziehen:

$$|a_\nu|^2 > \frac{g^2}{D_\nu^2} \quad \text{bezw.} \quad |a_\nu|^2 < \frac{G^2}{C_\nu^2}$$

und umgekehrt, so kann man die Kriterien *erster* Art ohne weiteres auch auf die Form bringen:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varlimsup_{\nu=\infty} D_\nu^2 \cdot |a_\nu|^2 > 0 : \textit{ Divergenz}, \\ \varlimsup_{\nu=\infty} C_\nu^2 \cdot |a_\nu|^2 < \infty : \textit{ Konvergenz}.^1) \end{cases}$$

1) Ich bezeichne mit $\varlimsup$ den *unteren*, mit $\overline{\lim}$ den *oberen* Limes. Existiert ein *Limes* im gewöhnlichen Sinne, so fallen *unterer* und *oberer* Limes mit diesem zusammen. (Vgl. Encykl. der math. Wiss. I, p. 71.) Die Schreibweise: $< \infty$ bedeutet: *nicht* unendlich, d. h. unter einer endlichen Schranke bleibend.

Digitized by Google

Da analog aus den Ungleichungen:

$$\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| < \frac{D_\nu+1}{D_\nu} \quad \text{bezw.} \quad \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| > \frac{C_{\nu+1}}{C_\nu}$$

stets folgt:

$$\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 < \frac{D_{\nu+1}^2}{D_\nu^2} \quad \text{bezw.} \quad \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 > \frac{C_{\nu+1}^2}{C_\nu^2}$$

und umgekehrt, so läfst sich auch die Grundform der Kriterien *zweiter* Art zunächst durch die folgende ersetzen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \overline{\lim_{\nu=\infty}}\left(D_\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - D_{\nu+1}^2\right) < 0\text{: } \textit{Divergenz}, \\ \underline{\lim_{\nu=\infty}}\left(C_\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - C_{\nu+1}^2\right) > 0\text{: } \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

Bezüglich des auf diese Weise resultierenden *Konvergenz*-Kriteriums ist aber folgendes zu bemerken. Während man das Konvergenz-Kriterium in seiner *ursprünglichen* Gestalt, nämlich:

$$(3)\qquad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\left(C_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - C_{\nu+1}\right) > 0\text{: } \textit{Konvergenz},$$

mit Hülfe einer einfachen, auf der typischen Darstellung der C_ν und D_ν beruhenden Transformation[1]) in das folgende:

$$(4)\qquad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\left(D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - D_{\nu+1}\right) > 0\text{: } \textit{Konvergenz},$$

überführen und auf diese Weise mit dem entsprechenden *Divergenz*-Kriterium zweckmäfsig vereinigen kann, so *versagt* diese Transformation in Bezug auf das *Konvergenz*-Kriterium (2), mit anderen Worten, man darf aus der Beziehung:

$$\lim_{\nu=\infty}\left(D_\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - D_{\nu+1}^2\right) > 0$$

keineswegs allemal auf die *Konvergenz* von $\Sigma|a_\nu|$ schliefsen. Setzt man nämlich:

$$(5)\qquad \begin{cases} l_\nu = D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| - D_{\nu+1}, \\ l_\nu' = D_\nu^2 \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - D_{\nu+1}^2 = l_\nu\left(D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| + D_{\nu+1}\right), \end{cases}$$

1) Vgl. Math. Ann. **35** (1890), 360; desgl. **39** (1891), 125.

Digitized by Google

so erkennt man, dafs l'_ν sich von l_ν um einen Faktor unterscheidet, der allemal dann, wenn $\lim_{\nu=\infty} D_\nu = \infty$ (was ja geradezu die *Regel* ist[1])), gleichzeitig mit ν positiv unendlich wird. Daraus folgt aber, dafs im Falle $\lim_{\nu=\infty} l'_\nu > 0$ immerhin $\lim_{\nu=\infty} l_\nu = 0$ werden kann, was die *Divergenz* der Reihe $\Sigma|a_\nu|$ nicht ausschliefsen würde.[2])

2. Um diesem Übelstande abzuhelfen, führen wir statt des Ausdruckes l'_ν den folgenden ein:

$$\lambda_\nu = D_\nu \cdot \left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - \frac{D^2_{\nu+1}}{D_\nu} = l_\nu\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right| + \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}\right), \tag{6}$$

welcher — bei einer sogleich anzugebenden, durchaus unerheblichen Einschränkung in Bezug auf die Wahl der D_ν — für die Beurteilung der *Konvergenz* von $\Sigma|a_\nu|$ genau dasselbe leistet wie l_ν.

Angenommen nämlich, man habe:

$$\lim_{\nu=\infty} \lambda_\nu > 0, \tag{7}$$

so mufs schon von einem bestimmten Index $\nu = n$ ab eine Beziehung von der Form bestehen:

$$\lambda_\nu \geqq \varrho,$$

---

1) Die Annahme eines *endlichen* $\lim_{\nu=\infty} D_\nu$ liefert lediglich das Cauchysche Fundamental-Kriterium.

2) *Beispiel.* Man setze: $a_\nu = \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$, $D_\nu = \nu$, also:

$$l_\nu = (\nu+1)\left(\frac{\lg(\nu+1)}{\lg \nu} - 1\right)$$
$$= \frac{\nu+1}{\lg \nu} \cdot \lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right) < \frac{\nu+1}{\lg \nu} \cdot \frac{1}{\nu}$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu = 0.$$

Dagegen:

$$l'_\nu = (\nu+1)^2\left(\left(\frac{\lg(\nu+1)}{\lg \nu}\right)^2 - 1\right)$$
$$= \frac{(\nu+1)^2}{(\lg \nu)^2} \cdot \left(\lg\left(1+\frac{1}{\nu}\right)\right) \cdot (\lg(\nu+1) + \lg \nu)$$
$$> 2 \cdot \frac{\nu+1}{\lg \nu},$$

also:

$$\lim_{\nu=\infty} l'_\nu = +\infty.$$

Nichts desto weniger ist $\Sigma|a_\nu|$ *divergent.*

Digitized by Google

wo ϱ *wesentlich positiv*. Man hat somit für $\nu \geqq n$:

$$D_\nu^2 \cdot \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 \geqq D_{\nu+1}^2 + \varrho \cdot D_\nu = D_{\nu+1}^2 \left(1 + \varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2}\right),$$

und, wenn man auf beiden Seiten mit Benutzung der bekannten Beziehung[1]):

$$(1+\delta)^\mu > 1 + \mu \cdot \frac{\delta}{1+\delta} \qquad (\mu > 0,\ \delta > 0)$$

die Quadratwurzel zieht:

$$D_\nu \cdot \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right| > D_{\nu+1} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2}\varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2} \cdot \frac{1}{1 + \varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2}}\right)$$

d. h.

$$l_\nu > \tfrac{1}{2}\varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}} \cdot \frac{1}{1 + \varrho \cdot \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2}}. \tag{8}$$

Macht man jetzt die gewissermafsen selbstverständlichen[2]) Einschränkungen, dafs:

$$\varliminf_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}} > 0 \quad \text{und} \quad \varlimsup_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}^2} < \infty, \tag{9a}$$

so folgt aus (8), dafs gleichzeitig mit der Beziehung (7) stets auch die folgende besteht:

$$\lim_{\nu=\infty} l_\nu > 0, \tag{10}$$

sodafs also aus Ungl. (7) mit Sicherheit auf die *Konvergenz* von $\Sigma|a_\nu|$ geschlossen werden darf. Übrigens ergiebt sich auch umgekehrt aus

---

1) Für den hier lediglich in Frage kommenden speziellen Fall $\mu = \frac{1}{2}$ kann man auch ganz unmittelbar erkennen, dafs:

$$\sqrt{1+\delta} > 1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{1+\delta} \quad \text{für} \quad \delta > 0.$$

Man hat nämlich: $1 > \frac{1}{1+\delta}$ und (wegen: $\delta = \frac{\delta + \delta^2}{1+\delta}$):

$$\delta > \frac{\delta}{1+\delta} + \left(\frac{\delta}{1+\delta}\right)^2.$$

und *a fortiori:*

$$1 + \delta > \left(1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\delta}{1+\delta}\right)^2.$$

2) In der That werden hierdurch nur gewisse Reihen von *ganz exzeptionellem* Divergenz-Charakter, wie sie für Kriterien-Bildung überhaupt nicht in Betracht kommen, als Vergleichsreihen ausgeschlossen.

Digitized by Google

der Existenz von Ungl. (10) stets diejenige von Ungl. (7), wenn man die D_ν der weiteren Beschränkung unterwirft[1]), dafs auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} > 0, \tag{9b}$$

anders geschrieben:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \frac{D_\nu}{D_{\nu+1}} < \infty:$$

denn der Faktor, welcher λ_ν von l_ν unterscheidet (s. Gl. (5)) ist dann allemal *wesentlich positiv*. Die Konvergenz-Kriterien (7) und (10) haben also unter den bezüglich der D_ν gemachten Einschränkungen vollkommen *gleiche* Tragweite.

Da andererseits die Beziehung:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \lambda_\nu < 0 \tag{11}$$

offenbar stets die Existenz der *Divergenz*-Bedingung (2) nach sich zieht[2]), so gewinnt man schliefslich das folgende *Doppel*-Kriterium:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} \lambda_\nu \equiv \overline{\lim_{\nu=\infty}} \left(D_\nu \cdot \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 - \frac{D_{\nu+1}^2}{D_\nu} \right) \begin{cases} < 0: \textit{ Divergenz}, \\ > 0: \textit{ Konvergenz}.^3) \end{cases} \tag{12}$$

3. Die Bedingungen (9a), (9b), welchen die D_ν zu genügen haben, sind sicher erfüllt, wenn gesetzt wird:

$$D_\nu = \nu$$

oder auch:

$$D_\nu = \nu \cdot L_\varkappa(\nu),$$

wo:

$$L_\varkappa(\nu) = \nu \cdot \lg_1 \nu \cdot \lg_2 \nu \cdots \lg_\varkappa \nu. \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

---

1) Vgl. die vorige Fufsnote.

2) Aber *nicht* umgekehrt. Da nämlich die Bedingung (2) sich folgendermafsen schreiben läfst:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} D_\nu \cdot \lambda_\nu < 0,$$

und im allgemeinen $\lim D_\nu = \infty$ anzunehmen ist, so kann eventuell diese letztere Beziehung erfüllt sein, auch wenn $\overline{\lim_{\nu=\infty}} \lambda_\nu = 0$ wird. Wenn also das Kriterium λ_ν in dieser Weise versagt, so steht es noch frei auf die etwas vorteilhaftere Divergenz-Bedingung (2) zu rekurrieren.

3) Die Schreibweise $\overline{\lim}$ bedeutet, dafs in der betreffenden Relation ganz nach Belieben der *obere* oder *untere* Limes gewählt werden kann (natürlich innerhalb *einer* solchen Relation durchweg *derselbe* Limes). Dabei genügt es offenbar, in dem *Divergenz*-Kriterium den *oberen*, in dem *Konvergenz*-Kriterium den *unteren* Limes zu berücksichtigen.

Digitized by Google

Man erhält auf diese Weise diejenigen Kriterien, welche dem Raabeschen und der Skala der Bertrandschen Kriterien[1]) für Reihen mit *positiven* Gliedern entsprechen, nämlich:

$$\text{(a)}\quad \varliminf_{\nu=\infty} \lambda_\nu \equiv \varlimsup_{\nu=\infty} \left(\nu \cdot \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 - \frac{(\nu+1)^2}{\nu} \right) \begin{cases} < 0\text{: } \textit{Divergenz}, \\ > 0\text{: } \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \varliminf_{\nu=\infty} \lambda_\nu^{(\varkappa)} \equiv \varlimsup_{\nu=\infty} \left(L_\varkappa(\nu) \cdot \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 - \frac{(L_\varkappa(\nu+1))^2}{L_\varkappa(\nu)} \right) \begin{cases} < 0\text{: } \textit{Divergenz}, \\ > 0\text{: } \textit{Konvergenz}. \end{cases}$$

$$(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$$

Diese Kriterien gestatten noch die folgende, für den praktischen Gebrauch zweckmäßige Umformung. Man hat zunächst:

$$\lambda_\nu = \nu \left(\left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 - 1 \right) - 2 - \frac{1}{\nu},$$

also:

$$\varliminf_{\nu=\infty} \lambda_\nu = \varliminf_{\nu=\infty} \nu \left(\left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 - 1 \right) - 2. \tag{13}$$

Ferner ist identisch:

$$\begin{aligned} \lambda_\nu^{(\varkappa)} &= \left(L_\varkappa(\nu) \cdot \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 - \frac{(L_{\varkappa-1}(\nu+1) \cdot \lg_\varkappa \nu)^2}{L_\varkappa(\nu)} \right) \\ &\quad - \left(\frac{(L_\varkappa(\nu+1))^2}{L_\varkappa(\nu)} - \frac{(L_{\varkappa-1}(\nu+1) \cdot \lg_\varkappa \nu)^2}{L_\varkappa(\nu)} \right) \\ &= \frac{\lg_\varkappa(\nu)}{L_{\varkappa-1}(\nu)} \cdot \left\{ (L_{\varkappa-1}(\nu))^2 \cdot \left| \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} \right|^2 - (L_{\varkappa-1}(\nu+1))^2 \right\} \\ &\quad - \frac{(L_{\varkappa-1}(\nu+1))^2}{L_{\varkappa-1}(\nu)} \cdot \frac{(\lg_\varkappa(\nu+1))^2 - (\lg_\varkappa \nu)^2}{\lg_\varkappa \nu}. \end{aligned}$$

(NB. Dabei hat man im Falle $\varkappa = 1$ zu setzen: $L_{\varkappa-1}(\nu) = L_0(\nu) = \nu$.) Nun ist aber[2]):

$$\lim_{\nu=\infty} L_{\varkappa-1}(\nu+1) \cdot \{ \lg_\varkappa(\nu+1) - \lg_\varkappa(\nu) \} = 1,$$

und außerdem:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg_\varkappa(\nu+1) + \lg_\varkappa \nu}{\lg_\varkappa \nu} = 2, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{L_{\varkappa-1}(\nu+1)}{L_{\varkappa-1}(\nu)} = 1,$$

1) Vgl. Encykl. der math. Wiss. I, S. 87, 88.
2) S. z. B. Math. Ann. **35** (1890), 318, Formel (i).

Digitized by Google

sodafs sich ergiebt:

$$(14)\quad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\lambda_\nu^{(\varkappa)} = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\frac{\lg_\varkappa \nu}{L_{\varkappa-1}(\nu)}\left\{(L_{\varkappa-1}(\nu))^2\cdot\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (L_{\varkappa-1}(\nu+1))^2\right\} - 2.$$

Mit Benutzung der Gleichungen (13), (14) nehmen daher die Kriterien (a), (b) die folgende Form an:

$$(A)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\frac{\nu}{2}\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right)\begin{cases} <1\colon \textit{Divergenz},\\ >1\colon \textit{Konvergenz}.\end{cases}$$

$$(B)\ \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\frac{\lg_\varkappa \nu}{2L_{\varkappa-1}(\nu)}\cdot\left((L_{\varkappa-1}(\nu))^2\cdot\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (L_{\varkappa-1}(\nu+1))^2\right)\begin{cases} <1\colon \textit{Divergenz},\\ >1\colon \textit{Konvergenz}.\end{cases}$$

$(\varkappa = 1, 2, 3, \ldots)$

4. Das Kriterium (A) und das für $\varkappa = 1$ resultierende Anfangs-Kriterium der Skala (B), nämlich:

$$(B^1)\qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\frac{\lg \nu}{2\nu}\left(\nu^2\cdot\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - (\nu+1)^2\right)\begin{cases} <1\colon \textit{Divergenz},\\ >1\colon \textit{Konvergenz},\end{cases}$$

erweisen sich für eine Reihe wichtiger Anwendungen zur Verschärfung des Cauchyschen Fundamental-Kriteriums[1]) als ausreichend. Insbesondere können sie dazu dienen, die absolute Konvergenz oder Divergenz derjenigen in der Funktionenlehre häufig vorkommenden Reihen festzustellen, deren Glieder durch die Beziehung charakterisiert sind:

$$(15)\qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}$$

$$= 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\varrho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2} \qquad \text{(zum mindesten für } \nu \geq n\text{)}.$$

Dabei bedeutet $k = \varkappa + \lambda i$ eine bestimmte, von ν unabhängige Zahl, während r_ν mit ν variieren kann, jedoch *so*, dafs $|r_\nu|$ stets *unter einer endlichen Schranke* bleibt, also

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,|\varrho_\nu| < \infty$$

ausfällt. Die fraglichen Bedingungen sind offenbar insbesondere stets erfüllt, wenn $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ in eine *endliche* oder *konvergent-unendliche* Reihe nach

---

1) Man kann diesem eine dem Kriterium (A), (B) analoge Form geben, nämlich:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 - 1\right)\begin{cases} <0\colon \textit{Divergenz},\\ >0\colon \textit{Konvergenz}.\end{cases}$$

Digitized by Google

Potenzen von $\frac{1}{\nu}$ mit konstanten Koeffizienten entwickelt werden kann; desgl. wenn $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ als eine *rationale* Funktion von ν mit konstanten Koeffizienten darstellbar ist.

Man hat nun:

$$\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 = \left(1+\frac{\varkappa}{\nu}+\frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\nu}+\frac{\sigma_\nu}{\nu^2}\right)^2$$

$$= 1+\frac{2\varkappa}{\nu}+\frac{R_\nu}{\nu^2}, \tag{16}$$

wo:

$$R_\nu = \varkappa^2+\lambda^2+2\varrho_\nu+2\frac{\varkappa\varrho_\nu+\lambda\sigma_\nu}{\nu}+\frac{\varrho_\nu^2+\sigma_\nu^2}{\nu^2}, \tag{17}$$

sodafs also auch:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}} R_\nu = \varkappa^2+\lambda^2+2\,\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,\varrho_\nu \tag{18}$$

endlich ausfällt.

Die Anwendung des Kriteriums (A) ergiebt sodann:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\nu}{2}\left(\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2-1\right)=\lim_{\nu=\infty}\left(\varkappa+\frac{R_\nu}{2\nu}\right)=\varkappa, \tag{19}$$

und somit *divergiert* die Reihe $\Sigma|a_\nu|$, falls $\varkappa<1$, sie *konvergiert*, falls $\varkappa>1$.

Im Falle $\varkappa=1$ *versagt* das Kriterium (A). Zur Bildung des Kriteriums (B^1) hat man nach Gl. (16) für $\varkappa=1$:

$$\nu^2\cdot\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2=\nu^2+2\nu+R_\nu$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{\lg\nu}{2\nu}\left(\nu^2\cdot\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2-(\nu+1)^2\right)=\lim_{\nu=\infty}\frac{\lg\nu\,(R_\nu-1)}{2\nu}=0, \tag{20}$$

woraus nach (B^1) die *Divergenz* von $\Sigma|a_\nu|$ resultiert.

Somit ergiebt sich:

Die Reihe $\Sigma|a_\nu|$, *wo*:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}=1+\frac{\varkappa+\lambda i}{\nu}+\frac{\varrho_\nu+\sigma_\nu i}{\nu^2},$$

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\,|\varrho_\nu+\sigma_\nu i|<\infty\,^1),$$

ist konvergent für $\varkappa>1$, *divergent für* $\varkappa\leq 1$.

1) Wie die Gleichungen (19), (20) lehren, bleibt das Gesamtresultat sogar noch gültig, wenn auch $\overline{\lim_{\nu=\infty}} R_\nu=\infty$ wird, sofern nur $\lim_{\nu=\infty}\frac{\lg\nu\cdot R_\nu}{\nu}=0$, d. h. mit Rücksicht auf Gl. (17):

Digitized by Google

Dieses Resultat bildet, abgesehen von einem unwesentlichen Unterschiede in der Form, den Hauptbestandteil der von Weierstrafs[1]) auf anderem Wege abgeleiteten Kriterien, welche wiederum noch diejenigen von Gaufs[2]) (auf die Voraussetzung *reeller*, als *rationale* Funktionen von ν darstellbarer $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ sich beschränkenden) als speziellen Fall in sich enthalten.

5. Wenn auch die Reihe $\Sigma|a_\nu|$ für $\varkappa \leqq 1$ *divergiert*, so könnte Σa_ν in diesem Falle noch *bedingt* konvergieren. Es soll nun im folgenden gezeigt werden, dafs thatsächlich auch Σa_ν *divergiert*, dafs dagegen für $0 < \varkappa \leqq 1$ die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ (welche ja, wegen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1,$$

für $|x| < 1$ *absolut konvergiert*) noch für jedes von 1 verschiedene x mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$ (*bedingt*) *konvergiert*.[3])

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg \nu \cdot \varrho_\nu}{\nu} = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{\lg \nu \cdot \sigma_\nu^2}{\nu^2} = 0,$$

also schliefslich:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{\lg \nu \cdot |\varrho_\nu + \sigma_\nu i|}{\nu} = 0.$$

Das auf den Fall $\varkappa \geqq 1$ bezügliche Resultat gilt nach Gl. (19) sogar noch, wenn nur: $\lim_{\nu=\infty} \frac{R_\nu}{\nu} = 0$, d. h. schliefslich wiederum, wenn:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{|\varrho_\nu + \sigma_\nu i|}{\nu} = 0.$$

1) Journal f. Math. **51** (1856), 28 = Werke, Bd. I, S. 185. — Weierstrafs operiert mit dem reziproken Quotienten $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$. Ich gebe der Form $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ *deshalb* den Vorzug, weil hierfür die Überführung der Kriterien (a), (b) in die zweckmäfsigere Form (A), (B) etwas kürzer ausfällt, andererseits auch die eventuelle Entwickelung von $\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}$ nach Potenzen von $\frac{1}{\nu}$ bei den in der Praxis zumeist vorkommenden Fällen sich etwas bequemer ausführen läfst, als diejenige der reziproken Quotienten.

2) Ges. Werke, Bd. III, S. 139.

3) Auch dieses Resultat findet sich bei Weierstrafs a. a. O. Die hier gegebene Ableitung, die sich zwar im wesentlichen an den von Weierstrafs vorgezeichneten Gedankengang anschliefst, dürfte in verschiedener Beziehung einfacher und durchsichtiger sein als die Weierstrafssche, auch als diejenige, welche Herr O. Stolz in seinen „Vorlesungen über allg. Arithmetik", Bd. II, S. 145 ff., 156 mitgeteilt hat.

Digitized by Google

Es bedeute zunächst α_ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) eine unbegrenzte Folge *positiver* Zahlen, welche, zum mindesten von einem bestimmten ν ab, der Bedingung genügen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa}{\nu} + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}, \tag{21}$$

wo wiederum $\varkappa$ eine bestimmte, von ν unabhängige reelle Zahl bedeutet, während ϱ_ν mit ν zwar variieren kann, aber absolut genommen *stets unter einer positiven Zahl* g bleiben soll.

Ist dann $\varkappa$ *von Null verschieden*, so kann man Gl. (21) in die Form setzen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varkappa}{\nu}\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\varkappa \cdot \nu}\right) \tag{22}$$

und sodann eine natürliche Zahl m so fixieren, dafs für $\nu \geqq m$:

$$\varkappa\nu \geqq g > |\varrho_\nu|, \quad \text{also:} \quad 1 + \frac{\varrho_\nu}{\varkappa\nu} > 0.$$

Daraus folgt, dafs für $\nu \geqq m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} < 1, & \text{falls: } \varkappa < 0, \\ \dfrac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} > 1, & \text{falls: } \varkappa > 0, \end{cases} \tag{23}$$

und diese Ungleichungen besagen, dafs die α_ν für $\nu \geqq m$ *monoton zu-* oder *ab*nehmen, je nachdem $\varkappa < 0$ oder $\varkappa > 0$. Die α_ν müssen also in jedem dieser beiden Fälle für $\nu = \infty$ einen gewissen (endlichen oder unendlichen) *Grenzwert* besitzen.

Um diesen letzteren zu bestimmen, schreiben wir Gl. (21) folgendermafsen:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = \left(1 + \frac{\varkappa}{\nu}\right)\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right). \tag{24}$$

Durch Substitution von $\nu = m, (m+1), \ldots, (\mu-1)$ (wobei, falls $\varkappa$ *negativ ganzzahlig* sein sollte, von vornherein $m > |\varkappa|$ angenommen werden mag, damit $\nu + \varkappa$ niemals *Null* wird) und Multiplikation der betreffenden Gleichungen ergiebt sich alsdann:

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_\mu} = \prod_m^{\mu-1}\left(1 + \frac{\varkappa}{\nu}\right) \cdot \prod_m^{\mu-1}\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right). \tag{25}$$

Läfst man hier μ ins Unendliche wachsen, so geht das zweite Produkt, wegen der *Konvergenz* von

$$\sum \left|\frac{\varrho_\nu}{\nu(\nu+\varkappa)}\right| < \sum \frac{g}{\nu \cdot |\nu+\varkappa|},$$

Digitized by Google

in ein *konvergentes* Produkt über, während das erste, wegen der *Divergenz* von $\sum \frac{\varkappa}{\nu}$, nach 0 oder ∞ *divergiert*, je nachdem $\varkappa < 0$ oder $\varkappa > 0$. Hiernach findet man

$$\lim_{\mu=\infty} \frac{\alpha_m}{\alpha_\mu} \begin{cases} = 0, & \text{falls: } \varkappa < 0, \\ = \infty, & \text{falls: } \varkappa > 0, \end{cases}$$

und da α_m eine bestimmte positive Zahl vorstellt, schliefslich:

$$\lim_{\mu=\infty} \alpha_\mu \begin{cases} = \infty, & \text{falls: } \varkappa < 0, \\ = 0, & \text{falls: } \varkappa > 0. \end{cases} \tag{26}$$

In dem noch übrig bleibenden Falle $\varkappa = 0$ hat man nach Gl. (21) die Beziehung:

$$\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}} = 1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}, \tag{27}$$

welche zeigt, dafs α_ν von einer gewissen Stelle $\nu = m$ ab nur dann *monoton zu-* bezw. *ab*nimmt, wenn ϱ_ν für $\nu \geqq m$ *beständig* < 0 bezw. > 0. Im übrigen besitzen aber die α_ν, auch wenn ϱ_ν *nicht* diese Eigenschaft hat, allemal für $\nu = \infty$ einen bestimmten, *von Null verschiedenen* Grenzwert. Man findet nämlich aus Gl. (27), analog wie oben:

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_\mu} = \prod_m^{\mu-1}\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right) \tag{28}$$

und hieraus:

$$\lim_{\mu=\infty} \alpha_\mu = \alpha_m \cdot \left(\prod_m^{\infty}\left(1 + \frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right)\right)^{-1}, \tag{29}$$

d. h. *endlich und von Null verschieden*, da das betreffende Produkt in Folge der Konvergenz von $\sum \left|\frac{\varrho_\nu}{\nu^2}\right|$ *konvergiert*.

6. Sind jetzt die a_ν wiederum beliebig komplex, und setzt man, wie früher (Gl. (15), (16)):

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2} = 1 + \frac{\varkappa + \lambda i}{\nu} + \frac{\varrho_\nu + \sigma_\nu i}{\nu^2}$$

$$\left|\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}}\right|^2 = 1 + \frac{2\varkappa}{\nu} + \frac{R_\nu}{\nu^2},$$

wo $|r_\nu|$, also auch R_ν (s. Gl. (17)) stets unter einer endlichen Schranke bleiben soll, etwa:

$$|r_\nu| < g, \quad R_\nu < G,$$

so liefert die Anwendung der in Nr. 5 gefundenen Resultate auf die $|a_\nu|^2$ unmittelbar die folgenden Ergebnisse:

Digitized by Google

(I) Ist $\varkappa < 0$, so nehmen die $|a_\nu|^2$, also auch die $|a_\nu|$ mit ν *monoton zu*, und man hat:

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = \infty, \quad \text{also auch:} \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = \infty. \tag{30}$$

(II) Ist $\varkappa > 0$, so nehmen die $|a_\nu|^2$ bezw. die $|a_\nu|$ mit wachsendem ν *monoton ab*, und man hat:

$$\lim_{\nu=\infty} |a_\nu| = 0, \quad \text{also auch:} \quad \lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0. \tag{31}$$

(III) Ist $\varkappa = 0$, so besitzt $|a_\nu|^2$, also auch $|a_\nu|$ für $\nu = \infty$ einen bestimmten *von Null verschiedenen* Grenzwert. Daraus folgt aber noch *nicht*, dafs auch für a_ν selbst das nämliche gilt. Man hat nun in dem vorliegenden Falle:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{\lambda i}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}$$

$$= \left(1 + \frac{\lambda i}{\nu}\right)\left(1 + \frac{r_\nu}{\nu(\nu + \lambda i)}\right)$$

und daher:

$$\frac{a_m}{a_\mu} = \prod_m^{\mu-1}\left(1 + \frac{\lambda i}{\nu}\right) \cdot \prod_m^{\mu-1}\left(1 + \frac{r_\nu}{\nu(\nu + \lambda i)}\right). \tag{32}$$

Das *zweite* Produkt geht wiederum für $\lim \mu = \infty$ in ein absolut *konvergentes* über, da

$$\left|\frac{r_\nu}{\nu(\nu + \lambda i)}\right| < \frac{g}{\nu^2} \cdot \left|\frac{1}{1 + \frac{\lambda i}{\nu}}\right|.$$

Das *erste* dagegen *divergiert*, sofern nicht etwa $\lambda = 0$ ist, für $\lim \mu = \infty$, in *der* Weise, dafs zwar der *absolute Betrag, nicht* aber die *Charakteristik*[1]) einen bestimmten Grenzwert besitzt, der überdies für jenen absoluten Betrag *von Null verschieden* ausfällt.[2])

Darnach wird (für $\varkappa = 0$, $|\lambda| > 0$) a_μ bei $\lim \mu = \infty$ in *der* Weise unbestimmt, dafs zwar $\lim_{\mu=\infty} |a_\mu|$ eine bestimmte, positive Zahl ist, während die Charakteristik unbestimmt wird.

---

1) Unter der *Charakteristik* einer komplexen Zahl a verstehe ich die (sonst wohl auch als „Richtungs-Koeffizient" bezeichnete) Zahl $\frac{a}{|a|}$.

2) Vgl. Math. Ann. **33** (1888), 136.

Digitized by Google

Nur in dem besonderen Falle $\lambda = 0$ (also: $k = 0$) hat man:

$$\frac{a_m}{a_\mu} = \prod_m^{\mu-1}\left(1 + \frac{r_\nu}{\nu^2}\right), \tag{33}$$

sodafs also $\lim_{\mu=\infty} a_\mu$ einen bestimmten *von Null verschiedenen* Wert besitzt.

7. Aus den Ergebnissen (I) und (III) der vorigen Nummer folgt unmittelbar, dafs die Reihe Σa_ν für $\varkappa \leqq 0$ allemal *divergiert*, da ihre Glieder *nicht* den Grenzwert *Null* besitzen. Da Σa_ν andererseits für $\varkappa > 1$ als *absolut konvergent* erkannt wurde (Nr. **4**), so erfordert nur noch der Fall: $0 < \varkappa \leqq 1$, für welchen ja nach (II): $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$ sich ergab, eine genauere Untersuchung.

Es soll nun gezeigt werden:

Auch für: $0 < \varkappa \leqq 1$ *divergiert* Σa_ν, *dagegen konvergiert* $\Sigma |a_\nu - a_{\nu+1}|$.

Beweis: Wir nehmen, um Weitläufigkeiten zu vermeiden an, dafs die Gleichung:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2}$$

schon für $\nu \geqq 1$ Geltung habe[1]), und bringen sie auf die Form:

$$\frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{1 - \frac{k^2}{\nu^2} + \left(1 - \frac{k}{\nu}\right)\cdot\frac{r_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$= \frac{1 + \frac{t_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}}, \text{ wo also: } t_\nu = \left(1 - \frac{k}{\nu}\right)\cdot r_\nu - k^2, \tag{34}$$

und somit $|t_\nu|$ gleichzeitig mit $|r_\nu|$ stets unter einer endlichen Schranke bleibt. Sodann werde gesetzt:

$$a_\nu = p_\nu q_\nu, \quad \text{also:} \quad \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}}\cdot\frac{q_\nu}{q_{\nu+1}} = \frac{1 + \frac{t_\nu}{\nu^2}}{1 - \frac{k}{\nu}}, \tag{35}$$

---

1) Wäre dies erst für $\nu \geqq n$ der Fall, so könnte man durch geeignete *Abänderung* einer *endlichen* Anzahl von Anfangsgliedern die Gültigkeit der fraglichen Voraussetzung herstellen, ohne dafs damit das *Endresultat*, d. h. die *Divergenz* der ursprünglichen Σa_ν, die *Konvergenz* von $\Sigma |a_\nu - a_{\nu+1}|$, im geringsten alteriert würde.

Digitized by Google

wo p_ν und q_ν, einzeln genommen, durch die Beziehungen definiert sein sollen:

$$\text{(36)}\qquad \begin{cases} \dfrac{p_\nu}{p_{\nu+1}} = \dfrac{1}{1-\dfrac{k}{\nu}}, \quad \dfrac{q_\nu}{q_{\nu+1}} = 1 + \dfrac{t_\nu}{\nu^2} & (\nu = 1, 2, 3, \ldots)^1) \\ \text{und speziell: } p_1 = 1, \quad q_1 = a_1. \end{cases}$$

Die q_ν besitzen alsdann (vgl. den Schlufs der vorigen Nummer) für $\nu = \infty$ einen bestimmten *von Null verschiedenen* Grenzwert, etwa:

$$\text{(37)}\qquad \lim_{\nu=\infty} q_\nu = q, \quad \text{wo:} \quad |q| > 0.$$

Um die Art der Annäherung von q_ν an diesen Grenzwert genauer zu beurteilen, hat man nach Gl. (36) zunächst:

$$q_\nu - q_{\nu+1} = \frac{t_\nu q_{\nu+1}}{\nu^2}$$

und hieraus, wenn man ν der Reihe nach durch $(\nu+1)$, $(\nu+2)$, ..., $(\nu+n-1)$ ersetzt und die resultierenden Gleichungen zu der vorstehenden addiert:

$$\text{(38)}\qquad q_\nu - q_{\nu+n} = \sum_{\mu}^{\nu+n-1} \frac{t_\mu q_{\mu+1}}{\mu^2}.$$

Da $|t_\mu|$, $|q_\mu|$ unter endlichen Schranken bleiben, so geht diese Summe für $\lim n = \infty$ in eine absolut *konvergente* Reihe über, und es ergiebt sich auf diese Weise:

$$\text{(39)}\qquad q_\nu - q = \sum_{\nu}^{\infty} \frac{t_\mu q_{\mu+1}}{\mu^2},$$

also, wenn man Zähler und Nenner jedes Reihengliedes mit $\left(1+\frac{1}{\mu}\right)$ multipliziert:

$$\text{(40)}\qquad |q_\nu - q| \leq \sum_{\nu}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdot|t_\mu|\cdot|q_{\mu+1}|}{\mu(\mu+1)}.$$

---

1) Ist speziell $k = 1$, so wird die Gleichung

$$\frac{p_\nu}{p_{\nu+1}} = \frac{1}{1-\frac{k}{\nu}}$$

für $\nu = 1$ sinnlos. Dieselbe soll dann nur für $\nu \geq 2$ gelten, und aufserdem

$$p_2 = 1, \quad q_2 = a_2$$

gesetzt werden.

Digitized by Google

Da man sodann eine *positive* Zahl h so fixieren kann, dafs:

$$\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\cdot|t_\mu|\cdot|q_{\mu+1}|<h \qquad (\mu=1,2,3,\ldots), \tag{41}$$

und da andererseits:

$$\sum_{\nu}^{\infty\mu}\frac{1}{\mu(\mu+1)}=\sum_{\nu}^{\infty\mu}\left(\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\mu+1}\right)=\frac{1}{\nu},$$

so folgt aus (40), dafs:

$$|q_\nu-q|<\frac{h}{\nu}, \tag{42}$$

und es läfst sich somit q_ν in die Form setzen:

$$q_\nu=q+\frac{h_\nu}{\nu}, \quad \text{wo:} \quad |h_\nu|<h. \tag{43}$$

Was ferner den mit p_ν bezeichneten Faktor von a_ν (s. Gl. (35), (36)) betrifft, so läfst sich zeigen, dafs $\sum p_\nu$ *divergiert*, während $\sum\frac{p_\nu}{\nu}$ und $\Sigma(p_\nu-p_{\nu+1})$ *absolut konvergieren*. Man hat nämlich nach Gl. (36):

$$\frac{p_{\mu+1}}{p_\mu}=\left(1-\frac{k}{\mu}\right)=\frac{\mu-k}{\mu}, \tag{44}$$

also durch Substitution von $\mu=1,2,\ldots,\nu$ und Multiplikation[1]):

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_1}=p_{\nu+1}=\frac{(1-k)(2-k)\ldots(\nu-k)}{1\cdot 2\ldots\nu}. \tag{45}$$

Setzt man jetzt:

$$p_1+p_2+\cdots+p_\nu=s_\nu, \tag{46}$$

so folgt zunächst:

$$s_2=p_1+p_2=1+\frac{1-k}{1}=\frac{2-k}{1},$$

$$s_3=s_2+p_3=\frac{2-k}{1}+\frac{(1-k)(2-k)}{1\cdot 2}=\frac{(2-k)(3-k)}{1\cdot 2}.$$

---

1) Dabei ist wiederum der Spezialfall $k=1$ auszuschliefsen. Hier wird:

$$\frac{p_{\mu+1}}{p_\mu}=\frac{\mu-1}{\mu},$$

sodafs durch Substitution von $\mu=2,3,\ldots,\nu$ und Multiplikation sich ergiebt:

$$\frac{p_{\nu+1}}{p_2}=p_{\nu+1}=\frac{1}{\nu},$$

d. h. Σp_ν *divergiert* in diesem Fall nach $+\infty$.

Digitized by Google

Angenommen, man habe für irgend ein bestimmtes ν:

$$s_\nu = \frac{(2-k)(3-k)\dots(\nu-k)}{1\,.\,2\dots(\nu-1)}, \tag{47}$$

so wird:

$$\begin{cases} s_{\nu+1} = s_\nu + p_{\nu+1} = \dfrac{(2-k)(3-k)\dots(\nu-k)}{1\,.\,2\dots(\nu-1)}\left(1+\dfrac{1-k}{\nu}\right) \\ \qquad\qquad = \dfrac{(2-k)(3-k)\dots(\nu+1-k)}{1\,.\,2\dots\nu}, \end{cases} \tag{48}$$

d. h. $s_{\nu+1}$ hat dann wiederum genau diejenige Form, welche aus der für s_ν angenommenen Gl. (47) durch Substitution von $\nu+1$ für ν hervorgeht. Da aber die Richtigkeit von Gl. (47) für $\nu = 2, 3$ erwiesen ist, so gilt sie hiernach für jeden Wert von ν.

Bringt man $s_{\nu+1}$ auf die Form:

$$\begin{aligned} s_{\nu+1} &= \prod_1^\nu \frac{\mu+1-k}{\mu} = \prod_1^\nu \frac{\mu+1-\varkappa-\lambda i}{\mu+1+\varkappa}\cdot\frac{\mu+1-\varkappa}{\mu} \\ &= \prod_1^\nu\left(1+\frac{1-\varkappa}{\mu}\right)\cdot\prod_1^\nu\left(1-\frac{\lambda i}{\mu+1-\varkappa}\right), \end{aligned} \tag{49}$$

so erkennt man, dafs für $\varkappa < 1$ das *erste* Produkt mit $\lim \nu = \infty$ nach $+\infty$ *divergiert*, während bei dem *zweiten* der *absolute Betrag* einen *von Null verschiedenen, bestimmten Grenzwert* besitzt, dagegen die *Charakteristik* (aufser wenn $\lambda = 0$) für $\lim \nu = \infty$ *unbestimmt* wird.

Hiernach *divergiert* also $\sum_1^\infty p_\nu$ in *der* Weise, dafs $\left|\sum_1^\infty p_\nu\right| = +\infty$ und aufserdem, wenn nicht gerade $\lambda = 0$ ist, die *Charakteristik unbestimmt* wird.

In dem besonderen Falle $\varkappa = 1$ reduziert sich Gl. (49) auf die folgende:

$$s_{\nu+1} = \prod_1^\nu\left(1-\frac{\lambda i}{\mu}\right), \tag{50}$$

sodafs $s_{\nu+1}$ für $\lim \nu = \infty$ einen *bestimmten von Null verschiedenen absoluten Betrag*, dagegen (sofern nicht etwa $\lambda = 0$)[1]) *keine bestimmte Charakteristik* besitzt und somit $\sum_1^\infty p_\nu$ *endlich-unbestimmt* ausfällt.

1) Dieser Fall — d. h. $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, also: $k = 1$ — ist bereits durch die vorige Fufsnote erledigt.

Digitized by Google

Man hat nun ferner nach Gl. (36):

$$(51)\qquad \frac{\frac{1}{\nu}\cdot p_\nu}{\frac{1}{\nu+1}\cdot p_{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{1}{1-\frac{k}{\nu}}$$

$$= \left(1+\frac{1}{\nu}\right)\left(1+\frac{k}{\nu}+\frac{k^2}{\nu^2\left(1-\frac{k}{\nu}\right)}\right)$$

$$= 1+\frac{k+1}{\nu}+\frac{k}{\nu^2}\left(1+k\cdot\frac{1+\frac{1}{\nu}}{1-\frac{k}{\nu}}\right),$$

und hieraus folgt ohne weiteres mit Hülfe des Konvergenzsatzes von Nr. 4, dafs $\sum\left|\frac{p_\nu}{\nu}\right|$ *konvergiert*, falls[1]) $\Re(k+1)>1$, d. h. $\varkappa>0$.

Schliefslich ergiebt sich noch:

$$(52)\qquad \frac{p_\nu-p_{\nu+1}}{p_{\nu+1}-p_{\nu+2}} = \frac{p_\nu}{p_{\nu+1}}\cdot\frac{1-\frac{p_{\nu+1}}{p_\nu}}{1-\frac{p_{\nu+2}}{p_{\nu+1}}}$$

$$= \frac{\nu}{\nu-k}\cdot\frac{\frac{k}{\nu}}{\frac{k}{\nu+1}} = \frac{\nu+1}{\nu}\cdot\frac{1}{1-\frac{k}{\nu}},$$

woraus (wegen der Übereinstimmung mit der rechten Seite von Gl. (51)) unmittelbar die *Konvergenz* von $\Sigma|p_\nu-p_{\nu+1}|$ resultiert.

Um jetzt die bezüglich der p_ν, q_ν gewonnenen Resultate auf die Beurteilung der a_ν anzuwenden, hat man nach Gl. (35) und (43):

$$(53)\qquad a_\nu = q\cdot p_\nu + h_\nu\cdot\frac{p_\nu}{\nu},$$

$$(54)\quad a_\nu - a_{\nu+1} = q(p_\nu-p_{\nu+1}) + h_\nu\cdot\frac{p_\nu}{\nu} - h_{\nu+1}\cdot\frac{p_{\nu+1}}{\nu+1}. \qquad (\text{wo: } |h_\nu|<h)$$

Aus der *ersten* Gleichung erkennt man, dafs Σa_ν in derselben Weise *divergiert*[2]) wie $\sum p_\nu$ $\left(\text{da ja } \sum h_\nu\cdot\frac{p_\nu}{\nu} \text{ absolut konvergiert}\right)$.

1) $\Re(x)$ bedeutet allgemein den *reellen Teil* von x.

2) Über den genaueren Divergenz-Charakter von Σa_ν ergiebt sich aus den Untersuchungen des Textes noch folgendes:

Ist $0<\varkappa<1$, $\lambda\gtrless 0$, so wird $\left|\sum_1^\infty a_\nu\right| = +\infty$, die *Charakteristik* von

Digitized by Google

Aus der *zweiten* Gleichung ergiebt sich:

$$(55) \qquad |a_\nu - a_{\nu+1}| < q|p_\nu - p_{\nu+1}| + h \cdot \left|\frac{p_\nu}{\nu}\right| + h \cdot \left|\frac{p_{\nu+1}}{\nu+1}\right|,$$

woraus die *Konvergenz* von $\Sigma|a_\nu - a_{\nu+1}|$ ersichtlich ist.

Damit ist aber der zu Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz nunmehr vollständig bewiesen.

8. Aus der (für den Fall $0 < \varkappa \leqq 1$) soeben bewiesenen Konvergenz von $\Sigma|a_\nu - a_{\nu+1}|$, in Verbindung mit der in diesem Falle nach Gl. (31) geltenden Beziehung $\lim_{\nu=\infty} a_\nu = 0$, folgt mit Hülfe der bekannten Transformation

$$\sum_0^n a_\nu x^\nu = \sum_0^{n-1}(a_\nu - a_{\nu+1}) \cdot X_\nu + a_n X_n,$$

wo:

$$X_n = 1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

dafs $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch für jedes von 1 verschiedene x mit dem absoluten Betrage $|x| = 1$ *konvergiert* (und zwar wegen der *Divergenz* von Σa_ν nur *bedingt*).

Man kann danach das Hauptresultat der in Nr. **4**—**7** angestellten Untersuchungen auch folgendermafsen formulieren:

Sind die a_ν komplexe Zahlen von der Beschaffenheit, dafs zum mindesten für $\nu \geqq n$:

$$(56) \qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = 1 + \frac{k}{\nu} + \frac{r_\nu}{\nu^2},$$

wo: $|r_\nu| < g$ für jedes ν, *so ist die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ absolut konvergent für $|x| < 1$ und, falls $\Re(k) > 1$, auch noch für $|x| = 1$. Ist $0 < \Re(k) \leqq 1$, so konvergiert die Reihe $\Sigma a_\nu x^\nu$ noch bedingt für $|x = 1$ mit einzigem Ausschlufs von $x = 1$, während sie im Falle $\Re(k) \leqq 0$ bei $|x| = 1$ ausnahmslos divergiert. Für $|x| > 1$ ist $\Sigma a_\nu x^\nu$ in jedem Falle divergent.*

$\sum_1^\infty a_\nu$ *unbestimmt* (cf. Gl. (49)). Ist $\varkappa = 1$, $\lambda \gtrless 0$, so wird $\left|\sum_1^\infty a_\nu\right|$ *endlich und bestimmt*, die *Charakteristik* von $\sum_1^\infty a_\nu$ wiederum *unbestimmt* (cf. Gl. (50)).

Ist $\varkappa \leqq 1$, $\lambda = 0$, so wird $\sum_1^\infty a_\nu = \infty$ mit *bestimmter Charakteristik* (cf. Gl. (49) und Fufsnote S. 15).

Digitized by Google

9. Ein einfaches und besonders nützliches Beispiel für die Anwendung dieses Satzes bietet die *hypergeometrische* Reihe, also die Annahme:

$$(57) \qquad a_\nu = \frac{a\cdot(a+1)\cdots(a+\nu-1)\cdot b\cdot(b+1)\cdots(b+\nu-1)}{c\cdot(c+1)\cdots(c+\nu-1)\cdot 1\cdot 2\cdots\nu}$$

(wo a, b, c beliebig komplex mit Ausschluß *ganzzahliger negativer* Werte). Man hat hier zunächst:

$$(58) \qquad \frac{a_\nu}{a_{\nu+1}} = \frac{(\nu+1)(\nu+c)}{(\nu+a)(\nu+b)} = \frac{\nu^2+(1+c)\cdot\nu+c}{\nu^2+(a+b)\cdot\nu+ab}.$$

Setzt man:

$$(59) \qquad \frac{\nu^2+(1+c)\nu+c}{\nu^2+(a+b)\nu+ab} = 1+\frac{k}{\nu}+\frac{r_\nu}{\nu^2},$$

so folgt durch Multiplikation mit $\nu^2+(a+b)\nu+ab$:

$$(1+c-a-b)\cdot\nu+(c-ab)=k\nu+(a+b)\cdot k+\frac{abk}{\nu}+\left(1+\frac{a+b}{\nu}+\frac{ab}{\nu^2}\right)\cdot r_\nu$$

und daher:

$$(60) \qquad \begin{cases} k = 1+c-a-b, \\ r_\nu = \dfrac{c-ab-(a+b)k-\dfrac{abk}{\nu}}{1+\dfrac{a+b}{\nu}+\dfrac{ab}{\nu^2}}, \end{cases}$$

also:

$$\lim_{\nu=\infty} r_\nu = c-ab-(a+b)k$$

(d. h. *endlich*).

Da hiernach $\Re(k) = 1+\Re(c-a-b)$ wird, so folgt aus dem obigen Satze, daß die hypergeometrische Reihe für $|x|=1$ noch *absolut konvergiert*, wenn: $\Re(c-a-b)>1$; daß sie für $|x|=1$, mit Ausnahme von $x=1$ selbst, noch *bedingt konvergiert*, wenn: $0<\Re(c-a-b)\leqq 1$; daß sie endlich in dem noch übrig bleibenden Falle $\Re(c-a-b)\leqq 0$ für $|x|=1$ ausnahmslos *divergiert*.

Die spezielle Annahme: $b=c$, $a=-m$, $x=-y$ liefert dann noch die entsprechenden Resultate für die *binomische* Reihe

$$\sum \frac{m\cdot(m-1)\cdots(m-\nu+1)}{1\cdot 2\cdots\nu}\cdot y^\nu.$$

München, Februar 1902.

Digitized by Google

Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels;

Par M. PAUL APPELL à Paris.

1. Je me propose de présenter quelques remarques élémentaires sur la définition d'un nombre qu'on pourrait appeler le *degré de réalité* ou la *réalité* d'une courbe algébrique à coefficients réels.

1) Une équation algébrique entière en x, à coefficients réels,

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0,$$

admet, suivant les cas, n, $n-2$, $n-4$, ... racines réelles; on peut dire que son degré de réalité est n, $n-2$, $n-4$, ...

L'équation rendue homogène

$$f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n = 0, \tag{1}$$

représente, par rapport à un système d'axes Ox et Oy un faisceau de n, $n-2$, $n-4$, ... droites réelles, faisceau de *réalité* n, $n-2$, $n-4$, ...

2. Soit maintenant une courbe algébrique quelconque d'ordre n

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

à coefficients réels. S'il existe un nombre caractérisant le *degré de réalité* de cette courbe, ce nombre doit remplir les conditions suivantes, par analogie avec ce qui a lieu pour un polynôme à une variable.

Lorsque la courbe (2) se décompose en deux courbes d'ordre moindre, le *degré de réalité* de cette courbe doit être la somme des degrés de réalité des courbes composantes.

Le degré de réalité d'une courbe doit rester le même quand on fait une transformation homographique quelconque à coefficients réels.

Examinons successivement, à ce point de vue, les courbes des ordres 2, 3, 4.

Courbes du deuxième ordre. Soit une courbe du deuxième ordre; son degré de réalité sera 2, si elle est une ellipse réelle, une parabole, une hyperbole, ou un système de deux droites réelles. Son degré de réalité sera au contraire 0, si elle est une ellipse imaginaire ou un système de deux droites imaginaires conjuguées (point isolé).

Courbes du troisième ordre. Une courbe du troisième ordre, décomposée en une droite et une conique, aura pour *réalité* 3 ou 1 suivant que la conique aura pour réalité 2 ou 0.

D'après cela, une courbe du troisième ordre aura pour *réalité* 3, si elle est formée de deux branches réelles distinctes ou si elle présente un point double à tangentes réelles; elle sera de réalité 1, si elle ne présente qu'une seule branche ou si elle a un point double isolé

Digitized by Google

Il va de soi que le mot branche doit être pris dans le sens projectif: ainsi une hyperbole est formée d'une seule branche.

Courbes du quatrième ordre. Dans le même ordre d'idées, une courbe du quatrième ordre devra être regardée comme de *réalité* 4, si elle a deux ou un plus grand nombre de branches réelles distinctes, ou si elle présente, avec ou sans d'autres singularités, un point double à tangentes réelles; elle sera de *réalité* 2, si elle est formée d'une seule branche réelle accompagnée ou non de points isolés. Enfin, elle sera de réalité 0, si elle ne possède pas de branches réelles, ou si elle possède seulement des points singuliers isolés.

Par exemple, en prenant deux points fixes O et O', placés à la distance $2a = OO'$ l'un de l'autre, le lieu des points M tels que

$$MO \cdot MO' = k^2$$

est une courbe du quatrième ordre: cette courbe a comme degré de réalité 0 quand $k^2 = 0$, 4 quand $0 < k^2 \leqq a^2$, 2 quand $k^2 > a^2$.

Je n'entre pas actuellement dans plus de détails et je me borne en terminant à indiquer une application de cette notion.

3. Considérons les courbes ayant pour équation

$$X_{m,n} = \frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} = 0, \tag{3}$$

courbes qui ont été considérées par Hermite dans ses recherches sur les polynômes à deux variables analogues aux polynômes X_n de Legendre. Hermite a montré que, en laissant de côté les droites pouvant provenir de ce que le polynôme (3) contient x ou y en facteur, les courbes (3) sont situées dans le cercle $x^2+y^2-1=0$; mais il est probable que ces courbes sont de *réalité* $m+n$, par analogie avec ce fait que le polynôme X_n de Legendre est de *réalité* n.

Ainsi pour $m=1$, $n=2$, la courbe (3) se compose d'une droite et d'une ellipse réelle (*réalité* 3). Pour $m=2$, $n=2$ on a la courbe

$$5x^4 + 5y^4 + 18x^2y^2 - 6x^2 - 6y^2 + 1 = 0 \tag{4}$$

qui est formée de deux branches distinctes (*réalité* 4).

Un fait du même genre doit se présenter pour les polynômes à deux variables

$$P_{2m,2n} = \frac{\partial^{m+n}[x^m y^n (x^2+y^2-1)^{m+n}]}{\partial x^m \partial y^n}$$

que j'ai considérés dans l'*Archiv der Mathematik und Physik* (3) **1**, 71. L'hypothèse $m=1$, $n=1$, donne la même courbe (4).

Paris, 19 juin 1902.

Digitized by Google

Über die Konstruktion von Isophengen auf Flächen 2. Ordnung.

Von E. WEINNOLDT in Kiel.

Einleitung.

In seinen Arbeiten über die Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäfsig gestalteter Flächen hat Herr Burmester[1]) auch in ausführlicher Weise die Flächen 2. Ordnung behandelt. Der dabei angewandten geometrischen Beleuchtung liegt die Annahme zu Grunde, dafs die Flächen von einer unendlich fernen konstanten Lichtquelle bestrahlt werden, und dafs die Beleuchtungsintensität eines Flächenelements proportional dem Kosinus des Winkels ist, den die Flächennormale mit der Richtung der parallelen Lichtstrahlen bildet. Für diese „wahre" Beleuchtung hat Herr Burmester die Konstruktion der Isophoten oder Lichtgleichen, d. h. der Kurven, welche auf einer beleuchteten Fläche die Punkte gleicher Intensität verbinden, auf Flächen 2. Ordnung vollständig durchgeführt. Er hat die Konstruktion auf eine solche von konzentrischen Kreisen und von Achsenschnitten der Flächen 2. Ordnung zurückgeführt.[2])

Von der wahren Beleuchtung hat Herr Burmester die „scheinbare" unterschieden, welche nicht allein von der Stellung der beleuchteten Fläche gegen die Lichtrichtung, sondern auch von der Lage der beleuchteten Flächenelemente gegen die Sehrichtung abhängen soll. Die scheinbare Beleuchtungsintensität nimmt er bei schwach glänzenden Flächen proportional dem Produkte der beiden Kosinus der Winkel an, welche die Flächennormale mit Licht- und Sehrichtung bildet. Diese Annahme, welche dem Lambertschen Satze, dafs die Helligkeit einer rauhen Körperoberfläche unabhängig von der Sehrichtung sein soll, widerspricht, ist zwar beanstandet worden und hat keine allgemeine Anerkennung gefunden[3]), führt jedoch, wie die Untersuchungen

---

1) L. Burmester: Theorie und Darstellung der Beleuchtung gesetzmäfsig gestalteter Flächen. Leipzig 1871. — Derselbe: Über Isophoten. Zeitschrift für Mathematik und Physik. **14**, 1869.

2) L. Burmester, l. c. § 50—54.

3) Genauere Angaben findet man z. B.: Wiener: Darstellende Geometrie. Bd. I. Leipzig 1884. §§ 50—53; 474—493.

Digitized by Google

von Herrn Burmester gezeigt haben, zu interessanten geometrischen Sätzen. Er hat nämlich auch für diese scheinbare Beleuchtung die Konstruktion der Linien gleicher Beleuchtungsintensität oder Isophengen (Hellegleichen) für eine Reihe von Flächen angegeben. Bei den Flächen 2. Ordnung beschränkt er sich jedoch auf den Spezialfall, dafs die Sehrichtung einer Achse der Fläche 2. Ordnung parallel läuft.[1])

Der Zweck der folgenden Arbeit ist nun, den allgemeinen Fall, in welchem nicht nur die Lichtrichtung, sondern auch die Sehrichtung beliebig zu den Achsen der Fläche 2. Ordnung gelegen ist, der konstruktiven Behandlung zu unterziehen. Mittlerweile hat Herr Rich. Müller[2]) auf Grund hinterlassener Papiere von Wilhelm Stahl auf rein geometrischem Wege Untersuchungen über die Isophengen der Flächen 2. Ordnung ausgeführt, welche die Resultate Burmesters in Bezug auf diese Flächen verallgemeinern, aber insofern sich nicht mit den folgenden Untersuchungen decken, als sie auf die eigentliche Konstruktion der Isophengen nicht eingehen.

Es ist mir nun gelungen, die Konstruktion der Isophengen der Flächen 2. Ordnung auch im ganz allgemeinen Falle auf die Isophengen der Kugel und damit auf die Konstruktion eines Kreisbüschels und auf die Konstruktion von Achsenschnitten der Flächen 2. Ordnung zurückzuführen, und zwar auf ähnlichem Wege, wie es Herr Burmester für die Isophoten gethan hat.[3])

I.

Eigenschaften der Isophengen und Isophengoiden der Flächen 2. Ordnung.

In Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem sei die Gleichung einer beleuchteten Fläche:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{I}$$

Die Richtungskosinus der parallelen Lichtstrahlen seien l_x, l_y, l_z, die der Sehstrahlen, welche für ein in unendlicher Entfernung gedachtes Auge parallel laufen, seien s_x, s_y, s_z. Dann ist, wenn die Helligkeit eines Flächenelements, auf welchem Licht- und Sehrichtung senkrecht

1) L. Burmester: l. c. § 85—87.

2) R. Müller: Isophoten und Isophengen, insbesondere auf den Flächen 2. Ordnung. Archiv der Mathematik und Physik (3) I. S. 166.

3) Burmester: l. c. S. 247.

Digitized by Google

stehen, als Einheit genommen wird, die scheinbare Beleuchtungsintensität eines beliebigen Flächenelements:

$$(II) \qquad H = \frac{\left(l_x \frac{\partial F}{\partial x} + l_y \frac{\partial F}{\partial y} + l_z \frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(s_x \frac{\partial F}{\partial x} + s_y \frac{\partial F}{\partial y} + s_z \frac{\partial F}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}.$$

Diese Gleichung, die für eine Reihe bestimmter Werte von H im allgemeinen ein Flächensystem darstellt, nämlich das System der Isophengoiden[1]), liefert in Verbindung mit (I) die Kurven gleicher Helle.

Solange über die Licht- und Sehrichtung keine besonderen Voraussetzungen gemacht werden, können wir, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beschränken, die Gleichung der Fläche 2. Ordnung als auf die Hauptachsen transformiert annehmen.

Die Gleichung einer zentrischen Fläche 2. Ordnung sei daher:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - D = 0.$$

Dann ist die allgemeine Gleichung des Isophengoidensystems dieser Fläche:

$$(III) \qquad H = \frac{(l_x Ax + l_y By + l_z Cz)(s_x Ax + s_y By + s_z Cz)}{(Ax)^2 + (By)^2 + (Cz)^2}.$$

Aus der Gleichung (III) ergeben sich für die Isophengoiden und die Isophengen der zentrischen Flächen 2. Ordnung folgende Eigenschaften:

1. Die Isophengoiden sind im allgemeinen Kegelflächen 2. Ordnung, die den Mittelpunkt dieser Flächen als gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben.

2. Die Isophengoiden bleiben für alle ähnlichen zentrischen Flächen 2. Ordnung unverändert.

3. Die Isophengoiden aller zentrischen Flächen 2. Ordnung sind affin, da D in der Gleichung (III) fehlt, und x, y, z bezüglich die Faktoren A, B, C haben.

4. Die Isophengen der zentrischen Flächen 2. Ordnung sind auch im allgemeinsten Falle, als Schnittkurven einer Fläche 2. Ordnung mit Kegeln 2. Ordnung, Raumkurven 4. Ordnung.

5. Sie können nicht in eine Raumkurve 3. Ordnung und eine Gerade zerfallen, da ein Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkte der zentrischen Fläche 2. Ordnung liegt, mit dieser keine Gerade gemein haben kann.

Die Hauptachsengleichung einer nicht zentrischen Fläche 2. Ordnung:

$$Ax^2 + By^2 - 2Dz = 0$$

---

1) Burmester: l. c. S. 363.

Digitized by Google

ergiebt als Gleichung des Isophengoidensystems dieser Fläche:

$$(IV) \qquad H = \frac{(l_x Ax + l_y By - l_z D)\,(s_x Ax + s_y By - s_z D)}{(Ax)^2 + (By)^2 + D^2}.$$

Es gelten daher hier die Sätze:

6. Die Isophengoiden der nicht zentrischen Flächen 2. Ordnung sind im allgemeinen Cylinderflächen 2. Ordnung, deren Erzeugende mit der z-Achse und daher mit der Hauptachse des betreffenden Paraboloids parallel laufen.

7. Die Isophengoiden aller nicht zentralen Flächen 2. Ordnung, in denen keine der Gröfsen A, B, D die Werte 0 oder ∞ haben, sind affin.

8. Die Isophengen auch dieser Flächen sind Raumkurven 4. Ordnung.

9. Diese Raumkurven 4. Ordnung werden in eine Raumkurve 3. Ordnung und eine gerade Linie zerfallen, wenn eine Gerade der Fläche mit einer Erzeugenden der Isophengoide zusammenfällt. Da die Geraden der Fläche die Gleichungen:

$$\sqrt{A}x \pm \sqrt{-B}y = \lambda, \quad \lambda(\sqrt{A}x \mp \sqrt{-B}y) = 2Dz$$

haben, die Erzeugenden der Cylinderflächen aber der z-Achse parallel laufen, so kann dies nur eintreten, wenn $\lambda = \infty$ ist, d. h. die Geraden selbst im Unendlichen liegen. Im Unendlichen werden das Paraboloid und die Cylinderflächen aber eine Gerade gemeinsam haben, wenn die Glieder 2. Grades in der Gleichung der Cylinderfläche entweder den Faktor $\sqrt{A}x + \sqrt{-B}y$ oder den Faktor $\sqrt{A}x - \sqrt{-B}y$ enthalten. H wird sich immer einmal so bestimmen lassen, dafs der eine oder der andere Fall eintritt. Daher werden unter den Isophengen der Paraboloide zwei Kurven 3. Ordnung vorhanden sein, die durch je eine der reellen oder imaginären unendlich fernen Geraden der Fläche zu Kurven 4. Ordnung ergänzt werden.[1])

Die eben aufgeführten Eigenschaften der Isophengoiden und Isophengen sind von Herrn Burmester ebenfalls gezeigt worden, allerdings immer nur für den Fall, dafs die Sehrichtung mit einer der Hauptachsen der Fläche zusammenfällt.

Herr R. Müller hat die Eigenschaften 1, 4, 6, 8 und 9 auch für den allgemeinen Fall auf einem Wege abgeleitet, der von Wiener[2]) für die Isophoten angewandt ist. Es sollen jetzt noch die übrigen angeführten Eigenschaften, welche für die folgenden Untersuchungen wesentlich sind, auf demselben rein geometrischen Wege bewiesen

1) R. Müller: S. 172.

2) Wiener: Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Bd. II. Leipzig 1887. S. 202.

Digitized by Google

werden. Wie es ebenfalls schon Herr Fiedler in seiner darstellenden Geometrie[1]) bei den Isophoten hervorgehoben hat, sind die Isophengen Berührungskurven der Fläche 2. Grades mit Developpablen, deren Richtungskegel Kegel gleicher Helligkeit sind, oder welche je einen Kegel gleicher Helligkeit im Unendlichen berühren. Die Kegel gleicher Helligkeit sind aber konfokale Kegel 2. Ordnung.[2]) Es handelt sich also um die gemeinsame abwickelbare Fläche zweier Flächen 2. Grades, von denen die eine eine im Unendlichen gelegene Kurve 2. Grades, nämlich die Schnittkurve eines Kegels gleicher Helligkeit mit der unendlich fernen Ebene ist. Die Aufgabe, die gemeinsame Developpable zweier Flächen 2. Ordnung U_1 und U_2 und ihrer Berührungskurve mit der einen Fläche U_1 zu finden, kann aber auch in die reziproke Aufgabe verwandelt werden, die Schnittkurve dieser letzten Fläche U_1 mit der Reziprokalfläche von U_2 in Bezug auf U_1 zu konstruieren.

In unserem Falle sind U_2 Kurven 2. Grades in der unendlich fernen Ebene, ihre Reziprokalflächen in Bezug auf U_1 sind daher Kegel 2. Grades, deren Spitzen im Mittelpunkt von U_1 liegen. Da sie aber aus der Fläche U_1 die Isophengen ausschneiden, so sind sie die von Herrn Burmester als Isophengoiden bezeichneten Kegelflächen. Da aus diesem Gedankengange ganz allgemein folgt, dafs die Isophengoiden Kegel 2. Grades sind, so ist damit auch bewiesen, dafs die Isophengen im allgemeinen Raumkurven 4. Ordnung sind.

Es folgen nun aber hieraus auch die Sätze 2 und 3 in ihrer Allgemeinheit. Haben wir zwei zentrische Flächen 2. Ordnung V_1 und V_2, deren Mittelpunkte und Achsen zusammenfallen, so ist bei gleicher Seh- und Lichtrichtung je eine Isophengoide dieser beiden Flächen die Reziprokalkegelfläche R_1 oder R_2 einer und derselben Kurve φ in Bezug auf zwei Flächen V_1 und V_2. R_1 und R_2 sind daher kollinear und im besonderen affin, weil V_1 und V_2 denselben Mittelpunkt haben, und deshalb den Punkten von R_1 in der unendlich fernen Ebene auch solche von R_2 entsprechen. Die Isophengoiden der zentrischen Flächen 2. Ordnung sind also affin.

Sind nun V_1 und V_2 ähnliche Flächen und daher bei unserer Annahme auch ähnlich gelegen, so berühren sie sich im Unendlichen längs einer ebenen Kurve f_2. Die beiden in Bezug auf V_1 und V_2 gebildeten Reziprokalkegelflächen R_1 und R_2 werden mit der unendlich fernen Ebene zwei Schnittkurven ψ_1 und ψ_2 haben, die beide polar zu derselben Kurve φ in Bezug auf f_2 sein müssen und daher zusammen-

1) Fiedler: Die darstellende Geometrie. I. Aufl. Leipzig 1871. S. 477.
2) R. Müller: S. 167.

Digitized by Google

fallen. Da die Kegelflächen R_1 und R_2 aufserdem dieselbe Spitze haben, so fallen sie ebenfalls zusammen. Die Isophengoiden ähnlicher Flächen 2. Ordnung sind kongruent.

In Bezug auf die Isophengoiden zweier konzentrischer Flächen 2. Ordnung V_1 und V_2 mit denselben Achsen läfst sich noch folgender Schlufs ziehen. Das gemeinsame Polartetraeder der beiden Flächen V_1 und V_2 besteht aus den drei Hauptebenen und der unendlich fernen Ebene. In je zwei in Bezug auf V_1 und V_2 gebildeten reziproken Systemen werden demnach die Hauptachsen von V_1 und V_2 ein Paar entsprechender Tripel zu einander senkrechter Strahlen sein. Die Beziehung zwischen den entsprechenden Punkten der affinen Kegelflächen R_1 und R_2 kann daher ausgedrückt werden durch die Gleichungen:

$$\xi = ax, \quad \eta = by, \quad \zeta = cz,$$

wo die Gröfsen $x, y, z, \xi, \eta, \zeta$ die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte der Flächen R_1 und R_2 in Bezug auf die Hauptachsen von V_1 und V_2 als Koordinatenachsen sind. Die Isophengoiden R_1 und R_2 werden also durch Ebenen, die zu einer der Hauptachsen, etwa der z-Achse, der beleuchteten Flächen senkrecht stehen, in affinen Kegelschnitten k_1 und k_2 geschnitten, für welche die Geraden, die den anderen Hauptachsen von V_1 und V_2 parallel laufen, entsprechende Paare senkrechter Strahlen sind. Die Schnittebene durch R_1 kann immer so gewählt werden, dafs das Ähnlichkeitsverhältnis der zu einer zweiten Achse von V_1, etwa der y-Achse, parallelen Strahlen in k_1 und k_2 gleich 1 ist; dann können die Ebenen von k_1 und k_2 durch Parallelverschiebung so zur Deckung gebracht werden, dafs k_1 und k_2 in perspektiver Lage sind, die eine Achse von k_1 und k_2 die Affinitätsachse ist und die andere Achse der Affinitätsrichtung parallel läuft. Von dieser Eigenschaft der ebenen Schnitte der Isophengoiden wird im IV. Abschnitt Gebrauch gemacht. Sie wird dort auch aus der Gleichung der Isophengoiden geschlossen.

Bei den nicht zentrischen Flächen 2. Ordnung, den Paraboloiden, betrachten wir zwei Flächen V_1 und V_2, die gemeinsame Hauptebenen haben.

Je zwei Isophengoiden R_1 und R_2 von V_1 und V_2 sind kollinear als Reziprokalflächen einer und derselben im Unendlichen gelegenen Kurve in Bezug auf V_1 und V_2. Zwei Flächen R_1 und R_2, die zu demselben dritten Gebilde reziprok sind, haben aber in einer gemeinsamen Tangentialebene der Flächen, in Bezug auf welche sie reziprok sind, entsprechende Elemente. Da für V_1 und V_2 die unendlich ferne Ebene eine gemeinsame Tangentialebene ist, so müssen die in dieser

Digitized by Google

Ebene enthaltenen Elemente von R_1 und R_2 einander entsprechen. R_1 und R_2, die Isophengoiden zweier Paraboloide, sind daher affin.

II.

Über das Isophengensystem der Kugel.

Für eine Kugel von der Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{I}$$

bedeutet die Voraussetzung, dafs die Sehrichtung mit der z-Achse zusammenfällt, keine Beschränkung der Allgemeinheit der Aufgabe. Bei dieser Annahme ist:

$$s_x = 0, \quad s_y = 0, \quad s_z = 1.$$

Dann lautet die Gleichung des Isophengoidensystems:

$$H = \frac{(l_x x + l_y y + l_z z) z}{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{II}$$

Der Schnitt dieses Systems mit einer im Abstande $-\delta$ vom Mittelpunkte senkrecht zur Sehrichtung, also zur z-Achse, gelegten Ebene hat die Gleichung:

$$H = \frac{-(l_x x + l_y y - l_z \delta)\delta}{x^2 + y^2 + \delta^2}. \tag{III}$$

Dies ist, wie leicht zu erkennen ist, die Gleichung eines Kreisbüschels, dessen Konstruktion von Herrn Burmester ausführlich angegeben ist. Ich habe aus der obigen Gleichung eine andere Konstruktion gefunden, die sich mehr einem von Herrn Mandl angegebenen Verfahren anschliefst.[1]) Die Gleichung (II) lehrt, dafs eine Isophengoide, welche dem Werte H entspricht, ein Kegel ist, der den Mittelpunkt M der gegebenen Kugel K als Spitze hat und durch den Schnitt der Ebene $z = K$ und der Kugel k von der Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = l_x x + l_y y + l_z z$$

oder:

$$(x - \tfrac{1}{2} l_x)^2 + (y - \tfrac{1}{2} l_y)^2 + (z - \tfrac{1}{2} l_z)^2 = \tfrac{1}{4}$$

hindurchgeht. Die Kugel k hat den Radius $^1/_2$, hat ihren Mittelpunkt auf der Lichtrichtung in der Entfernung $^1/_2$ von M und geht durch M. Sie bleibt für alle Isophengen desselben Systems unverändert. Die Ebene $z = H$ ist eine zur Grundrifsebene gezogene Parallelebene, deren Lage sich mit der Helligkeit H ändert, die aber leicht gezeichnet

1) Julius Mandl: Darstellung der scheinbaren Beleuchtung krummer Flächen (direkte Konstruktion der Isophengen). Sitzgsber. der Wien. Ak. XV. Bd. Abt. IIa. 1896.

Digitized by Google

werden kann, wenn man sich von M aus die Intensitätsskala $H = +1$, $+0{,}9$, $+0{,}8$, $\cdots$, $+0{,}1$, 0, $-0{,}1$, $\cdots$, -1 auf der z-Achse abträgt. Um demnach die Grundrifsprojektion des Kreisbüschels zu finden, zeichnet man im Aufrifs den scheinbaren Umrifs k_2 der Kugel k mit Hilfe des Grundrisses l_1 und des Aufrisses l_2 der Lichtrichtung und des

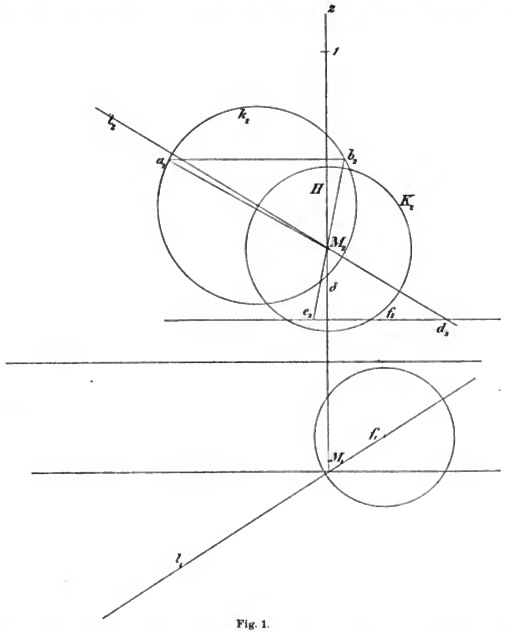


Fig. 1.

Radius, den man gleich der Strecke 0,5 des Intensitätsmafsstabes nimmt (Fig. 1). Den Kreis k_2 schneidet man durch Parallelen, die durch die Teilpunkte der Intensitätsskala senkrecht zur z-Achse gezogen sind. Die Schnittpunkte, z. B. $a_2 b_2$, projiziert man von M aus auf eine im Abstande $-\delta$ von M gezogene Horizontale nach d_2 und e_2. Die Strecke $e_2 d_2$ ist die Vertikalprojektion des Schnittkreises einer Iso-

Digitized by Google

phengoide mit der Ebene E. Aus der Symmetrie der ganzen Figur zu der durch M und den Lichtstrahl senkrecht zu E gelegten Ebene folgt, dafs der Mittelpunkt der Horizontalprojektion des Schnittkreises auf l_1 liegt. Den Mittelpunkt von $e_2 d_2$ projiziert man daher auf l_1 nach f_1 und schlägt um f_1 mit $\frac{1}{2} e_2 d_2$ als Radius einen Kreis. Derselbe ist ein Kreis des Kreisbüschels (III) und zwar derjenige, welcher zur Helligkeit H gehört.

Die Konstruktion kann auch folgendermafsen im Grundrifs allein ausgeführt werden (Fig. 2). Man legt durch die Lichtstrahlrichtung l

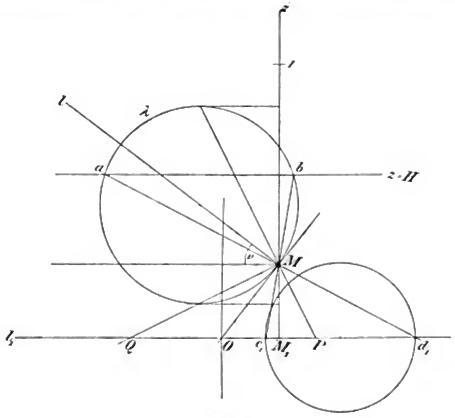


Fig. 2.

und durch M eine Vertikalebene, welche die Kugel k in einem Kreise λ und die Ebenen $z = H$ in Geraden parallel l_2 schneidet. Man dreht die Ebene um ihre Spur mit der Ebene $z = -\delta$ in die Horizontalebene. Man erhält die umgelegte Figur, indem man in der Projektion M_1 des Mittelpunktes der gegebenen Kugel K ein Lot zur Lichtstrahlprojektion l_1 errichtet und dasselbe gleich δ macht. Der erhaltene Endpunkt ist der umgelegte Mittelpunkt M und das Lot die umgelegte Sehrichtung. Durch M zieht man eine Gerade von der Länge 1 unter einem Winkel ν gegen l_1, der gleich ist dem Neigungswinkel des Lichtstrahls gegen die Horizontale. Über der Strecke 1 als Durchmesser zieht man einen Kreis und durch die wieder von M aus auf

Digitized by Google

der umgelegten z-Achse abgetragenen Teilpunkte des Intensitätsmafsstabes legt man Senkrechte zur z-Achse. Durch je zwei Schnittpunkte a und b, welche diese Senkrechten mit dem Kreis λ bilden, gehen zwei Mantellinien der Isophengenkegel. Die Strecken $c_1 d_1$, welche je zwei zusammengehörige, durch M gehende Mantellinien auf l_1 zwischen sich fassen, sind die Durchmesser der Kreise des Kreisbüschels III, welches nach Herrn Burmester als Hauptkreissystem bezeichnet werden soll. Die über diese Durchmesser gezogenen Kreise sind in der That die Schnittkreise der Ebene E mit Kegeln, welche in M ihre Spitze haben und durch die Schnittkreise der Kugel k und der Ebenen H hindurchgehen. Diejenigen Senkrechten zur z-Achse, welche den Kreis λ berühren, ergeben Kreise mit dem Radius 0 und daher die Grenzpunkte P und Q des Hauptkreissystems. Führt man die angegebene Konstruktion auch für den Punkt M der z-Achse mit der Intensität $H = 0$ durch, so läuft die eine Mantellinie zu l_1 parallel, die andere geht in die in M an λ gezogene Tangente über, und die beiden auf l_1 entstehenden Durchmesserendpunkte haben eine unendlich grofse Entfernung von einander. Der Kreis wird zur Geraden, die in O auf l_1 senkrecht steht, d. h. zur Radikalachse des Kreissystems. Ihr entspricht die Intensität Null. Aus der Konstruktion des Kreisbüschels geht hervor, dafs er ein solcher mit reellen Grenzpunkten, daher mit imaginären Schnittpunkten ist.

Mit Hilfe des Hauptkreissystems haben Herr Burmester und Herr Mandl die Isophengen der Kugel als Durchdringungskurven konstruiert.

Wir wollen jetzt annehmen, dafs die Sehrichtung s nicht mit der z-Achse unseres Koordinatensystems parallel läuft. Dann lautet die Gleichung des Isophengoidensystems:

$$H = \frac{(l_x x + l_y y + l_z z)(s_x x + s_y y + s_z z)}{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{V}$$

Schneiden wir dasselbe wiederum durch eine zur z-Achse senkrechte Ebene E', also durch eine zur Sehrichtung geneigte, die von M den Abstand $-\delta$ hat, so erhält man ein Schnittsystem Σ' von der Gleichung:

$$H = \frac{(l_x x + l_y y - l_z \delta)(s_x x + s_y y - s_z \delta)}{x^2 + y^2 + \delta^2}. \tag{VI}$$

Σ' ist ein Kegelschnittsystem, das zentralkollinear zu dem Hauptkreissystem Σ liegt, welches durch eine Schnittebene E senkrecht zur Sehrichtung aus dem Isophengoidensystem der Kugel erhalten wird. Durch Drehung um die Schnittlinie beider Ebenen kann man entweder Σ in die Ebene E' oder Σ' in die Ebene E umlegen. Nach der Drehung

Digitized by Google

sind die beiden Systeme Σ und Σ' noch in zentralkollinearer Lage, für welche Zentrum, Achse und Gegenachsen leicht angegeben werden können, so dafs Σ' aus dem Kreisbüschel hergestellt werden kann. Der Kegelschnittbüschel Σ' mit der Gleichung (VI) ist übrigens ein spezieller Kegelschnittbüschel.

1. Er hat stets vier imaginäre Grundpunkte, nämlich die Schnittpunkte der Geraden:

$$l_x x + l_y y - l_z \delta = 0$$

und

$$s_x x + s_y y - s_z \delta = 0$$

mit dem imaginären Kreise:

$$x^2 + y^2 = -\delta^2.$$

2. Aus der geordneten Gleichung (VI):

$$(H - l_x s_x) x^2 + (H - l_y s_y) y^2 - (s_x l_y + s_y l_x) xy + ax + by + c = 0$$

folgt, dafs alle Kegelschnitte durch Drehung um denselben Winkel φ, so dafs:

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{s_x l_y + s_y l_x}{(H - l_y s_y) - (H - l_x s_x)} = \frac{s_x l_y + s_y l_x}{l_x s_x - l_y s_y}$$

ist, auf die Hauptachsen transformiert werden können. Die Kegelschnitte von Σ' haben daher parallele Achsen.

3. Nehmen wir die Halbierungslinie des spitzen Winkels 2ω, welchen die beiden durch den Mittelpunkt der Kugel gezogenen Licht- und Sehstrahlen einschliefsen, als x-Achse, die Halbierungslinie des stumpfen Winkels als y-Achse, so ist:

$$l_x = \cos\omega, \qquad l_y = \sin\omega, \qquad l_z = 0,$$

$$s_x = -\cos\omega, \quad s_y = -\sin\omega, \quad s_z = 0;$$

daher Gleichung (V):

$$H = \frac{\cos\omega^2 x^2 - \sin\omega^2 y^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Daraus folgt, dafs der Kegelschnittbüschel Σ' aus konzentrischen Kegelschnitten besteht, wenn die Schnittebene entweder zur Ebene der Licht- und Sehrichtung parallel oder zu einer der Halbierungslinien des Winkels zwischen Licht- und Sehrichtung senkrecht steht.

Die Eigenschaft 1. hätte auch aus der kollinearen Beziehung von Σ' zum Kreisbüschel Σ, welcher ebenfalls vier imaginäre Grundpunkte hat, gefolgert werden können. Der Satz 2. ist ein Spezialfall des Satzes, dafs Flächen 2. Grades mit denselben Kreisschnittebenen mit jeder

Digitized by Google

Ebene Schnitte von parallelen Achsen bestimmen.[1]) Die Isophengoidenkegel der Kugel werden nämlich nicht nur durch eine Ebene senkrecht zur Sehrichtung, sondern, wie aus der Symmetrie der Gleichung (V) in Bezug auf s und l hervorgeht, auch durch Ebenen senkrecht zur Lichtrichtung in Kreisbüscheln geschnitten, sind also Kegel mit gemeinschaftlichen Kreisschnittebenen.

III.

Konstruktion der Isophengen, wenn die Sehrichtung in einer Hauptebene liegt.

Wir wollen bei der Isophengenkonstruktion der Flächen 2. Ordnung zunächst den Fall behandeln, dafs die Sehrichtung zwar nicht parallel einer der Hauptachsen, wohl aber parallel einer der Hauptebenen gelegen sein soll. Bei der Darstellung in orthogonaler Projektion ist die Sehrichtung bei den Grundrifsisophengen senkrecht zur Grundrifsebene. Wir legen die Achsen unseres Koordinatensystems in die Hauptachsen der Fläche 2. Ordnung. Die Sehrichtung s liege in der xz-Ebene gegen die x-Achse unter dem Winkel α geneigt. Die xz-Ebene selbst laufe mit der Aufrifsebene parallel. Der Lichtrichtung erteilen wir wieder die Richtungskosinus l_x, l_y, l_z.

Für die zentrische Fläche 2. Ordnung:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - D = 0$$

ergiebt sich dann das Isophengoidensystem:

$$H = \frac{(l_x Ax + l_y By + l_z Cz)\,(A \cos\alpha x + C \sin\alpha z)}{(Ax)^2 + (By)^2 + (Cz)^2}.$$

Legen wir durch dieses Isophengoidensystem in einem beliebigen Abstande $-\Delta$ vom Mittelpunkte M der Fläche eine Ebene E senkrecht zur z-Achse, so ist die Gleichung dieses Schnittsystems, welches wir mit Σ_1 bezeichnen wollen:

$$H = \frac{(l_x Ax + l_y By - l_z C\Delta)\,(A \cos\alpha x - C \sin\alpha \Delta)}{(Ax)^2 + (By)^2 + (C\Delta)^2}.$$

Diese Gleichung geht durch die Abkürzung:

$$\frac{A}{C\Delta} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{B}{C\Delta} = \frac{1}{b}$$

1) Salmon-Fiedler: Analytische Geometrie des Raumes. 1. Teil. Leipzig 1879. S. 121.

Digitized by Google

über in:

$$H = \frac{\left(l_x \frac{x}{a} + l_y \frac{y}{b} - l_z\right)\left(\frac{x}{a}\cos\alpha - \sin\alpha\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 1}.$$

Nehmen wir nun für eine Kugel, deren Mittelpunkt M' im Abstande $\delta = a'$ von E auf der z-Achse gelegen ist, dieselbe Licht- und Sehrichtung an und schneiden das Isophengoidensystem dieser Kugel ebenfalls durch E, so hat nach II. Gl. (VI) dieses Schnittsystem Σ die Gleichung:

$$H = \frac{\left(l_x \frac{x}{a} + l_y \frac{y}{a} - l_z\right)\left(\frac{x}{a}\cos\alpha - \sin\alpha\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + 1}.$$

Das System Σ_1 ist affin zu Σ, und zwar haben beide Systeme die x-Achse als Affinitätsachse, und die y-Ordinaten entsprechender Punkte verhalten sich wie $a : b$.

Durch den Punkt P (Fig. 3), in welchem die Ebene E die z-Achse schneidet, legen wir eine zweite Ebene E' senkrecht zur Sehrichtung. Dieselbe hat vom Mittelpunkt M' der Kugel den Abstand $a \sin \alpha$. Die Ebene E' schneidet das Isophengoidensystem der Kugel in dem Hauptkreissystem Σ', welches zu dem Abstande $\delta = a \sin \alpha$ gehört, und das Isophengoidensystem der Fläche 2. Ordnung in einem Kegelschnittsystem Σ_1'. Unsere Aufgabe ist, Σ_1' auf Grund der uns bekannten Konstruktion von Σ' zu finden. Σ' ist die Zentralprojektion von Σ auf E' und zwar von M' aus, Σ_1' ist die Zentralprojektion von Σ_1 und zwar von M aus ebenfalls auf E'. Ferner sind Σ und Σ_1 affine Systeme, deren Affinitätsachse die x-Achse ist, und deren Affinitätsrichtung, die y-Achse, in unserem besonderen Falle parallel zur Schnittkante der beiden Ebenen E und E' läuft. Denken wir uns daher noch Σ aus M auf E' projiziert, so mufs das neue System Σ_2 in derselben Beziehung zu Σ_1' stehen, wie Σ zu Σ_1, nämlich zu Σ_1' affin sein.

Wir haben daher in der horizontalen Hilfsebene E' und damit auch im Grundrifs folgende Systeme zu unterscheiden:

1. das Hauptkreissystem Σ',
2. das System Σ_2,
3. das System Σ_1', welches zu Σ_2 affin ist, mit der Projektion x_1 der x-Achse als Affinitätsachse und dem Ähnlichkeitsverhältnis $a : b$ in Richtung der zur y-Achse parallelen Affinitätsrichtung.

Da aber Σ' und Σ_2 die Zentralprojektionen eines ebenen Systems Σ von zwei verschiedenen Zentren M' und M aus auf dieselbe Ebene E' sind, so sind sie zu einander zentralkollinear. Das Kollineationszentrum

Digitized by Google

ist der Punkt P, die Kollineationsachse ist die Schnittkante c der Ebenen E und E', also die durch P senkrecht zur x_1-Achse gezogene

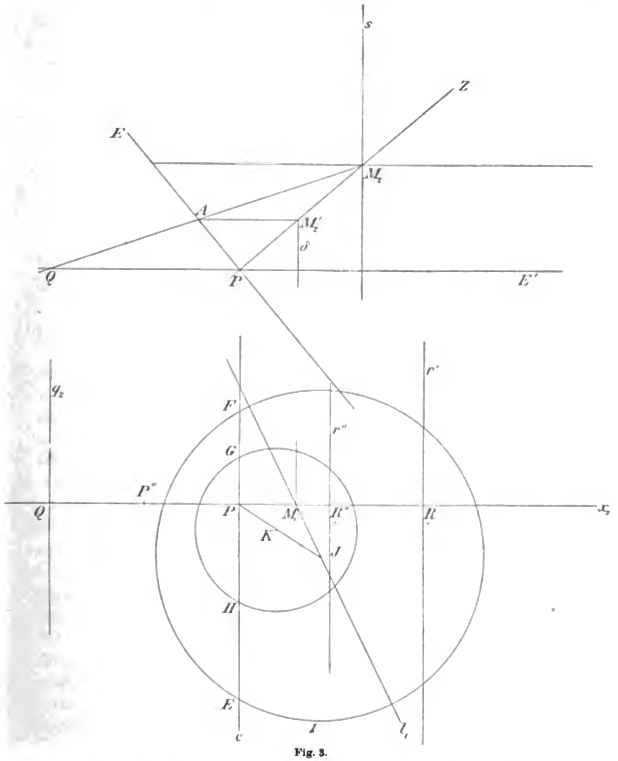


Fig. 3.

Gerade, denn alle Geraden von E', welche durch P gehen, und alle Punkte von E', welche auf c liegen, werden von M und M' aus in dieselben Geraden, bezüglich in dieselben Punkte projiziert. Durch P

Digitized by Google

gehen daher die sich selbst entsprechenden Strahlen, auf c liegen die sich selbst entsprechenden Punkte der Gebilde Σ' und Σ_2. Das Kollineationszentrum liegt auf der Kollineationsachse. Die beiden Gegenachsen haben daher von c gleiche Entfernung und werden folgendermafsen gefunden.

Eine zur vertikalen Spur der Ebene E' durch M_2' gezogene Parallele trifft die vertikale Spur von E in A. Das Bild des Punktes A, vom Projektionszentrum M' aus auf E' entworfen, liegt im Unendlichen, von M aus aber auf x_1 im Punkte Q, dem Schnittpunkt der Geraden M_2A mit E'. Q ist daher ein Punkt der Gegenachse q_2 im System Σ_2. Der zu Q in Bezug auf c symmetrisch liegende Punkt R ist ein Punkt der zweiten Gegenachse r' im System Σ'. Die Gegenachsen q_2 und r' selbst gehen durch Q bezüglich R parallel der Kollineationsachse c. Mit Hilfe der Gebilde P, c, q_2 und r' kann das System Σ_1' aus Σ' gefunden werden, und aus Σ_2 dann das ihm affine Σ_1'.

Die Konstruktion des Kegelschnittsystems Σ_2 läfst sich jedoch umgehen und die Aufgabe sich auf die Konstruktion eines Kreissystems zurückführen, wenn es gelingt, ein dem Σ' ähnliches Kreissystem zu finden, welches mit Σ_1' in kollinearer Lage ist.[1]) Zu dem Zwecke betrachten wir die involutorische Punktreihe, welche als Schnitt der Kollineationsachse c mit den Kreisen von Σ' entsteht, und die Reihe der Mittelpunkte dieser Kreise auf der horizontalen Projektion l_1 der durch den Mittelpunkt der Kugel gezogenen Lichtrichtung. Die Entfernungen aller Punkte der involutorischen Reihe c von der x_1-Achse verändern wir im Verhältnis $a : b$. Wir führen dadurch die Punkte der Geraden c, welche Σ' und Σ_2 gemeinsam sind, in das System Σ_1' über. Die Punkte E und F des Kreises 1 gehen z. B. in G und H über. Um nun einen dem Kreise 1 ähnlichen Kreis zu erhalten, welcher durch G und H geht, und überhaupt ein Σ' ähnliches Kreissystem, welches die neuen Punkte auf c enthält, verbinden wir die Mittelpunkte der Kreise, z. B. I von 1, mit P und verändern auch diese Entfernungen im Verhältnis $a : b$. Um die neuen Endpunkte, z. B. K, als Mittelpunkte werden neue Kreise gezogen, die durch die zugehörigen Punkte, z. B. G und H, der neuen Punktreihe auf c gehen. Die entstandenen Kreise bilden ein Kreissystem Σ'', welches dem alten Σ' ähnlich ist, und zwar ist P das Ähnlichkeitszentrum. Die Mittelpunkte der Kreise von Σ'' liegen auf einer Geraden, die zu l_1 parallel läuft, in einem Abstand von P, der auch aus dem Abstand von l_1 und P durch Veränderung im Verhältnis $a : b$ hervorgeht.

---

1) Burmester: S. 247.

Digitized by Google

Da das Kreissystem Σ'' mit dem von uns gesuchten System Σ_1' die auf c gelegene involutorische Punktreihe entsprechend gemein hat, so sind Σ'' und Σ_1' auch in kollinearer Lage; c ist die Kollineationsachse; es kommt nun noch darauf an, das Kollineationszentrum zu finden. Der Punkt Q des Systems Σ_2 wird im System Σ_1' wieder zu Q, weil er auf der Affinitätsachse liegt, während sein entsprechender Punkt in Σ' unendlich fern ist und auch in dem Σ' ähnlichen System Σ'' unendlich fern bleibt; q_2 ist daher die eine Gegenachse in der kollinearen Beziehung zwischen Σ'' und Σ_1'. Der Punkt R des Systems Σ' rückt beim Übergang zum ähnlichen System Σ'' auf den Ähnlichkeitspunkt P zu nach R'', so dafs die Entfernung PR'' im Verhältnis $a:b$ verändert wird, während sein entsprechender Punkt in Σ_2 im Unendlichen liegt und auch beim Übergang zum affinen System Σ_1' im Unendlichen bleibt. Daher ist die in R zu c gezogene Parallele r'' die zweite dem System Σ'' angehörige Gegenachse. Das Kollineationszentrum P'' liegt auf der Linie PQ ebensoweit von r entfernt, wie c von q''.

Mit Hilfe der Gröfsen c, P'', r und q'' kann aus dem neuen Kreissystem Σ'' das Kegelschnittsystem Σ_1' konstruiert werden.

Die Isophengen unserer Fläche 2. Grades, z. B. eines Ellipsoids, können aber auch gefunden werden, ohne dafs man die Kegelschnitte Σ_1' zu zeichnen braucht. Wir legen durch die Achse des Ellipsoids, welche mit der y-Achse zusammenfällt, einen Ebenenbüschel; dann erhalten wir in der Ebene E' des Systems Σ_1' einen Parallelstrahlbüschel I, dessen sämtliche Strahlen zur Kollineationsachse c parallel laufen, dem daher in Σ'' ebenfalls ein Parallelstrahlbüschel II entspricht, der in Σ'' nach der Konstruktion kollinearer Systeme gefunden wird. Auf den Strahlen des Büschels II erzeugen die Kreise des neuen Kreissystems Σ'' involutorische gerade Gebilde G_{II}. Diese G_{II} projizieren wir von P'' aus auf die entsprechenden Strahlen des Parallelstrahlbüschels I und erhalten so die zur Isophengenkonstruktion dienenden geraden Gebilde G_I; denn verbinden wir die Punkte von G_I durch Gerade t mit dem Flächenmittelpunkt, dann sind die Durchschnittspunkte dieser Geraden t mit der Fläche Punkte O der Isophengen derselben. Da es sich um die Grundrifsisophengen handelt, können die Projektionen O_1 von O im Grundrifs gefunden werden aus den leicht zu konstruierenden Schnittkurven des Ellipsoids mit den durch die y-Achse gelegten Ebenen und den Geraden t_1, welche die Gebilde G_I mit M_1 verbinden. Die Hellepole im besonderen findet man, wenn man bei der Konstruktion anstatt von dem Parallelstrahlbüschel I von dem Parallelstrahlbüschel II ausgeht, und zwar von den Strahlen desselben, die durch die Grenzpunkte des neuen Kreissystems Σ'' hindurchgehen.

Digitized by Google

Die Konstruktion der Aufrifsisophengen fällt bei unserer Annahme unter den schon von Herrn Burmester behandelten Fall, da für den Aufrifs die Sehrichtung mit der y-Achse, also der einen Achse der Fläche parallel läuft. Wäre die xz-Ebene nicht, wie es im Anfang von III. und in den Figuren angenommen ist, mit der Aufrifsebene parallel, so würden in Bezug auf die Grundrifsisophengen die Konstruktion durch eine Drehung um die Sehrichtung auf den behandelten Fall zurück zu führen sein. Die Aufrifsisophengen würden aber schon nach dem folgenden Abschnitt behandelt werden müssen, da bei ihnen die Sehrichtung nicht mehr in der xy-Hauptebene der Fläche liegt.

Der in III. angegebene Konstruktionsweg läfst sich nicht unmittelbar auf den allgemeinen Fall übertragen, da dem Verfahren als wesentliche Voraussetzung zu Grunde liegt, dafs die Affinitätsrichtung der Systeme Σ und Σ_1 zur Schnittkante der Ebenen E und E' parallel läuft, eine Voraussetzung, die nicht mehr erfüllt ist, wenn die Sehrichtung nicht in einer der Hauptebenen liegt.

IV.

Allgemeiner Fall.

Wenn nun Seh- und Lichtrichtung zu den Hauptebenen der Fläche 2. Ordnung ganz beliebig gerichtet sind, nehmen wir vorläufig die Grundrifsebene und Aufrifsebene parallel zu zwei Hauptebenen der Fläche an. Die Seh- und Lichtrichtung können dann in diesen Projektionsebenen aus den Winkeln konstruiert werden, welche sie mit den Hauptachsen bilden. Hat man im Grundrifs und Aufrifs die Isophengen für die gegebene Sehrichtung konstruiert, so kann durch zweimalige Drehung die Sehrichtung senkrecht zur Grundrifsebene gestellt werden; der neue Grundrifs enthält jetzt die Grundrifsisophengen für die verlangte Stellung der Fläche 2. Ordnung zu der Grundrifsebene. Für die Aufrifsisophengen müfste eine entsprechende Konstruktion mit Rücksicht auf die geänderte Sehrichtung ausgeführt werden.

Die Gleichung einer zentrischen Fläche 2. Ordnung in Bezug auf die Hauptachsen als Koordinatenachsen:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - D = 0$$

ergiebt im allgemeinen Falle das Isophengoidensystem:

$$H = \frac{(l_x Ax + l_y By + l_z Cz)\,(s_x Ax + s_y By + s_z Cz)}{(Ax)^2 + (By)^2 + (Cz)^2}.$$

Durch eine senkrecht zur z-Achse im Abstande $-\Delta$ vom Mittelpunkte M

Digitized by Google

gelegte Ebene E wird es in einem Kegelschnittbüschel Σ_1 von der Gleichung:

$$H = \frac{(l_x Ax + l_y By - l_z C\Delta)\,(s_x Ax + s_y By - s_z C\Delta)}{(Ax)^2 + (By)^2 + (C\Delta)^2}$$

geschnitten. Setzt man wieder:

$$\frac{A}{C\Delta} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{B}{C\Delta} = \frac{1}{b},$$

so geht die Gleichung über in:

$$H = \frac{\left(l_x \frac{x}{a} + l_y \frac{y}{b} - l_z\right)\left(s_x \frac{x}{a} + s_y \frac{y}{b} - s_z\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + 1}.$$

Durch Vergleich mit der Gleichung (VI) des Abschnittes II ergiebt sich, wie auch in I. S. 8 bereits geometrisch bewiesen ist, dafs Σ_1 affin ist zu einem Schnittsystem Σ, welches durch die Ebene E aus dem Isophengoidensystem einer Kugel geschnitten ist, deren Mittelpunkt M' auf der z-Achse liegt. Ferner folgt, dafs, wenn ihr Mittelpunkt M' von E den Abstand $\delta = a$ hat, die in der Ebene E durch ihren Schnittpunkt mit der z-Achse zur x-Achse gezogene Parallele die Affinitätsachse, eine zur y-Achse gezogene Parallele die Affinitätsrichtung ist, und dafs das Ähnlichkeitsverhältnis in Richtung der y-Achse den Betrag $a : b$ hat.

Es soll nun gezeigt werden, wie man Σ_1 unter Umgehung des Systems Σ aus einem Kreisbüschel konstruieren kann.

Zu dem Zwecke legen wir durch den Punkt P, in welchem die Sehrichtung die horizontale Hilfsebene E schneidet, eine Ebene E' senkrecht zur Sehrichtung. Die Ebenen E und E' schneiden sich in einer Geraden c, welche durch P geht, und deren Grundrifsprojektion, die mit c selbst parallel läuft und die wir auch einfach mit c bezeichnen wollen, auf der Grundrifsprojektion s_1 oder durch den Mittelpunkt M' der Kugel gelegten Sehrichtung senkrecht steht. Die Ebene E' schneidet das Isophengoidensystem der Kugel in einem Hauptkreissystem Σ', welches durch Drehung der Ebene E' um c in die Ebene E umgelegt werden kann.

Es soll zunächst die Konstruktion der Gebilde angegeben werden, durch welche das umgelegte Hauptkreissystem Σ' bestimmt ist. Für die Konstruktion des Hauptkreissystems in der Ebene E' sind nach II. S. 10 erforderlich:

1. Die Projektion des Kugelmittelpunktes M' auf die Ebene E', d. i. der Punkt P.

Digitized by Google

2. Der Abstand δ des Mittelpunktes M' von E', d. i. die Strecke $M'P$. Sie wird aus P und den Projektionen M_1' und M_2' von M' gefunden.

3. Die Projektion $l_{E'}$ der durch M' gehenden Lichtrichtung auf E'. Da ein Punkt von $l_{E'}$ der Punkt P sein mufs, und ein zweiter Punkt als Schnittpunkt von $l_{E'}$ und E' aus den Projektionen l_1 und l_2 von l und den Spuren von E' mit den Koordinatenebenen gefunden werden kann, so ist $l_{E'}$ in E' bekannt.

4. Der Winkel ν, den die Lichtrichtung l mit der Ebene E' bildet. Er ergiebt sich aus dem Winkel, den Sehrichtung s und Lichtrichtung l miteinander einschliefsen.

Bei der Umlegung der Ebene E' um c in E bleibt der Punkt P in seiner alten Lage, die umgelegte Linie l_E kann aus den Projektionen von $l_{E'}$ in bekannter Weise erfolgen. Daher kann das umgelegte Hauptkreissystem Σ' in der Ebene E und daher auch im Grundrifs aus P, l_E, $M'P = \delta$ und ν nach Abschnitt II gefunden werden.

Da nun Σ' der Schein von Σ war, so mufs es auch nach dem Umlegen mit Σ in kollinearer Lage bleiben, und zwar in Bezug auf die Schnittgerade c von E und E' als Kollineationsachse. Um das Kollineationszentrum zu finden, drehen wir die durch den Mittelpunkt M' der Kugel und die Sehrichtung s zur Grundrifsebene senkrecht gelegte Ebene um s in die Ebene E (Fig. 5). Der hierbei mitgedrehte Mittelpunkt M' der Kugel wird dadurch erhalten, dafs das zur Grundrifsprojektion s_1 errichtete Lot $M'M_1' = \delta = M_2'N$ gleich dem Abstand des Punktes M' von E gemacht wird. $M'P$ ist dann die umgelegte Sehrichtung. Die in M' zu $M'P$ errichtete Senkrechte schneidet s_1 in Q, einem Punkte der einen Gegenachse q, welche im System Σ den unendlichen fernen Punkten von Σ' entspricht. Der um Q mit QM' geschlagene Kreis schneidet s_1 im Punkte C, dem Kollineationszentrum der Systeme Σ und Σ', die jetzt beide in E liegen. Der Punkt R' der zweiten Gegenachse r' wird gefunden, indem man $PR = QC$ macht; r' und q selbst werden durch R' und Q zu c parallel gezogen. Mit Hilfe von c, C, r' und q kann das Kegelschnittsystem Σ aus dem Kreisbüschel Σ'' konstruiert werden und dann aus Σ das ihm affine Σ_1.

Statt nun aus Σ' erst Σ zu finden, bilden wir wieder ein zu Σ' ähnliches Kreissystem Σ'', das zu Σ_1 in kollinearer Lage ist (Fig. 4). Die Gerade c der Systeme Σ und Σ' geht im System Σ in eine Gerade c_1 über, die mit c den Schnittpunkt D mit der x-Achse gemeinschaftlich hat und durch einen Punkt P_1 geht, der gegen P in der Affinitätsrichtung parallel der y-Achse im Verhältnis $a : b$ ver-

Digitized by Google

schoben ist. Dabei werden auf die Gerade c_1 durch Geraden parallel zur y-Achse alle Punkte der involutorischen Punktreihe projiziert, in welcher c das Hauptkreissystem Σ' schneidet. Die neue Punktreihe auf c_1 ist der alten auf c in Bezug auf das Ähnlichkeitszentrum D ähnlich, aber zugleich um den Winkel $P''DP = \varepsilon$ gedreht. Wir haben jetzt die Aufgabe, das ganze Kreissystem Σ' in ein in Bezug auf denselben Ähnlichkeitspunkt D ähnliches zu verwandeln und gleichzeitig um D zu drehen. Deshalb fällen wir von D auf l_E, welches die Mittelpunkte von Σ' enthält, ein Lot DF, drehen das Lot und l_E um D um den Winkel ε und verkürzen das Lot im Verhältnis $DP : DP''$. Dann errichten wir im neuen Endpunkt F'' zu DF'' ein Lot l'' und über-

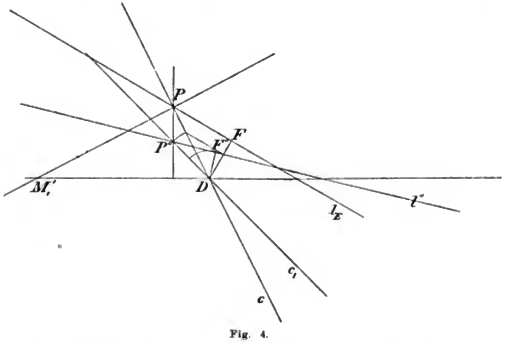


Fig. 4.

tragen in demselben Verkürzungsverhältnis $DP : DP''$ die auf l_E gelegene Punktreihe der Mittelpunkte von Σ' auf l''. Aus den neuen Mittelpunkten und den zugehörigen auf c_1 gelegenen Sehnen kann das Kreissystem konstruiert werden. Das System Σ'' kann aber auch so gefunden werden, dafs man vom Hauptkreissystem Σ' nur P, l_E, den Abstand $M'P = \delta$ und den Winkel ν konstruiert, hieraus P'', l'' und den im Verhältnis $DP : DP''$ verkürzten Abstand δ'' und dann aus P'', l'', ν und δ'' nach Abschnitt II den Kreisbüschel Σ''. Σ'' ist Σ' ähnlich, aber gleichzeitig mit Σ_1 zentralkollinear, denn er hat mit Σ_1 das involutorische Gebilde c_1 entsprechend gemein. c_1 ist die Kollineationsachse der Systeme Σ'' und Σ_1. Der Punkt Q (Fig. 5) der Gegenachse q im System Σ wird durch Verkürzen seiner Ordinate im Verhältnis $a : b$ zum Punkte Q_1, die Gerade q zu einer der aus c ent-

Digitized by Google

standenen Geraden c_1 parallelen Geraden q_1. q_1 bleibt aber die Gegenachse in der zentralkollinearen Beziehung der Systeme Σ_1 und Σ'', da die unendlich fernen Elemente von Σ' auch in Σ'' unendlich fern bleiben. Die zweite Gegenachse r'' dieser kollinearen Beziehung er-

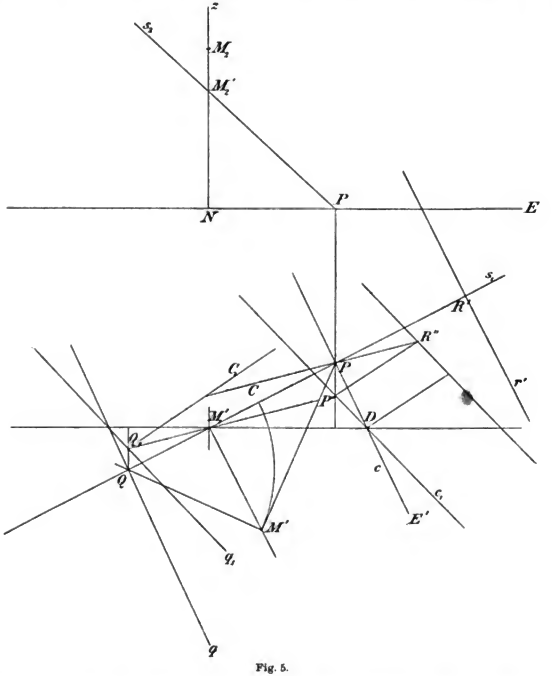


Fig. 5.

giebt sich, indem man R' und r' den Übergang von Σ' zu Σ'' machen läfst; dabei wird r'' ebenfalls parallel zu c_1 (S. 21). Da die Gerade r' in Σ' den unendlichen fernen Punkten von Σ entsprach und diese beim Übergang zum affinen System Σ_1 auch unendlich fern bleiben, so ist r'' in der That in Σ'' das Bild der unendlich fernen Punkte

Digitized by Google

von Σ_1. Aus P'', R'' und Q_1 ergiebt sich in bekannter Weise als Eckpunkt eines Parallelogramms das neue Kollineationszentrum C_1.

Legen wir nun durch die y-Achse der Fläche 2. Grades, etwa des Ellipsoids, einen Ebenenbüschel, dann erhalten wir in der Ebene ε einen Parallelstrahlbüschel I, den wir als zum System Σ_1 gehörig betrachten können, dem aber im System Σ'' ein Strahlenbüschel II entspricht, dessen Mittelpunkt S in der Gegenachse r'' liegt und leicht konstruiert werden kann. Auf den Strahlen G'' dieses Büschels erzeugt das Kreissystem Σ'' involutorische gerade Gebilde. Diese projizieren wir von C_1 aus auf die entsprechenden Strahlen G' des Parallelstrahlenbüschels I und erhalten so die involutorischen Punktreihen, welche zur Isophengenkonstruktion dienen. Jede Ebene des Ebenenbüschels durch die y-Achse erzeugt mit dem Ellipsoid eine Ellipse, die im Aufriſs als gerade Linie e_2 erscheint und die im Grundriſs als Ellipse e_1 aus ihren Achsen leicht konstruiert werden kann. Die Schnittpunkte der Grundriſsellipse e_1 mit dem Strahlenbüschel, welcher die Grundriſsprojektion M_1 des Mittelpunktes M des Ellipsoids mit der involutorischen Punktreihe auf G' verbindet, sind die Isophengenpunkte im Grundriſs. Die Isophengenpunkte können in den Aufriſs übertragen werden, und dann kann, wie im Anfang des Abschnittes IV angegeben ist, das endgültige Bild der Grundriſsisophengen durch zweimalige Drehung der Projektionsebene erhalten werden.

Über die Art und Weise, wie bei einem Hyperboloid mit reellen Geraden die Konstruktion geändert werden könnte, läſst sich dasselbe sagen, was Herr Burmester angeführt hat.[1])

Die (IV) Abschnitt II aufgestellte Gleichung eines allgemeinen Isophengensystems eines Paraboloids lehrt, daſs die Grundriſsprojektionen der Isophengen desselben auf eine zu seiner Achse senkrechte Ebene mit dem S. 20 betrachteten Schnittsystem kongruent ist, wenn $C\Delta = D$ ist und daher wie dieses konstruiert werden können. Da dann die Leitkurven der zylindrischen Isophengoiden bekannt sind, kann die Konstruktion der Isophengen durch irgend welche bequeme Schnittsysteme erfolgen.

Die angestellte Untersuchung zeigt also, daſs die allgemeine Isophengenkonstruktion der Flächen 2. Ordnung in der That auf die Herstellung eines Kreisbüschels und auf die Konstruktion von Achsenschnitten der Flächen zurückgeführt werden kann. Die Konstruktion fällt aber erheblich verwickelter aus, als bei den Isophoten. Daſs bei Herrn Burmester die Aufstellung des Isophengensystems eigentlich einfacher ist als die des Isophotensystems, beruht darauf, daſs die Sehrichtung mit einer Hauptachse der Fläche zusammenfällt.

1) Burmester: l. c. S. 251.

Digitized by Google

Über die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien.

Von B. Oster in Mannheim.

Bei der Entwickelung der in der Lebensversicherungsmathematik auftretenden Formeln für die Nettoprämien, d. h. die um Sicherheitszuschlag und Verwaltungskostenbeitrag verminderten Tarif- (Brutto-) prämien, geht man bekanntlich von der Bestimmung aus, dafs die sämtlichen nach derselben Versicherungsart und mit der gleichen Summe versicherten Personen eines bestimmten Alters denselben Versicherungsbeitrag zu entrichten haben. Diese Bestimmung der „Durchschnittsmethode" wird nun in den gebräuchlichen Lehrbüchern bei der Herleitung der Prämienformeln in der Weise durchgeführt, dafs die zukünftigen Leistungen der Lebenden eines Alters an die Lebensversicherungsgesellschaft mit den zukünftigen Leistungen der letzteren an die Versicherten — beide Beträge auf die Gegenwart abgezinst — bilanziert werden und durch Division mit der Anzahl der Lebenden der gegenwärtige Wert der Leistung des Einzelnen festgestellt wird. Ist z. B. die einmalige Einzahlung $\mathfrak{a}_x$ zu ermitteln, die erforderlich ist, um einer x-jährigen Person eine sofort beginnende lebenslängliche Leibrente vom jährlichen Betrage 1 zu sichern, so setzt man

$$l_x \mathfrak{a}_x = l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \cdots,$$

wo l_k die Anzahl der Lebenden des Alters k nach der Sterblichkeitstafel der Gesellschaft und $r = 1 + \frac{p}{100}$ den Aufzinsungsfaktor für den Zinsfufs $p\,\%$, den Rechnungszinsfufs der Gesellschaft, bezeichnet.[1]) Aus dieser Gleichung folgt

$$\mathfrak{a}_x = \frac{l_x + \frac{l_{x+1}}{r} + \frac{l_{x+2}}{r^2} + \cdots}{l_x} = \frac{\frac{l_x}{r^x} + \frac{l_{x+1}}{r^{x+1}} + \frac{l_{x+2}}{r^{x+2}} + \cdots}{\frac{l_x}{r^x}}$$

$$= \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots}{D_x} = \frac{\Sigma D_x}{D_x}.$$

1) Die Bezeichnungen sind in der Hauptsache mit der auf den drei internationalen Kongressen der Versicherungsmathematiker zu Brüssel (1896), London (1899) und Paris (1900) vereinbarten „allgemeinen Bezeichnungsweise" in Übereinstimmung.

Digitized by Google

In dieser Endformel ist die Summation von dem Altersjahr x bis zu dem letzten Altersjahr zu erstrecken, dem nach der Angabe der benutzten Sterblichkeitstafel noch Lebende zugehören. Die Formel drückt die Werte der lebenslänglichen Renten durch die Zahlen $D_k = \frac{l_k}{r^k}$, die „diskontierten Zahlen der Lebenden des Alters k“, und deren Summen aus und ermöglicht damit die Berechnung einer ausführlichen Rententafel nach der von Tetens[1]) gegen Ende des 18. Jahrhunderts erfundenen „Kolumnarmethode“.

Das soeben geschilderte Verfahren der Prämienberechnung trägt einen rein synthetischen Charakter. Für den Anfänger und den elementaren Unterricht ist es allerdings unentbehrlich; bei tieferem Eindringen wird sich aber das Bedürfnis nach einer analytischen Entwickelung geltend machen, bei der aus dem Wesen der in Betracht kommenden Versicherungsart eine allgemeine Eigenschaft der gesuchten Prämie hergeleitet und erst die diese Eigenschaft darstellende Relation der mathematischen Behandlung unterworfen wird. Eine solche analytische Methode bietet sich ganz leicht und ungezwungen dar und soll im folgenden an einigen der einfachsten Beispiele auseinandergesetzt werden.

1. *Sofort beginnende lebenslängliche Leibrente mit einmaliger Prämienzahlung. — a) Jährlich zahlbare Rente.* Einmalige Prämie: $\mathfrak{a}_x$.

Nach der Definition der Rente soll zu Beginn jeden Jahres an die noch Lebenden der Rentenbetrag aus der Kasse der Versicherungsbank gezahlt werden. Ist daher 1 der Betrag der Rente, so mufs an die l_x eintretenden Mitglieder des Alters x sofort der Betrag $l_x \cdot 1$ gezahlt werden, und mithin verbleibt von der Gesamteinzahlung $l_x\mathfrak{a}_x$ nur der Betrag $l_x\mathfrak{a}_x - l_x$. Würden nach einem Jahre, wo sich durch die Verzinsung dieser Betrag auf $(l_x\mathfrak{a}_x - l_x)r$ erhöht hat, die l_{x+1} noch Lebenden eine sofort beginnende Rente des Betrages 1 kaufen, so hätten sie $l_{x+1}\mathfrak{a}_{x+1}$ einzuzahlen, und genau soviel mufs daher alsdann die Bank für die Überlebenden ihrer l_x Mitglieder vorrätig haben. Mithin mufs

$$(l_x\mathfrak{a}_x - l_x)r = l_{x+1}\mathfrak{a}_{x+1}$$

sein. Hiermit ist aber eine Beziehung zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rentenwerten, also eine Differenzengleichung für $\mathfrak{a}_x$, gewonnen.[2])

1) Vergl. Grosse: Abrifs einer Geschichte der Lebensversicherungstechnik in Deutschland. Vereins-Blatt für Deutsches Versicherungswesen, 29. Jahrgang (Berlin 1901), S. 165.

2) Vergl. Zillmer: Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- und Renten-Versicherungen (Berlin 1887), S. 26.

Digitized by Google

Nun hat bekanntlich eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung $y_{x+1} - F_x y_x = -G_x$ folgende Lösung:

$$y_x = y_0 \Pi_x - \Pi_x \cdot \sum_{k=0}^{x-1} \frac{G_k}{\Pi_{k+1}},$$

wo y_0 der den Vorschriften des Problems entsprechend zu wählende Anfangswert von y_x und $\Pi_x = F_0 F_1 \cdots F_{x-1}$ ist. Im vorliegenden Falle, wo die Gleichung die Form[1])

$$\mathfrak{a}_{x+1} - \frac{l_x r}{l_{x+1}} \mathfrak{a}_x = -\frac{l_x r}{l_{x+1}}$$

hat, ergiebt sich

$$\Pi_x = \frac{l_0 l_1 \cdots l_{x-1}}{l_1 l_2 \cdots l_x} r^x = \frac{l_0}{l_x} r^x,$$

folglich

$$\mathfrak{a}_x = \frac{\mathfrak{a}_0 l_0 r^x}{l_x} - \frac{r^x}{l_x} \sum_{k=0}^{x-1} \frac{l_k}{r^k}.$$

Der Wert der Größe $\mathfrak{a}_0 l_0$ läßt sich leicht bestimmen. Es sei ω das letzte Altersjahr der Sterblichkeitstafel, in dem noch eine Rente gezahlt wird, also $l_{\omega+1} = 0$. Wegen der selbstverständlichen Beziehung $\mathfrak{a}_\omega = 1$ folgt aus der letzten Gleichung für $x = \omega$:

$$l_\omega = \mathfrak{a}_0 l_0 r^\omega - r^\omega \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{l_k}{r^k},$$

mithin

$$\mathfrak{a}_0 l_0 = \sum_{k=0}^{\omega-1} \frac{l_k}{r^k} + \frac{l_\omega}{r^\omega} = \sum_{k=0}^{\omega} \frac{l_k}{r^k}.$$

Es ergiebt sich daher

$$\mathfrak{a}_x = \frac{r^x}{l_x} \left(\sum_{k=0}^{\omega} \frac{l_k}{r^k} - \sum_{k=0}^{x-1} \frac{l_k}{r^k} \right) = \frac{r^x}{l_x} \sum_{k=x}^{\omega} \frac{l_k}{r^k}$$

oder endlich, mit Anwendung der diskontierten Zahlen und der üblichen Bezeichnung:

$$\mathfrak{a}_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x}.$$

Zu derselben Formel kann man durch Auflösung der Differenzen-

1) Derartige Beziehungen sind schon deshalb von Interesse, weil sie sich zur Kontrolle der Nettoprämientafeln eignen.

Digitized by Google

gleichungen höherer Ordnung gelangen, denen $\mathfrak{a}_x$ genügt und die man auf analoge Weise erhält. Man findet z. B.

$$l_x\mathfrak{a}_x - l_x - \frac{l_{x+1}}{r} = \frac{l_{x+2}\mathfrak{a}_{x+2}}{r^2}$$

und allgemein

$$l_x\mathfrak{a}_x - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{l_{x+k}}{r^k} = \frac{l_{x+m}\mathfrak{a}_{x+m}}{r^m} \qquad (m > 1)$$

oder

$$\mathfrak{a}_{x+m} - \frac{l_x r^m}{l_{x+m}}\mathfrak{a}_x = -\sum_{k=1}^{m}\frac{l_{x+m-k}}{l_{x+m}}r^k.$$

Setzt man hierin $m = \omega - x$, wo ω die oben angegebene Bedeutung hat, so erhält man nach einigen Umformungen

$$\mathfrak{a}_x = \frac{1}{l_x r^{\omega-x}}(l_\omega + l_{\omega-1}r + \cdots + l_x r^{\omega-x}) = \frac{\Sigma D_x}{D_x},$$

wie vorher.

b) Kontinuierliche Rente. Mit $\bar{\mathfrak{a}}_x$ werde die sofort beginnende, kontinuierlich zahlbare Rente vom Betrage 1 für das Eintrittsalter x bezeichnet; es sei ferner $l_k = f(k)$ die Anzahl der Lebenden des Alters k, wobei $f(k)$ als eine differentiierbare Funktion des Argumentes vorauszusetzen ist. Man gelangt auf dem unter *a)* eingeschlagenen Wege zu der Differentialgleichung

$$(l_x\bar{\mathfrak{a}}_x - l_x dx)r^{dx} = l_{x+dx}\bar{\mathfrak{a}}_{x+dx},$$

die zu den weiteren führt:

$$(l_x\bar{\mathfrak{a}}_x - l_x dx)(1 + \log r \cdot dx + \cdots) = (l_x + l_x' dx + \cdots)(\bar{\mathfrak{a}}_x + \bar{\mathfrak{a}}_x' dx + \cdots),$$

$$\frac{d\bar{\mathfrak{a}}_x}{dx} + \left(\frac{l_x'}{l_x} - \log r\right)\bar{\mathfrak{a}}_x = -1,$$

$$\frac{d\bar{\mathfrak{a}}_x}{dx} + \frac{d}{dx}\left(\log\frac{l_x}{r^x}\right)\bar{\mathfrak{a}}_x = -1.$$

Das allgemeine Integral dieser linearen Differentialgleichung erster Ordnung lautet, wenn K eine willkürliche Konstante bezeichnet:

$$\bar{\mathfrak{a}}_x = \frac{r^x}{l_x}\left(K - \int_0^x \frac{l_z}{r^z}dz\right).$$

Digitized by Google

Für $x = \infty$ wird aber $l_\infty = 0$, $\bar{a}_\infty = 0$, also $K = \int_0^\infty \frac{l_z}{r^z} dz$ und

$$\bar{a}_x = \frac{r^x}{l_x} \int_x^\infty \frac{l_z}{r^z} dz,$$

oder, unter Einführung der Bezeichnung $\frac{l_z}{r^z} = D_z$:

$$\bar{a}_x = \frac{1}{D_x} \int_x^\infty D_z dz.$$

2. *Einfache Kapitalversicherung auf den Todesfall mit einmaliger Prämienzahlung. — a) Zahlung der Versicherungssumme am Ende des Sterbejahres.*

Am Ende jeden Jahres soll die Bank an die Erben der im Laufe des Jahres Gestorbenen den Betrag 1 zahlen. Es ist die Prämie für diese Versicherung zu berechnen.

Es sei $l_x - l_{x+1} = d_{x+1}$ die Zahl der im Alter von x Jahren Sterbenden und $\frac{d_x}{r^{x+1}} = C_x$ die „diskontierte Zahl der Gestorbenen für das Alter x", ferner A_x die gesuchte einmalige Prämie. Von den l_x eintretenden Personen, deren Gesamteinzahlung $l_x A_x$ beträgt, sterben im Laufe des ersten Jahres $l_x - l_{x+1}$ Personen, und für diese ist am Ende des Jahres der Betrag $l_x - l_{x+1}$ auszuzahlen. Nach Verzinsung der Einlagen und Abzug der Sterbefallzahlungen verbleibt am Ende des Jahres der Betrag $l_x A_x r - (l_x - l_{x+1})$ in der Kasse, und aus diesem sind die sämtlichen zukünftigen Zahlungen für die übrig bleibenden l_{x+1} Mitglieder zu decken. Jener Betrag mufs mithin gleich der Gesamteinzahlung $l_{x+1} A_{x+1}$ der im Alter von $x+1$ Jahren neu eintretenden l_{x+1} Personen, d. h. es mufs $l_{x+1} A_{x+1} = l_x A_x r - (l_x - l_{x+1})$ sein. Für diese Differenzengleichung, die in der Form

$$A_{x+1} - \frac{l_x r}{l_{x+1}} A_x = -\frac{l_x - l_{x+1}}{l_{x+1}}$$

geschrieben werde, ist wieder $\Pi_x = \frac{l_0}{l_x} r^x$, und folglich lautet ihre Lösung:

$$A_x = \frac{A_0 l_0}{D_x} - \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{x-1} C_k.$$

Digitized by Google

Für $x = \omega + 1$ ist aber $A_{\omega+1} = 0$; also hat man

$$A_0 l_0 = \sum_{k=0}^{\omega} C_k \quad \text{und} \quad A_x = \frac{\sum_{k=x}^{\omega} C_k}{D_x} = \frac{\Sigma C_x}{D_x},$$

woraus man leicht die in der Praxis gebräuchlichere Form

$$A_x = 1 - \frac{r-1}{r}\frac{\Sigma D_x}{D_x} = 1 - \frac{r-1}{r}\mathfrak{a}_x$$

erhält.

b) Sofortige Zahlung der Sterbefallsumme. Mit $\bar{A}_x$ werde die einmalige Prämie derselben Versicherung für den Fall bezeichnet, dafs die Sterbefallsumme sofort nach dem Tode des Versicherten ausgezahlt wird. Es sei wieder $f(k) = l_k$ die Funktion, welche für jeden Moment die Anzahl der Lebenden angiebt. Zur Bestimmung von $\bar{A}_x$ findet man alsdann die Beziehung

$$l_{x+dx}\bar{A}_{x+dx} = l_x\bar{A}_x r^{dx} - (l_x - l_{x+dx}),$$

aus der folgt:

$$(l_x + l_x' dx + \cdots)(\bar{A}_x + \bar{A}_x' dx + \cdots) = l_x\bar{A}_x(1 + \log r \cdot dx + \cdots) + (l_x' dx + \cdots),$$

$$\frac{d(l_x\bar{A}_x)}{dx} - l_x\bar{A}_x \log r = l_x'.$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung ergiebt sich

$$l_x\bar{A}_x = r^x\left(-\int_0^x \frac{l_z'}{r^z}dz + K\right), \qquad \bar{A}_x = \frac{1}{D_x}\left(-\int_0^x \frac{l_z'}{r^z}dz + K\right).$$

Nun wird $\bar{A}_\infty = 0$ für $x = \infty$, also

$$K = \int_0^\infty \frac{l_z'}{r^z}dz,$$

und endlich

$$\bar{A}_x = \frac{1}{D_x}\int_x^\infty \frac{l_z'}{r^z}dz,$$

woraus durch partielle Integration

$$\bar{A}_x = 1 - \log r \cdot \bar{\mathfrak{a}}_x$$

abgeleitet werden kann.

Digitized by Google

3. In ähnlicher Weise gelangt man bei Versicherungsarten, bei denen die Leistung der Lebensversicherungsgesellschaft von dem Leben mehrerer Personen abhängig ist (z. B. bei der Versicherung einer Witwen- oder Waisenpension, eines Kapitals auf das kürzeste oder längste von mehreren Leben u. s. w.), zu partiellen Differenzen- und Differentialgleichungen. Hierauf braucht aber nicht mehr näher eingegangen zu werden.

Es werde nur noch darauf hingewiesen, dafs bei Benutzung der im Vorstehenden dargestellten Methode die diskontierten Zahlen D_k und C_k, welche die Grundelemente aller Prämienformeln bilden, auf natürlichere Weise in die Rechnung eintreten als bei der üblichen synthetischen Methode, und dafs ferner bei der Berechnung von Prämien für kontinuierliche Leistungen der Versicherungsgesellschaft die sonst unvermeidlichen und nicht immer unbedenklichen Grenzprozesse in ein elementareres Gebiet verlegt werden.

Leipzig, 1901.

Ein bemerkenswertes Pentagonikositetraeder.

Von WILHELM THIENEMANN in Essen (Ruhr).

Man bezeichne auf einem Hexakisoktaeder die einzelnen Flächen abwechselnd mit dunkler und mit heller Farbe, so dafs nie zwei gleichartig gefärbte Flächen in einer Kante zusammenstofsen. Sodann lasse man die Flächen der einen Art, beispielsweise die dunkeln, wachsen bis zur gegenseitigen Durchdringung. Auf diese Art entsteht das Pentagonikositetraeder (abgekürzt: P.-I.), der einzige plagiëdrisch-hemiëdrische Körper des regulären Krystallsystems, welcher sich in seiner äufseren Gestalt von den vollflächigen Formen unterscheidet. Das P.-I. wird von 24 Fünfecken begrenzt. Die krystallographischen Hauptachsen endigen in solchen sechs Ecken, in denen jedesmal vier Fünfecke zusammenstofsen. Nach der üblichen Bezeichnungsweise ist die auf den Beschauer zulaufende Achse als erste, die querlaufende als zweite, die senkrechte als dritte zu denken. Der erste Oktant liegt vor dem Beschauer rechts oben. Das erste Fünfeck liegt gröfstenteils im ersten Oktanten und trifft die erste Achse im Achsenendpunkt. Die fünf Kanten dieses Fünfecks werden mit α, β, γ, δ, ε bezeichnet, indem wir die Kanten im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers aufeinander folgen lassen und mit α diejenige Kante bezeichnen, die vom Achsen-

Digitized by Google

endpunkt der ersten Achse nach rechts oben verläuft. Bei Betrachtung des P.-I.s finden wir, dafs die Kante α des einen Fünfecks identisch ist mit der Kante ε des benachbarten; ein gleiches Resultat ergiebt sich für die Kanten β und γ. Demnach besitzt das P.-I. nur dreierlei verschiedene Kanten. Senkrecht über dem Mittelpunkte jeder Fläche des einbeschriebenen Oktaeders befindet sich eine Ecke, in der drei gleich lange Kanten $\beta = \gamma$ zusammenstofsen. Ferner befinden sich in jedem Oktanten drei Ecken, in denen drei verschiedene Kanten α, β, δ zusammentreffen.

Das zu behandelnde Problem: Es sollen alle P.-I. gefunden werden, welche Kanten von *zweierlei* Art besitzen, und bei welchen das Fünfeck aus einem Rhombus mit angesetztem gleichschenkligen Dreieck besteht.

Aus dem Wortlaut der gestellten Aufgabe folgt sofort, dafs entweder die Kanten α und ε, oder die Kanten β und γ Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks sind. Demnach mufs die Kante δ jedesmal Seitenlinie des Rhombus sein; es mufs also im ersten Falle sein $\delta \parallel \beta$, im zweiten Falle $\delta \parallel \alpha$. Im Falle I ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks, welche hier stets der Kombinationskante von Würfelfläche und P.-I.-Fläche parallel ist, als Seite des Rhombus auch der Kante γ parallel. Im Falle II ist die Basis des gleichschenkligen Dreiecks, welche hier stets der Kombinationskante von Oktaederfläche und P.-I.-Fläche parallel ist, als Seite des Rhombus auch der Kante ε parallel. Das zu behandelnde Problem zerfällt mithin in zwei Aufgaben:

I. Alle P.-I. zu finden, bei welchen die Kanten δ parallel den Kanten β sind, und bei welchen zugleich die Kombinationskanten von Würfel und P.-I. den Kanten γ parallel sind.

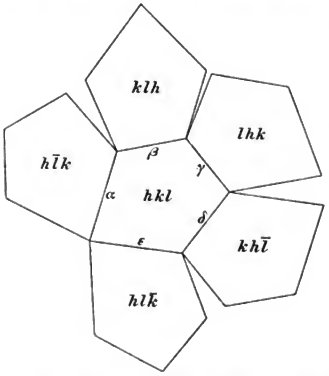
II. Alle P.-I. zu finden, bei welchen die Kanten δ parallel den Kanten α sind, und bei welchen zugleich die Kombinationskanten von Oktaeder und P.-I. den Kanten ε parallel sind.

Zur Lösung dieser beiden Aufgaben ist es notwendig, die Begriffe „Indices einer Fläche“ sowie „Indices einer Kante“ festzustellen.

1. *Die Indices einer Fläche.* — Der Schnittpunkt der drei krystallographischen Hauptachsen sei O. Die erste Fläche des P.-I.s möge auf der zulaufenden Achse den Abschnitt $OH_1 = 1 : h$ bilden; der Abschnitt auf der querlaufenden Achse sei $OH_2 = 1 : k$, derjenige auf der senkrechten Achse sei $OH_3 = 1 : l$. Hierbei ist $h > k > l$. Man nennt die drei Zahlen h, k, l die Indices dieser Fläche. Das Zeichen (hkl) nennt man das Symbol der betreffenden Fläche. Bei Beschreibung von Krystallen kommt es nicht auf die Bestimmung der Längen von Kanten oder der Gröfse von Flächen an, sondern auf die Bestimmung

Digitized by Google

der gegenseitigen Lage von Kanten und Flächen. Deshalb ist es auch unwesentlich, die absolute Größe der Zahlen h, k und l zu ermitteln, man braucht nur die Verhältnisse $h : k : l$ festzustellen. Es ist aber aus der Krystallographie bekannt, daſs diese Verhältnisse stets rationale Werte haben, und zwar lassen sich, wie bereits Hauy erkannt hat, stets drei nicht allzu groſse ganze Zahlen h, k, l finden, welche die Indices einer beliebigen Krystallfläche darstellen. Es ist dies das Gesetz der einfachen rationalen Indices in der Krystallographie. In nebenstehender Figur ist die Fläche (hkl) mit ihren fünf benachbarten Flächen in einer Ebene gezeichnet. Hierbei bedeutet $\overline{k} = -k$, $\overline{l} = -l$.



2. *Die Indices einer Kante.* — Eine Gerade möge drei Achsen, welche den drei krystallographischen Hauptachsen parallel sind, in einem gemeinschaftlichen Scheitelpunkt S durchschneiden. Auf dieser Geraden liege ein Punkt P in der Entfernung r von S. Die Projektionen der Strecke r auf die drei Achsen seien η, $\varkappa$, λ. Man nennt die drei Zahlen η, $\varkappa$, λ die Indices dieser Geraden, das Zeichen $(\eta\varkappa\lambda)$ nennt man das Symbol jener Geraden. Die Indices η, $\varkappa$, λ einer Kante, welche Durchschnittslinie zweier Flächen (hkl) und $(h'k'l')$ ist, genügen folgender Proportion:

$$\eta : \varkappa : \lambda = \begin{vmatrix} k & l \\ k' & l' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} l & h \\ l' & h' \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} h & k \\ h' & k' \end{vmatrix}.$$

(Vergl. Liebisch, Geometr. Krystallogr. Kap. III, § 1.)

Bei Betrachtung obiger Figur ergiebt sich:

Kante α liegt in den Flächen (hkl) und $(h\bar{l}k)$,
„ β „ „ „ „ (hkl) „ (klh),
„ γ „ „ „ „ (hkl) „ (lhk),
„ δ „ „ „ „ (hkl) „ $(kh\bar{l})$,
„ ε „ „ „ „ (hkl) „ $(hl\bar{k})$.

Digitized by Google

Hieraus folgt:

$$(1)\quad\begin{cases}\text{Für die Kante } \alpha:\\ \quad \eta:\varkappa:\lambda=\begin{vmatrix}k&l\\ \overline{l}&k\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}l&h\\ k&h\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}h&k\\ h&\overline{l}\end{vmatrix}=(k^2+l^2):(l-k)h:-h(l+k).\\ \text{Für die Kante } \beta:\\ \quad \eta:\varkappa:\lambda=\begin{vmatrix}k&l\\ l&h\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}l&h\\ h&k\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}h&k\\ k&l\end{vmatrix}=(kh-l^2):(kl-h^2):(lh-k^2).\\ \text{Für die Kante } \gamma:\\ \quad \eta:\varkappa:\lambda=\begin{vmatrix}h&l\\ h&k\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}l&h\\ k&l\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}h&k\\ l&h\end{vmatrix}=(k^2-lh):(l^2-hk):(h^2-kl).\\ \text{Für die Kante } \delta:\\ \quad \eta:\varkappa:\lambda=\begin{vmatrix}k&l\\ h&\overline{l}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}l&h\\ \overline{l}&k\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}h&k\\ k&h\end{vmatrix}=-l:+l:(h-k).\\ \text{Für die Kante } \varepsilon:\\ \quad \eta:\varkappa:\lambda=\begin{vmatrix}k&l\\ l&\overline{k}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}l&h\\ \overline{k}&h\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}h&k\\ h&l\end{vmatrix}=-(k^2+l^2):(l+k)h:h(l-k).\end{cases}$$

Sollen zwei Kanten $(\eta\varkappa\lambda)$ und $(\eta'\varkappa'\lambda')$ einander parallel sein, so mufs die Proportion bestehen:

$$\frac{\eta}{\eta'}=\frac{\varkappa}{\varkappa'}=\frac{\lambda}{\lambda'}.$$

3. *Behandlung von Aufgabe* I. — Nach diesen Vorbereitungen nehmen wir den ersten Teil der Aufgabe I in Angriff: Es sollen alle P.-I. gesucht werden, bei welchen die Kanten β und δ einander parallel laufen. Nach den Formeln (1) ist

$$\text{für Kante } \beta:\quad \eta:\varkappa:\lambda=(hk-l^2):(kl-h^2):(hl-k^2),$$

$$\text{für Kante } \delta:\quad \eta':\varkappa':\lambda'=\quad -l\ :\quad +l\ :(h-k).$$

Die Kanten β und δ sind einander parallel, wenn die Proportion besteht

$$\frac{hk-l^2}{-l}=\frac{kl-h^2}{l}=\frac{hl-k^2}{h-k}.$$

Hieraus folgt:

$$hk-l^2=h^2-kl\quad\text{oder}\quad k=\frac{h^2+l^2}{h+l}.$$

Ein Beispiel eines hierher gehörenden Körpers ist das P.-I. (652). Denn hier ist $\delta=\frac{6^2+2^2}{6+2}$.

Um den zweiten Teil von Aufgabe I zu lösen, haben wir alle P.-I. zu suchen, bei welchen die Kombinationskante von Würfel und

Digitized by Google

P.-I. der Kante γ parallel ist. Die Indices der Kombinationskante der Würfelfläche (1 0 0) und der P.-I.-Fläche (hkl) sind

$$\eta : \varkappa : \lambda = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ k & l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ l & h \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ h & k \end{vmatrix} = 0 : -l : k.$$

Die Indices der Kante γ sind nach den Formeln (1):

$$\eta' : \varkappa' : \lambda' = (k^2 - lh) : (l^2 - hk) : (h^2 - kl).$$

Sollen diese beiden Geraden einander parallel sein, so mufs die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{0}{k^2 - lh} = \frac{-l}{l^2 - hk} = \frac{k}{h^2 - kl}.$$

Diese Proportion ist aber nur möglich, wenn $k^2 = hl$. Ein Beispiel eines hierher gehörenden Körpers ist das P.-I. (4 2 1), denn hier ist $2^2 = 4 \cdot 1$.

Schliefslich bleibt zur vollständigen Lösung von Aufgabe I noch die Frage zu beantworten: Giebt es P.-I., bei welchen die Kanten β und δ einander parallel laufen und gleichzeitig die Kombinationskanten des Würfels mit dem P.-I. den Kanten γ parallel sind? Dann müssen folgende Bedingungsgleichungen gleichzeitig bestehen:

$$k = \frac{h^2 + l^2}{h + l} \quad \text{und} \quad k^2 = hl.$$

Hieraus folgt $hl = \frac{(h^2 + l^2)^2}{(h + l)^2}$ oder $\left(\frac{h}{l}\right)^4 - \left(\frac{h}{l}\right)^3 - \frac{h}{l} + 1 = 0.$

Da diese Gleichung nur die Wurzeln $\frac{h}{l} = 1$ und $\frac{h}{l} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$ besitzt, h aber $> l$ und beide reell und sogar rational sein müssen, so folgt:

Theorem I. Es giebt kein P.-I., bei welchem die Kanten β und δ einander parallel laufen und gleichzeitig die Kombinationskanten des Würfels mit dem P.-I. den Kanten γ parallel sind.

4. *Behandlung von Aufgabe* II. — Wir nehmen die zweite Aufgabe in Angriff, indem wir zunächst alle P.-I. suchen, bei welchen die Kanten α und δ einander parallel laufen. Nach den Formeln (1) ist

für Kante α: $\eta : \varkappa : \lambda = (k^2 + l^2) : -h(k - l) : -h(k + l)$,

für Kante δ: $\eta' : \varkappa' : \lambda' = \quad -l \quad : +l : (h - k)$.

Die Kanten α und δ sind einander parallel, wenn die Proportion besteht

$$\frac{k^2 + l^2}{-l} = \frac{-h(k - l)}{l} = \frac{-h(k + l)}{h - k}, \quad \text{d. h.}$$

$$k^2 + l^2 = h(k - l) \quad \text{oder} \quad h = \frac{k^2 + l^2}{k - l}.$$

Digitized by Google

Ein Beispiel eines hierher gehörenden Körpers ist das P.-I. (5 2 1). Denn hier ist $5 = \frac{2^2 + 1^2}{2 - 1}$.

Um den zweiten Teil der Aufgabe II zu lösen, haben wir alle P.-I. zu suchen, bei welchen die Kombinationskante von Oktaeder und P.-I. der Kante ε parallel ist. Die Indices der Kombinationskante der Oktaederfläche (1 1 1) und der P.-I.-Fläche (hkl) sind

$$\eta : \varkappa : \lambda = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ l & h \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ h & k \end{vmatrix} = (l - k) : (h - l) : (k - h).$$

Die Indices der Kante ε sind nach den Formeln (1)

$$\eta' : \varkappa' : \lambda' = -(k^2 + l^2) : h(k + l) : h(l - k).$$

Sollen diese beiden Kanten einander parallel sein, so mufs die Bedingung erfüllt sein

$$\frac{l - k}{-(k^2 + l^2)} = \frac{h - l}{h(k + l)} = \frac{k - h}{h(l - k)}.$$

Hieraus folgt

$$h = \frac{k^2 + l^2}{2l}.$$

Ein Beispiel eines hierher gehörenden Körpers ist das P.-I. (5 4 2) Denn hier ist $5 = \frac{4^2 + 2^2}{2 \cdot 2}$.

Schliefslich ist noch zur vollständigen Lösung von Aufgabe II die Frage zu beantworten:

Giebt es P.-I., bei welchen die Kanten α und δ einander parallel laufen und gleichzeitig die Kombinationskanten des Oktaeders mit dem P.-I. den Kanten ε parallel sind? Dann müssen folgende Bedingungsgleichungen gleichzeitig bestehen:

$$h = \frac{k^2 + l^2}{k - l} \quad \text{und} \quad h = \frac{k^2 + l^2}{2l}.$$

Hieraus folgt $k - l = 2l$ oder $k = 3l$ oder $\frac{k}{l} = \frac{3}{1}$. Setzt man $k = 3l$ in die Gleichung $h = \frac{k^2 + l^2}{2l}$ ein, so ergiebt sich $h = 5l$ oder $\frac{h}{l} = \frac{5}{1}$. Wir kommen zu folgendem

Theorem II. Das P.-I. (5 3 1) ist das einzige in der Krystallographie mögliche, welches Kanten von zweierlei Art hat, und bei welchem das Fünfeck aus einem Rhombus mit angesetztem gleichschenkligen Dreieck besteht.

Das gefundene P.-I. (5 3 1) ist der Halbflächner eines isogonalen Hexakisoktaeders. Isogonale Hexakisoktaeder haben die Eigenschaft, dafs alle

Digitized by Google

Flächenwinkel, welche in den (3 + 3)-kantigen, über den Flächen des einbeschriebenen Oktaeders liegenden Ecken zusammenstofsen, einander gleich sind. Die Bedingung, dafs ein Hexakisoktaeder (hkl) ein isogonales sei, lautet

$$k = \frac{h+l}{2}.$$

(Vergl. Liebisch, Geom. Krystallogr. Kap. XIII, § 7.)

Es läfst sich leicht beweisen, dafs das P.-I. (5 3 1) das einzige ist, welches gleichzeitig den beiden Bedingungen

$$k = \frac{h+l}{2} \quad \text{und} \quad h = \frac{k^2+l^2}{k-l}$$

oder gleichzeitig den beiden anderen Bedingungen

$$k = \frac{h+l}{2} \quad \text{und} \quad h = \frac{k^2+l^2}{2l}$$

genügt.

5. *Die numerischen Konstanten des P.-I. (5 3 1).* — Unter dem Neigungswinkel ϑ zweier Begrenzungsebenen (hkl) und $(h'k'l')$ eines Polyeders soll der an einer Kante desselben von einer Ebene und der Verlängerung der anstofsenden Ebene gebildete Winkel verstanden werden. Er wird gefunden mittelst der Formel

$$\cos\vartheta = \frac{hh' + kk' + ll'}{\sqrt{(h^2+k^2+l^2)\cdot(h'^2+k'^2+l'^2)}}.$$

(Vergl. Salmon, Analyt. Geom. d. Raumes I, Art. 28 oder Liebisch, Geometr. Krystallogr. Kap. XIII, § 1.)

Mit Hülfe dieser Formel findet man für das P.-I. (5 3 1) die Werte

$$\cos\alpha = \cos\varepsilon = \tfrac{5}{7}, \quad \cos\beta = \cos\gamma = \tfrac{23}{35}, \quad \cos\delta = \tfrac{29}{35};$$

$$\sphericalangle\alpha = \sphericalangle\varepsilon = 44^0\,24'\,55'', \quad \sphericalangle\beta = \sphericalangle\gamma = 48^0\,55'\,4'',$$

$$\sphericalangle\delta = 34^0\,2'\,52''.$$

Unter dem Neigungswinkel ω zweier Kanten $(\eta\varkappa\lambda)$ und $(\eta'\varkappa'\lambda')$ eines Polyeders soll der an einer Ecke desselben von einer Kante und der Verlängerung der anstofsenden Kante gebildete Winkel verstanden werden. Er wird gefunden mittelst der Formel

$$\cos\omega = \frac{\eta\eta' + \varkappa\varkappa' + \lambda\lambda'}{\sqrt{(\eta^2+\varkappa^2+\lambda^2)\cdot(\eta'^2+\varkappa'^2+\lambda'^2)}}.$$

(Vergl. Liebisch a. a. O. Kap. XIII, § 1.)

Digitized by Google

Mit Hülfe dieser Formel findet man für das P.-I. (5 3 1) die Werte

$$\cos(\alpha\varepsilon) = -\tfrac{1}{6}, \quad \cos(\alpha\beta) = \frac{11}{3\cdot\sqrt{29}}, \quad \cos(\beta\gamma) = \tfrac{23}{58},$$

$$\cos(\gamma\delta) = \frac{13}{6\cdot\sqrt{29}}, \quad \cos(\delta\varepsilon) = \tfrac{1}{6};$$

$$\sphericalangle(\alpha\varepsilon) = 99^0\,35'\,39'', \quad \sphericalangle(\alpha\beta) = 47^0\,5'\,14'' \quad \sphericalangle(\beta\gamma) = 66^0\,38'\,14'',$$

$$\sphericalangle(\gamma\delta) = 66^0\,16'\,32'', \quad \sphericalangle(\delta\varepsilon) = 80^0\,24'\,21''.$$

Hieraus ersieht man die Bestätigung des bereits bekannten Resultates $\sphericalangle(\alpha\varepsilon) + (\delta\varepsilon) = 180^0$.

Besondere Beachtung verdient diejenige Kombination des P.-I. (5 3 1) mit dem Oktaeder, bei welcher die Kombinationskanten die Endpunkte der P.-I.-Kanten β und γ verbinden. Dieses Polyeder wird von 24 kongruenten Rhomben und von 8 kongruenten gleichseitigen Dreiecken begrenzt; es besitzt ferner 60 gleich lange Kanten und 30 vierkantige Ecken. In 6 von diesen Ecken stofsen vier Rhombenflächen zusammen, während jede der 24 übrigen Ecken von einem Dreieckswinkel, zwei stumpfen und einem spitzen Rhombenwinkel gebildet wird.

Essen (Ruhr), den 14. April 1901.

Rotationszykliden und Lamésche Produkte.

Eine Antikritik zweier Abhandlungen des Hrn. Safford.

Von Emil Haentzschel in Berlin.

Hr. Safford hat im **21.** Bande des American Journal of Mathematics, 1899, S. 1—23 eine Abhandlung unter dem Titel: Systems of revolution and their relation to conical systems in the theory of Lamé's products veröffentlicht, die in ihren Schlufszeilen eine Kritik des *zweiten* Teiles meiner „Studien über die Reduktion der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen" (Berlin, 1893, Georg Reimer) enthält. In einer andern Abhandlung: Surfaces of revolution in the theory of Lamé's products (Bulletin of the American Mathematical Society, 2. Serie, Bd. **5**, S. 431—437, 1899) setzt er dann diese Kritik fort. In der zuerst genannten Abhandlung — sie soll der Kürze wegen stets mit I zitiert werden — stellt Hr. Safford Be-

Digitized by Google

hauptungen auf, deren Unrichtigkeit sich im folgenden herausstellen wird. In der an zweiter Stelle genannten Abhandlung — ich will sie mit II im folgenden bezeichnen — schliefst Hr. Safford vom besonderen aufs allgemeine; er schliefst, weil in einem *von ihm* behandelten Sonderfall sich eine Kurvengleichung in ein Produkt zerfällen läfst, also müsse es in dem *von mir* behandelten allgemeinen Falle auch sein.

1. Hr. Wangerin hat gezeigt, dafs die Reduktion der Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

auf gewöhnliche Differentialgleichungen für solche Rotationskörper möglich ist, für welche die Gleichung der Meridiankurve aus

$$x + ir = F(t + iu) \tag{1}$$

erhalten wird, wenn $F(t + iu)$ das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$F'^2(t + iu) = AF^4 + 4BF^3 + 6CF^2 + 4B'F + A' \tag{2}$$

ist. Die Gröfsen A, B, C, B', A' sind durch die Rechnung eingeführte Integrationskonstanten; sie können *reell* oder *komplex* sein. Nehmen wir an, sie seien komplex, und $F_1(t - iu)$, A_1, B_1, C_1, B_1', A_1' die zugehörigen konjugierten Gröfsen, so tritt neben Gleichung (2) die andere

$$F_1'^2(t - iu) = A_1F_1^4 + 4B_1F_1^3 + 6C_1F_1^2 + 4B_1'F_1 + A_1'. \tag{3}$$

Hr. Safford *behauptet* in II, S. 432, dafs dann und nur dann, wenn

$$A = A_1,\ B = B_1,\ C = C_1,\ B' = B_1',\ A' = A_1',$$

d. h. nur wenn diese Gröfsen *reell* sind, die Gleichung (2) bestehen kann, ohne seine Behauptung *zu beweisen*. Nun habe ich auf S. 5 meiner „Studien" gezeigt, indem ich mich auf die Preisschrift des Hrn. Wangerin stützen konnte, dafs aufser der Lösung (1) des Problems noch eine zweite existiert, nämlich

$$r + ix = \varphi(t + iu), \tag{4}$$

was Hr. Safford auch in II, Gleich. 35, S. 437 anerkennt. Es folgt aber aus (4) (Studien, S. 5) die konjugierte Gleichung

$$r - ix = \varphi_1(t - iu), \quad \text{bez.} \tag{5}$$

$$x + ir = i\varphi_1(t - iu);\quad x - ir = -i\varphi(t + iu), \tag{5a}$$

welche Funktion $\varphi(t + iu)$ der Differentialgleichung genügt:

$$\varphi'^2 = -A\varphi^4 - 4Bi\varphi^3 + 6C\varphi^2 + 4Bi\varphi - A'. \tag{6}$$

Digitized by Google

Da hier zwei Koeffizienten konjugiert imaginär sind, so ersieht man, dafs Hr. Safford am *Schluß* von II das nicht mehr anerkennt, was er am *Anfang* von II behauptet hat. Hr. Wangerin sagt in seiner Preisschrift, dafs Gleichung (4), wenn die x-Achse Rotationsachse bleibt, auf *ringförmige Rotationskörper* führt; Hrn. Saffords Behauptung schliefst diese also ohne Grund von der Untersuchung aus.

2. Setzt man mit Rücksicht auf (2)

$$R(x) = Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4B'x + A', \tag{2a}$$

und ist

$$x = a_1 \quad \text{eine Wurzel von} \quad R(x) = 0,$$

so lautet das Integral von (2)

$$F(t + iu) = a_1 + \frac{\frac{1}{4}R'(a_1)}{\wp(t+iu) - \frac{1}{24}R''(a_1)}, \tag{7}$$

wo $\wp(t + iu)$ die bekannte Weierstrafssche elliptische Funktion ist. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall. a_1 ist eine *reelle* Gröfse.

Die Meridiankurven sind Siebecksche Kurven, Cartesische Ovale und die aus diesen durch die reelle Inversion

$$x_1 + ir_1 = \frac{\alpha + \beta(x + ir)}{\gamma + \delta(x + ir)} \quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \text{ reell})$$

hervorgehenden „Wangerinschen" *Meridiankurven*:

$$(x_1^2 + r_1^2)^2 + Ax_1(x_1^2 + r_1^2) \pm B^2x_1^2 \pm C^2r_1^2 + E^2x_1 = \pm D^4. \tag{8}$$

2. Fall. a_1 ist eine *komplexe* Gröfse, a_2 die hierzu konjugierte. Es ist

$$F_1(t - iu) = a_2 + \frac{\frac{1}{4}R'(a_2)}{\wp(t - iu) - \frac{1}{24}R''(a_2)}. \tag{7a}$$

Als Meridiankurve habe ich die Kurve gefunden (Studien, S. 24):

$$A(x_1^2 + r_1^2)^2 + Bx_1(x_1^2 + r_1^2) + Cr_1(x_1^2 + r_1^2) + Dx_1^2 + Er_1^2 + Fx_1r_1 + Gx_1 + Hr_1 + I = 0, \tag{9}$$

wo

$$GH - 2IF = 0 \quad \text{und} \quad G^2 - H^2 = 4I(D - E) \tag{9a}$$

ist.

Diese Meridiankurve (9) führt offenbar auf *Rotationskörper 8. Ordnung;* but these are in fact, bemerkt Hr. Safford I, S. 23, of only the fourth degree, and of the same type as above (nämlich (8)). Haentzschel has overlooked the fact, that the restrictions, which he

Digitized by Google

mentions (9a), will give a zero value to several coefficients in equations (31), (32), (36) on page 23—24 of his book.

Diese Bemerkung ist nicht richtig. Denn offenbar geht (9) in (8) über, wenn

$$C = 0, \quad F = 0 \quad \text{und} \quad H = 0$$

ist. Dies tritt ein (Studien, S. 26) für

$$q_1 = 0 \quad \text{und} \quad q_2 = 0,$$

was dann auch in die von Hrn. Safford zitierten Gleichungen (32), bez. (33), S. 23 meines Buches

$$x_2 + ir_2 = \xi + i\eta + \frac{p_1 + iq_1}{\wp(t + iu) - (p_2 + iq_2)}, \tag{32}$$

oder

$$x_2 - \xi + i(r_2 - \eta) = \frac{p_1 + iq_1}{\wp(t + iu) - (p_2 + iq_2)},$$

oder

$$x_1 + ir_1 = \frac{p_1 + iq_1}{\wp(t + iu) + (p_2 + iq_2)} \tag{33}$$

einzusetzen ist.

Da $\xi + i\eta$ bei mir identisch ist mit der Wurzel a_1, so behauptet also Hr. Safford, dafs

$$\tfrac{1}{4} R'(\xi + i\eta) \quad \text{reell und gleich} \quad p_1,$$
$$\tfrac{1}{24} R''(\xi + i\eta) \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad p_2$$

sein *mufs*. Das aber dürfte sich wohl nicht beweisen lassen, so lange η von Null verschieden ist und *alles allgemein* bleibt.

Ich glaube nun den Grund dafür, wie Hr. Safford zu seinen Behauptungen kommt, in einem unzulässigen Vergleiche eines Resultates, zu dem er gelangt, mit meinen Gleichungen (31) und (33) (Studien, S. 23) suchen zu müssen.

Hr. Safford stellt sich in I, S. 11 und folg. die Aufgabe: zu untersuchen, wann die lineare Transformation mit *komplexen* Koeffizienten

$$x' + r'i = \frac{\alpha + \beta(x + ri)}{\gamma + \delta(x + ri)} \quad \text{(I, S. 11, (3))} \tag{10}$$

einschliefslich der konjugiert imaginären

$$x' - r'i = \frac{\alpha_1 + \beta_1(x - ri)}{\gamma_1 + \delta_1(x - ri)} \quad \text{(I, S. 11, (4))} \tag{10a}$$

für die Reduktion der Potentialgleichung brauchbar ist. Er findet vier Fälle, in denen dies statt hat. Sei

$$\alpha = a + a_0 i, \quad \beta = b + b_0 i, \quad \gamma = c + c_0 i, \quad \delta = d + d_0 i,$$
$$\alpha_1 = a - a_0 i, \quad \beta_1 = b - b_0 i, \quad \gamma_1 = c - c_0 i, \quad \delta_1 = d - d_0 i, \quad (i = \sqrt{-1}),$$

Digitized by Google

so ist bei ihm entweder erstens

(a) $$x' + r'i = \frac{a - b_0(r - xi)}{c - d_0(r - xi)}$$ (I, S. 19, Gleichung (77)).

Dies ist offenbar die *reelle* Inversion der Meridiankurve

(5) $$r - ix = \varphi_1(t - iu),$$

von der oben in Nr. **1** gesprochen worden ist. Oder zweitens

(b) $$x' + r'i = \frac{a + b(x + ri)}{c + d(x + ri)}$$ (I, S. 19, Gleichung (79)).

Dies ist die *reelle* Inversion der Meridiankurve

(1) $$x + ir = F(t + iu),$$

und zwar erkennt Hr. Safford ausdrücklich nur die Wangerinsche (8) als die allgemeinste an, obgleich er mit seiner Untersuchung eigentlich bezweckt, zu erfahren, ob man bei Benutzung des Integrals (7) auch eine *komplexe Wurzel* a_1 nehmen darf. Diese Frage habe ich in meinen „Studien", 1. Teil, 3, S. 8—11 dadurch zur Entscheidung gebracht, dafs ich die Trennung der Variabeln *ganz allgemein leistete*, die Differentialgleichungen aufstellte und einen *zweiten* Typus von Lamé-Wangerinschen Funktionen 2. Ordnung auffand; die zugehörigen Meridiankurven stellt (9) dar (Studien, S. 24), gegen die sich die Kritik des Hrn. Safford richtet. Derselbe findet nämlich weiter, dafs die Transformation (10) brauchbar ist — bis jetzt durfte sie ja nur *reelle* Koeffizienten haben — in zwei Fällen c) und d), in denen beiden *die Bedingungsgleichungen*

(11) $$\begin{cases} ad + a_0d_0 - bc - b_0c_0 = 0, \\ a_0d - ad_0 + b_0c - bc_0 = 0 \end{cases}$$

erfüllt sein müssen.

Wahrscheinlich identifiziert Hr. Safford die Gleichungen (11) mit den hier mit (9a) bezeichneten, was natürlich ein Irrtum ist, und daher stammt wohl seine Behauptung, meine Meridiankurve (9) will give a zero value to several coefficients, d. h. meine Kurve (9) reduzierte sich *angeblich* auf die Wangerinsche Kurve (8). Dafs dem nicht so ist, will ich dadurch beweisen, dafs ich Aufklärung gebe über Sinn und Bedeutung der Saffordschen Bedingungsgleichungen (11).

3. Hr. Safford nimmt in keiner Weise Notiz von der in meinen „Studien" auf S. 8—12 *ganz allgemein* geleisteten Trennung der Variabeln in $F(t + iu)$, durch welche erwiesen ist, dafs in dem von ihm ge-

Digitized by Google

machten Ansatz (10) die Koeffizienten α, β, γ, δ sowohl reell als komplex sein dürfen. Hr. Safford durfte also gar nicht hoffen, irgend *ein neues Resultat* auffinden zu können. Seine einschränkenden Bedingungen (11) müssen demnach in irgend einer Beziehung zu unserer Untersuchung in den „Studien" S. 9 stehen. Um diese Beziehung zu ermitteln, bringen wir den Saffordschen Ansatz (10) auf die von uns gewählte Form (32) (Studien, S. 23). Es ist nach Hrn. Safford:

$$x_2 + ir_2 = \frac{\alpha + \beta(x+ir)}{\gamma + \delta(x+ir)} \quad \text{(I, S. 11, (3))}, \tag{10}$$

$$x_2 - ir_2 = \frac{\alpha_1 + \beta_1(x-ir)}{\gamma_1 + \delta_1(x-ir)} \quad \text{(I, S. 11, (4))}. \tag{10a}$$

Daher ist

$$x_2 + ir_2 = \frac{\beta}{\delta} + \frac{\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2}}{(x+ir) + \frac{\gamma}{\delta}}.$$

Identifizieren wir dies mit meinem Ansatz (7), so ist $\frac{\beta}{\delta} = a_1$, also gleich einer komplexen Wurzel von $R(x) = 0$, $\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2} = \frac{1}{4}R'(a_1)$, $\frac{\gamma}{\delta} = -\frac{1}{24}R''(a)_1$ zu nehmen.

Herr Safford setzt:

$$\alpha = a + a_0 i,\ \beta = b + b_0 i,\ \gamma = c + c_0 i,\ \delta = d + d_0 i,$$
$$\alpha_1 = a - a_0 i,\ \beta_1 = b - b_0 i,\ \gamma_1 = c - c_0 i,\ \delta_1 = d - d_0 i.$$

Ich setze (Studien, S. 23):

$$a_1 = \xi + i\eta,\ \ \tfrac{1}{4}R'(a_1) = p_1 + iq_1,\ \ \tfrac{1}{24}R''(a_1) = p_2 + iq_2,$$
$$a_2 = \xi - i\eta,\ \ \tfrac{1}{4}R'(a_2) = p_1 - iq_1,\ \ \tfrac{1}{24}R''(a_2) = p_2 - iq_2.$$

Demnach ist das Weierstrafssche e':

$$e' = \frac{\frac{1}{4}R'(a_1)}{a_2 - a_1} + \frac{1}{24}R''(a_1),$$

$$e' = -\frac{p_1 + iq_1}{2i\eta} + p_2 + iq_2 = \left(\frac{-q_1 + 2p_2\eta}{2\eta}\right) + i\left(\frac{p_1 + 2q_2\eta}{2\eta}\right),$$

oder es ist

$$2e'\eta = (-q_1 + 2p_2\eta) + i(p_1 + 2q_2\eta). \tag{12}$$

Digitized by Google

Wir setzen *die rechte Seite dieser Gleichung* in die Saffordschen Bezeichnungen um. Demzufolge ist

$$-2i\eta = a_2 - a_1 = \frac{\beta_1}{\delta_1} - \frac{\beta}{\delta} = \frac{\beta_1\delta - \beta\delta_1}{\delta\delta_1} = \frac{2i}{d^2 + d_0^2}(bd_0 - b_0 d);$$

$$2p_1 = \tfrac{1}{4}R'(a_1) + \tfrac{1}{4}R'(a_2) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2} + \frac{\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1}{\delta_1^2}$$

$$= \frac{2}{(d^2 + d_0^2)^2}\left\{\begin{array}{c} d^2(ad + a_0d_0 - bc + b_0c_0) + d_0^2(ad + a_0d_0 + bc - b_0c_0) \\ -2dd_0(bc_0 + b_0c) \end{array}\right\};$$

$$2q_1 i = \tfrac{1}{4}R'(a_1) - \tfrac{1}{4}R'(a_2) = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\delta^2} - \frac{\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1}{\delta_1^2}$$

$$= -\frac{2i}{(d^2 + d_0^2)^2}\left\{\begin{array}{c} d^2(a_0d - ad_0 - bc_0 - b_0c) + d_0^2(a_0d - ad_0 + bc_0 + b_0c) \\ -2dd_0(b_0c_0 - bc) \end{array}\right\};$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = -\tfrac{1}{24}R''(a_1) = -p_2 - iq_2 = \frac{c + c_0 i}{d + d_0 i};$$

$$p_2 = -\frac{cd + c_0d_0}{d^2 + d_0^2}; \quad q_2 = -\frac{c_0d - cd_0}{d^2 + d_0^2}.$$

Es ist daher

$$-q_1 + 2p_2\eta = -\frac{1}{d^2 + d_0^2}(a_0d - ad_0 + b_0c - bc_0)$$

und

$$p_1 + 2q_2\eta = +\frac{1}{d^2 + d_0^2}(ad + a_0d_0 - bc - b_0c_0).$$

Wird dies in (12) eingesetzt, so ergiebt sich

$$(13)\quad 2e'\eta(d^2 + d_0^2) = -(a_0d - ad_0 + b_0c - bc_0) + i(ad + a_0d_0 - bc - b_0c_0).$$

In den Klammern der rechten Seite dieser Gleichung haben wir die von Hrn. Safford auf ganz anderem Wege erhaltenen Bedingungsgleichungen (11) vor uns. Demnach dürfen nach Hrn. Safford die Koeffizienten der Transformationsgleichung (10) dann und nur dann *komplex* sein, wenn

$$(14)\quad 2e'\eta(d^2 + d_0^2) = 0$$

ist. $d^2 + d_0^2 = 0$ ist gleichbedeutend mit $\delta = 0$, also für die vorgelegte Frage bedeutungslos. $\eta = 0$ bedeutet, es ist die Wurzel a_1 *reell*. Dann gelangt man bekanntlich nur zur Wangerinschen Meridiankurve (8) (vergl. Studien, S. 8—9 und S. 20—22). $e' = 0$ bedeutet, *von den drei Größen* e_λ, für welche $\wp(t + iu) - e_\lambda$ verschwindet, *ist die eine gleich Null*, was sofort $g_3 = 0$ nach sich zieht. Dafs aber *nur solche* elliptische Funktionen zugelassen werden dürfen, wird niemand behaupten wollen.

Digitized by Google

Ziehen wir jetzt das Facit aus dem Section II betitelten Teile der unter I zitierten Abhandlung des Hrn. Safford, so ist der gröfste Teil der Resultate desselben das Eigentum des Hrn. Wangerin, so z. B. Gleichung (37), ohne dafs Hr. Safford dies besonders angiebt. Ein anderer Teil, auf den Hr. Safford eine Kritik meiner Arbeiten glaubt aufbauen zu können, ist dadurch erledigt, dafs ich selbst die betreffende Frage bereits vor ihm ganz allgemein gelöst habe.

4. Benutzte Hr. Wangerin bei Ableitung seiner Resultate stets nur die Jacobi-Legendresche Theorie der elliptischen Funktionen, so hatte ich es mir zur Aufgabe gestellt (vergl. meine Dissertation, Berlin 1883, Mayer u. Müller), die Resultate des Hrn. Wangerin vermittelst der etwas allgemeineren Weierstrafsschen Theorie der elliptischen Funktionen zur Darstellung zu bringen. Dabei ergab sich manches neue Resultat, anderes aber erschien in einfacherer Form. Ferner wurde überall angegeben, in wie weit die Resultate das Eigentum des Hrn. Wangerin sind.

Schon in Nr. **1** habe ich darauf aufmerksam gemacht, dafs Hr. Safford die Abhandlung II mit der Bemerkung einleitet, die Koeffizienten der Differentialgleichung (2) müssen *reell* sein, um am Schlufs von II dies zu widerrufen. Hat Hr. Safford durch die einschränkenden Bedingungen (11), die zwar nicht existieren, wie in Nr. **3** von mir bewiesen worden ist, anerkannt, dafs im Integral (7) a_1, $\frac{1}{4}R'(a_1)$, $\frac{1}{24}R''(a_1)$ *komplex* sein dürfen, so behauptet er jetzt (II, S. 433, Zeile 4 von unten), dafs dieselben Gröfsen *reell* sein müssen. Weil die Koeffizienten von (2) *seiner Meinung nach* reell sein müssen, darum müssen es auch die des Integrals (7) sein; so glaubt Hr. Safford schliefsen zu dürfen.

In meinen „Studien", S. 33—37 habe ich es unternommen, an die Stelle des Integrals (7) das allgemeinere, auch von Weierstrafs herrührende, zu setzen:

$$(15)\quad \left\{ \begin{array}{c} F(t+iu) = x_0 \\ + \dfrac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3} + \frac{1}{2}R'(x_0)\left[s - \frac{1}{24}R''(x_0)\right] + \frac{1}{24}R(x_0)R'''(x_0)}{2\left[s - \frac{1}{24}R''(x_0)\right]^2 - \frac{1}{2}AR(x_0)} \end{array} \right.,$$

wo x_0 irgend eine reelle oder komplexe Konstante, $s = \wp(t+iu)$ ist. Eine Deutung dieses Integrals im Sinne der konformen Abbildung lieferte mir *Meridiankurven 16. Ordnung*, denen Rotationskörper 32. Ordnung entsprechen.

Im Gegensatz zu diesem Resultat will nun Hr. Safford in II zeigen, dafs die betreffenden Meridiankurven sich in ein Produkt von zwei Wangerinschen (Gleichung 8) zerfällen lassen. Dazu mufs man,

Digitized by Google

wie ich gezeigt habe, aus Gleichung (15) s ausrechnen und dies der Betrachtung zu Grunde legen. Es ergiebt sich:

$$(16)\quad s = \frac{\sqrt{R(x_0)}\sqrt{R(x)} + R(x_0) + \frac{1}{2}R'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{12}R''(x_0)(x-x_0)^2}{2(x-x_0)^2}.$$

Statt aber diese Gleichung bei seinen Rechnungen zu benutzen, nimmt Hr. Safford zuerst an, x_0 sei *reell*, was doch unzulässig ist, um dann hinterher $x_0 = 0$ zu setzen.

An Stelle von Gleichung (16) lautet es bei Hrn. Safford:

$$(17)\quad s = A_0 \frac{\left(1 + \frac{ax^2}{6} + \sqrt{\pm x^4 + ax^2 + 1}\right)}{2x^2}.$$

Dafs eine so weit gehende Spezialisierung statt Kurven 16. Ordnung nur solche von der 4. Ordnung hervorbringt, ist natürlich. Der von Hrn. Safford behandelte *spezielle* Fall ist ihm aber Beweis genug, dafs es im *allgemeinen* ebenso ist; „the surfaces corresponding will be of the fourth degree, thus proving Wangerin's assertion, and invalidating Haentzschel's criticisms"; den Beweis dafür aber, dafs dies auch für (16) statthat, bleibt er schuldig.

Berlin, den 18. Februar 1901.

Notiz über die Kreisteilungs-Polynome.

Von E. Netto in Giefsen.

Wir bezeichnen mit $F_n(x)$ denjenigen irreduktiblen Teiler von $x^n - 1$, welcher, gleich Null gesetzt, die primitiven n^{ten} Wurzeln der Einheit zu Wurzeln hat. L. Kronecker macht[1]) auf eine „höchst merkwürdige und wichtige Eigenschaft" der $F_n(x)$ aufmerksam: „*Der gröfste gemeinsame Teiler von $F_m(x^n)$ und $F_n(x^m)$ ist stets gleich $F_{mn}(x)$, falls m und n teilerfremd sind.*" Ich will diesen und einen weit allgemeineren Satz aus einem neuen Theoreme herleiten.

Die Zahl m enthalte die Primzahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots$, und zwar sei

$$m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots;$$

ferner seien $q_1, q_2, q_3, \ldots$ von den $p_1, p_2, p_3, \ldots$ verschiedene Primzahlen. Nun ist (l. c. p. 285)

$$(1)\quad F_m(x) = \prod_{d|m} \left(x^{\frac{m}{d}} - 1\right)^{\varepsilon};$$

1) Vorlesungen über Zahlentheorie; bearb. u. herausgg. v. K. Hensel. I. S. 288.

Digitized by Google

d durchläuft alle Teiler von m; ε_d ist $= 0$, wenn d auch nur einen Primfaktor mehr als einmal enthält; $= +1$, wenn d eine gerade Anzahl von einander verschiedener Primfaktoren enthält; $= -1$, wenn d eine ungerade Anzahl von einander verschiedener Primfaktoren besitzt; $\varepsilon_1 = 1$.

Aus (1) folgt

$$F_m(x^{p_1}) = \prod_{d/m} \left(x^{\frac{m \cdot p_1}{d}} - 1\right)^{\varepsilon_d}, \tag{2}$$

$$F_{mp_1}(x) = \prod_{d/mp_1} \left(x^{\frac{m \cdot p_1}{d}} - 1\right)^{\varepsilon_d}; \tag{3}$$

die beiden rechten Seiten in (2) und in (3) stimmen überein; denn jedes d, welches in (3) auftritt, aber nicht in (2), hat den Faktor $p_1^{\alpha_1+1}$, d. h. mindestens den Faktor p_1^2, so daß das zugehörige ε_d verschwindet. Demnach ist

$$F_m(x^{p_1}) = F_{mp_1}(x)$$

und allgemeiner

$$\begin{aligned} F_m\left(x^{p_1^{\beta_1}}\right) &= F_{mp_1}\left(x^{p_1^{\beta_1-1}}\right) = F_{mp_1^2}\left(x^{p_1^{\beta_1-2}}\right) = \dots \\ &= F_{mp_1^{\beta_1}}(x). \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung folgt dann weiter

$$F_m(x^n) = F_{mn}(x), \tag{4}$$

falls n nur Primfaktoren enthält, die schon in m vorkommen.

Aus (1) folgt ferner

$$\begin{aligned} F_m(x^q) &= \prod_{d/m} \left(x^{\frac{mq}{d}} - 1\right)^{\varepsilon_d} \\ &= \prod_{d/m} \left(x^{\frac{mq}{d}} - 1\right)^{\varepsilon_d} \cdot \prod_{d/m} \left(x^{\frac{mq}{dq}} - 1\right)^{\varepsilon_{dq}} \cdot \prod_{d/m} \left(x^{\frac{m}{d}} - 1\right)^{\varepsilon_d}, \end{aligned} \tag{5}$$

indem die letzten beiden Produkte sich wegen $\varepsilon_{dq} = -\varepsilon_d$ zerstören. Dies giebt weiter

$$\begin{aligned} &= \prod_{d/mq} \left(x^{\frac{mq}{d}} - 1\right)^{\varepsilon_d} \cdot \prod_{d/m} \left(x^{\frac{m}{d}} - 1\right)^{\varepsilon_d} \\ &= F_{mq}(x) \cdot F_m(x). \end{aligned}$$

Ersetzt man in dem erhaltenen Resultate x durch x^q, so entsteht, da (mq) jetzt den Faktor q enthält:

$$F_m(x^{q^2}) = F_{mq^2}(x)\, F_{mq}(x)\, F_m(x)$$

und allgemeiner:

$$F_m(x^{q^\beta}) = F_{mq^\beta}(x)\, F_{mq^{\beta-1}}(x) \dots F_{mq}(x)\, F_m(x). \tag{6}$$

Digitized by Google

Hieraus ergiebt sich durch Verwendung derselben Formel

$$F_m(x^{q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2}}) = F_{m q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2}}(x)\, F_{m q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2 - 1}}(x)\, F_{m q_1^{\beta_1 - 1} q_2^{\beta_2}}(x) \dots F_m(x)$$

oder, kürzer geschrieben, wenn

$$n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} q_3^{\beta_3} \dots \qquad (q_\alpha + p_\beta)$$

gesetzt wird:

$$F_m(x^n) = \prod_{d/n} F_{md}(x). \tag{7}$$

Ist endlich

$$m_0 = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} p_3^{\gamma_3} \dots,$$

so folgt aus (4) und (7) allgemein *die elegante Formel für die Zerlegung*

$$F_m(x^{m_0 n}) = \prod_{d/n} F_{m m_0 d}(x). \tag{8}$$

Durch sie wird die Zerlegung der linken Seite in ihre irreduktiblen Faktoren geleistet, wenn wir die $F_x(x)$ als irreduktibel nachgewiesen haben.

Wir nehmen nun an, die beiden Zahlen m und m_0 hätten dieselben Primfaktoren, dagegen s und t weder unter einander noch mit m oder m_0 einen Faktor gemeinsam. Dann zeigt (8)

$$F_{ms}(x^{m_0 t}) = \prod_{d/t} F_{m m_0 s d}(x), \tag{9}$$

$$F_{m_0 t}(x^{ms}) = \prod_{\delta/s} F_{m m_0 t \delta}(x). \tag{10}$$

Es ist jetzt ersichtlich, dafs nur dann zwei Faktoren der rechten Seiten in (9) und (10) mit einander übereinstimmen, wenn $sd = t\delta$ ist, d. h. da s und t teilerfremd sind, wenn wir $d = t$, $\delta = s$ setzen. Also haben (9) und (10) nur den Faktor $F_{m m_0 s t}$ gemeinsam. Sobald wir den Satz als bekannt ansehen, dafs die $F_x(x)$ irreduktibel sind, heifst dies, da ja zwei beliebige Zahlen μ, ν in die Formen

$$\mu = ms, \quad \nu = m_0 t$$

gebracht werden können: *Der gröfste gemeinsame Teiler von* $F_\mu(x^\nu)$ *und* $F_\nu(x^\mu)$ *ist bei beliebigen Zahlen* μ *und* ν *stets* $F_{\mu\nu}(x)$. In dem Kronecker'schen Satze kann also die zugefügte Bedingung fortfallen, dafs μ und ν zu einander teilerfremd seien.

Giefsen, 30. April 1902.

Digitized by Google

Eine Eigenschaft der geodätischen Linien.

Von PAUL STÄCKEL in Kiel.

Die geodätischen Linien einer Fläche sind dadurch definiert, dafs in jedem ihrer Punkte die Schmiegungsebene durch die Flächennormale geht. Wenn man daher eine von dem Punkte $P(x, y, z)$ der Fläche ausgehende geodätische Linie mit demjenigen Normalschnitte der Fläche (oder, wie die Geodäten sagen, Vertikalschnitte) vergleicht, der in P dieselbe Tangente wie die geodätische Linie hat, so besteht in der Nähe von P, wenn die Änderungen von x und y als Gröfsen erster Ordnung angesehen werden, zwischen ihnen Übereinstimmung bis auf die Gröfsen zweiter Ordnung einschliefslich. Die Frage, welche Beziehungen zwischen geodätischen Linien und Normalschnitten stattfinden, wenn auch die Gröfsen dritter Ordnung berücksichtigt werden, findet ihre Beantwortung durch ein von Herrn Weingarten herrührendes Theorem, nach dem *eine geodätische Linie, welche die Punkte P und Q der Fläche verbindet, sich sowohl in P als auch in Q an den bezüglichen Normalschnitt in der Weise anschmiegt, dafs ihre Abweichung davon, wenn der Punkt Q sich dem Punkte P unbegrenzt nähert, $\frac{1}{3}$ des Winkelunterschiedes wird, welchen die beiden Normalschnitte in dem betreffenden Punkte mit einander bilden.*

Es ist auffallend, dafs dieser höchst elegante Satz in die Lehrbücher der Flächentheorie nicht aufgenommen worden ist; selbst in den *Leçons sur la théorie générale des surfaces* von Herrn Darboux ist er nicht zu finden. Der Grund liegt wohl darin, dafs er nicht von Herrn Weingarten selbst veröffentlicht wurde, sondern in einer Note versteckt ist, in der der General Baeyer Verbesserungen zu seiner Schrift: *Das Messen auf der sphäroidischen Erdoberfläche. Berlin 1862* mitteilt; diese Note ist auch nicht in einer mathematischen Zeitschrift, sondern in den Astronomischen Nachrichten (Bd. 60, No. 1425 vom 7. Juli 1863) erschienen. Dagegen wird der Weingartensche Satz erwähnt in den Werken von Jordan: *Handbuch der Vermessungskunde*, Bd. 2 (1878) S. 334 und von Herrn Helmert: *Die mathematischen und physikalischen Theorien der höheren Geodäsie*, Bd. I. 1880, S. 337.

Nimmt man hinzu, dafs jene Note keinen Beweis enthält, sondern dafs allein für die in Betracht kommenden Winkel Näherungswerte angegeben werden, aus denen jener Satz sofort folgt, Näherungswerte, von denen allerdings der eine (für den Winkel in P zwischen dem

Digitized by Google

Normalschnitt durch P und der geodätischen Linie) in § 24 der angeführten schwer zugänglichen Schrift des Generals Baeyer von Herrn Weingarten hergeleitet worden war, so wird es gerechtfertigt erscheinen, wenn im folgenden ein vollständiger Beweis für das Weingartensche Theorem entwickelt wird.

Das rechtwinklige Koordinatensystem der x, y, z möge so gewählt werden, dafs der Punkt P Anfangspunkt und die Tangentialebene die xy-Ebene werde. Durch geeignete Wahl der x- und y-Achsen läfst sich dann die Gleichung der Fläche in der Nähe des als regulär vorausgesetzten Punktes P auf die Form bringen:

$$z = \tfrac{1}{2}(r_0 x^2 + t_0 y^2) + \cdots \tag{1}$$

Durch P lege man eine geodätische Linie, deren Bogenlänge, von P aus gezählt, s heifse.

Werden die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes dieser Kurve als Funktionen von s aufgefafst, so ist nach dem Taylorschen Satze:

$$\xi = \xi_0' s + \tfrac{1}{2}\xi_0'' s^2 + \tfrac{1}{6}\xi_0''' s^3 + \cdots,$$
$$\eta = \eta_0' s + \tfrac{1}{2}\eta_0'' s^2 + \tfrac{1}{6}\eta_0''' s^3 + \cdots,$$
$$\zeta = \zeta_0' s + \tfrac{1}{2}\zeta_0'' s^2 + \tfrac{1}{6}\zeta_0''' s^3 + \cdots.$$

Wird die Differentiation nach s durch einen Strich bezeichnet, so mufs, damit s die Bogenlänge wird:

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1 \tag{2}$$

sein, woraus durch Differentiation nach s folgt:

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0, \tag{3}$$

$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 + \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = 0. \tag{4}$$

Ist $z = f(x, y)$, so lautet die allgemeine Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$\xi'\eta'' - \eta'\xi'' - \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi}(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'') - \frac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}(\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'') = 0;$$

im vorliegenden Falle wird also nach (1):

$$(5)\quad \xi'\eta'' - \eta'\xi'' - (r_0\xi + \cdot\cdot)(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'') - (t_0\eta + \cdots)(\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'') = 0,$$

woraus durch Differentiation nach s folgt:

$$(6)\quad \xi'\eta''' - \eta'\xi''' - (r_0\xi + \cdot\cdot)(\eta'\zeta''' - \zeta'\eta''') - (t_0\eta + \cdot\cdot)(\zeta'\xi''' - \xi'\zeta''')$$
$$- (r_0\xi' + \cdots)(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'') - (t_0\eta' + \cdots)(\zeta'\xi'' - \xi'\zeta'') = 0.$$

Digitized by Google

Zur Bestimmung von ξ_0', ξ_0'', ξ_0''' u. s. w. hat man in den Gleichungen (1) bis (6) $s = 0$ zu setzen. Dabei ist aber zu beachten, dafs nach (1)

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(r_0\xi^2 + t_0\eta^2) + \cdots,$$

also

$$\zeta' = r_0\xi\xi' + t_0\eta\eta' + \cdots,$$
$$\zeta'' = r_0(\xi'^2 + \xi\xi'') + t_0(\eta'^2 + \eta\eta'') + \cdots$$

zu setzen ist. Hieraus ergiebt sich für $s = 0$:

$$\zeta_0 = 0, \quad \zeta_0' = 0, \quad \zeta_0'' = r_0\xi_0'^2 + x_0\eta_0'^2;$$

die Berechnung von ζ_0''', bei der auch die Glieder dritter Dimension in der Entwicklung von ζ nach Potenzen von ξ und η berücksichtigt werden müssen, erweist sich im Laufe der weiteren Rechnung als unnötig.

Nach diesen Vorbereitungen findet man zunächst:

$$(2_0) \qquad \xi_0'^2 + \eta_0'^2 = 1,$$

sodafs

$$\xi_0' = \cos f, \quad \eta_0' = \sin f$$

gesetzt werden darf. Der Winkel f hat eine einfache geometrische Bedeutung, die Richtungscosinus der Tangente der geodätischen Linie im Punkte P sind nämlich, weil s die Bogenlänge bedeutet, gleich ξ_0', η_0', ζ_0', also gleich $\cos f$, $\sin f$, 0. Mithin ist f das Azimuth (gezählt von der positiven x-Achse in der Richtung nach der positiven y-Achse), unter dem die geodätische Linie von P ausgeht.

Weiter findet man:

$$(3_0) \qquad \xi_0'\xi_0'' + \eta_0'\eta_0'' = 0,$$

$$(5_0) \qquad -\eta_0'\xi_0'' + \xi_0'\eta_0'' = 0,$$

folglich ist

$$\xi_0'' = 0, \quad \eta_0'' = 0.$$

Mithin wird endlich:

$$(4_0) \quad \cos f \cdot \xi_0''' + \sin f \cdot \eta_0''' + (r_0\cos^2 f + t_0\sin^2 f)^2 = 0,$$

$$(6_0) \quad -\sin f \cdot \xi_0''' + \cos f \cdot \eta_0''' - (r_0 - t_0)\cos f \sin f (r_0\cos^2 f + t_0\sin^2 f) = 0,$$

woraus sich sofort ergiebt:

$$\xi_0''' = -r_0\cos f(r_0\cos^2 f + t_0\sin^2 f), \quad \eta_0''' = -t_0\sin f(r_0\cos^2 f + t_0\sin^2 f).$$

Demnach werden die ∞^1 durch den Punkt P gehenden geodätischen Linien in der Nähe von P dargestellt durch die Formeln:

$$\xi = \cos f \cdot s - \tfrac{1}{6}r_0\cos f(r_0\cos^2 f + t_0\sin^2 f) \cdot s^3 + \cdots,$$
$$\eta = \sin f \cdot s - \tfrac{1}{6}t_0\sin f(r_0\cos^2 f + t_0\sin^2 f) \cdot s^3 + \cdots,$$
$$\zeta = \tfrac{1}{2}(r_0\cos^2 f + t_0\sin^2 f) \cdot s^2 + \cdots;$$

Digitized by Google

dabei ist zu bemerken, daſs in dem Ausdruck für ζ der Koeffizient von s^3 unbestimmt geblieben ist.[1])

Jetzt hat man zu ermitteln, wie das Azimuth f zu wählen ist, wenn die geodätische Linie durch den dem Punkt P benachbarten Punkt Q gehen soll. Die Koordinaten von Q seien:

$$x = \cos\psi \cdot \varrho,$$
$$y = \sin\psi \cdot \varrho,$$
$$z = \tfrac{1}{2}(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi) \cdot \varrho^2 + \cdots.$$

Dann ergeben sich zur Bestimmung der für den Punkt Q geltenden Werte φ und σ von f und s die Gleichungen:

$$(7) \quad \cos\psi \cdot \varrho = \cos\varphi \cdot \sigma - \tfrac{1}{6} r_0\cos\varphi(r_0\cos^2\varphi + t_0\sin^2\varphi) \cdot \sigma^3 + \cdots,$$

$$(8) \quad \sin\psi \cdot \varrho = \sin\varphi \cdot \sigma - \tfrac{1}{6} t_0\sin\varphi(r_0\cos^2\varphi + t_0\sin^2\varphi) \cdot \sigma^3 + \cdots,$$

die in erster Annäherung durch:

$$\varphi = \psi, \quad \sigma = \varrho$$

erfüllt sind. Indem man ϱ als variable Gröſse ansieht, deren Verschwinden das Zusammenfallen der Punkte P und Q zur Folge hat, wird man daher die Entwickelungen ansetzen:

$$\varphi = \psi + a\varrho^2 + \cdots, \quad \sigma = \varrho + b\varrho^3 + \cdots,$$

und erhält, da für $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ die Entwickelungen

$$\cos\varphi = \cos\psi - \sin\psi \cdot a\varrho^2 + \cdots,$$
$$\sin\varphi = \sin\psi + \cos\psi \cdot a\varrho^2 + \cdots$$

gelten, aus (7) und (8) die Relationen:

$$(7') \quad \cos\psi = (\cos\psi - \sin\psi \cdot a\varrho^2 + \cdots)(1 + b\varrho^2 + \cdots) \times [1 - \tfrac{1}{6} r_0(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi)\varrho^2 + \cdots],$$

$$(8') \quad \sin\psi = (\sin\psi + \cos\psi \cdot a\varrho^2 + \cdots)(1 + b\varrho^2 + \cdots) \times [1 - \tfrac{1}{6} r_0(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi)\varrho^2 + \cdots],$$

in denen die Glieder bis zur zweiten Ordnung in ϱ genau angegeben sind. Hieraus folgt durch Vergleichung:

$$0 = -\sin\psi \cdot a + \cos\psi \cdot b - \tfrac{1}{6} r_0\cos\psi(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi),$$
$$0 = +\cos\psi \cdot a + \sin\psi \cdot b - \tfrac{1}{6} t_0\sin\psi(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi);$$

1) Diese Gleichungen für ξ, η, ζ finden sich bereits in Abhandlungen von Diguet und Puiseux, die 1848 im *Journal de math.* (1) **13** erschienen sind. Im Jahre 1892 sind sie von Ruofs wiedergefunden worden (Z. f. Math. u. Phys. **37**), dem jene Entwickelungen unbekannt geblieben waren.

Digitized by Google

mithin wird

$$a = \tfrac{1}{6}(t_0 - r_0)\cos\psi\sin\psi(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi),$$

und für das Azimuth der geodätischen Linie, die von P nach Q geht, hat sich so ergeben:

$$\varphi = \psi + \tfrac{1}{6}(t_0 - r_0)\cos\psi\sin\psi(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi)\varrho^2 + \cdots \tag{9}$$

Da $\sigma = \varrho + b\varrho^3 + \cdots$ ist, wo man nebenbei bemerkt

$$b = \tfrac{1}{6}(r_0\cos^2\varphi + t_0\sin^2\varphi)^2$$

zu setzen hat, so wird genau, bis auf Gröfsen zweiter Ordnung einschliefslich, auch:

$$\varphi = \psi + \tfrac{1}{6}(t_0 - r_0)\cos\psi\sin\psi(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi)\sigma^2 + \cdots,$$

und das ist die Formel, zu der Herr Weingarten durch ein anderes Verfahren in § 24 des Buches des Generals Baeyer (S. 91) gelangt ist.

Es bleibt übrig, die Azimuthe in P der beiden Normalschnitte durch P und durch Q zu bestimmen. Für den ersten Normalschnitt ist das gesuchte Azimuth offenbar gleich ψ. Für den zweiten ergiebt es sich rasch durch folgende Überlegung. Die Richtungscosinus der Normale in Q sind proportional

$$r_0 x + \cdots, \quad t_0 y + \cdots, \quad -1.$$

Mithin wird die Ebene, die durch P, Q und die Normale in Q hindurchgeht, dargestellt durch die Gleichungen:

$$\xi = \varkappa x + \lambda(r_0 x + \cdots), \ \eta = \varkappa y + \lambda(t_0 y + \cdots), \ \zeta = \varkappa z - \lambda,$$

und den Normalschnitt, den diese Ebene aus der Fläche ausschneidet, erhält man durch dieselben Gleichungen, wenn darin λ als Funktion von $\varkappa$ durch die Gleichung der Fläche:

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(r_0\xi^2 + t_0\eta^2) + \cdots$$

bestimmt wird. Die Richtungscosinus der Tangente des Normalschnittes im Punkte ξ, η, ζ sind proportional den Ableitungen von ξ, η, ζ nach $\varkappa$, also proportional den Gröfsen:

$$x + \frac{d\lambda}{d\varkappa}(r_0 x + \cdots), \ y + \frac{d\lambda}{d\varkappa}(t_0 y + \cdots), \ z - \frac{d\lambda}{d\varkappa}.$$

Für den Punkt P hat man hierin $\varkappa = 0$ zu setzen, wodurch auch $\lambda = 0$ wird. Nun weifs man aber, dafs die Tangente im Punkte P an den betrachteten Normalschnitt in der xy-Ebene liegt. Folglich ist für $\varkappa = 0$ auch

$$z - \frac{d\lambda}{d\varkappa} = 0,$$

Digitized by Google

mithin für $x = 0$:

$$\frac{d\lambda}{dx} = \tfrac{1}{2}(r_0 x^2 + t_0 y^2) + \cdots.$$

Wenn also wieder

$$x = \cos\psi \cdot \varrho, \quad y = \sin\psi \cdot \varrho$$

gesetzt wird, so sind die gesuchten Richtungscosinus proportional den Gröfsen:

$$\cos\psi + \tfrac{1}{2}(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi)\varrho^2(r_0\cos\psi + \cdots),$$
$$\sin\psi + \tfrac{1}{2}(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi)\varrho^2(t_0\sin\psi + \cdots),$$
$$0.$$

Die Summe der Quadrate dieser Ausdrücke unterscheidet sich von 1 nur um eine Gröfse der Ordnung ϱ^2. Da nun im Pnnkte P die Richtungscosinus der Tangente des Normalschnittes durch P gleich $\cos\psi$, $\sin\psi$, 0 sind, so wird der Sinus des Winkels in P zwischen den beiden Normalschnitten, und damit auch der Winkel (in Bogenmafs) selbst genau, bis auf Gröfsen zweiter Ordnung einschliefslich, gleich:

(10) $$\tfrac{1}{2}(t_0 - r_0)\cos\psi\sin\psi(r_0\cos^2\psi + t_0\sin^2\psi)\varrho^2 + \cdots.$$

Aus den Formeln (9) und (10) ergiebt sich sofort das Theorem von Herrn Weingarten.

Kiel, im Januar 1902.

Zur Lehre von der Teilbarkeit dekadischer Zahlen.

Von H. Züge in Linden.

In dem Artikel: „Über die Kennzeichen der Teilbarkeit dekadischer Zahlen“ Arch. (2) **17**[1]) ist von mir ein weniger bekanntes Verfahren eingehend behandelt, das dort als zweites Verfahren bezeichnet ist. Es besteht im allgemeinen darin, dafs von der zu untersuchenden Zahl eine oder mehrere rechtsstehende Ziffern abgeschnitten werden, von der übrigbleibenden Zahl ein bestimmtes Vielfaches der aus den abgeschnittenen Ziffern gebildeten Zahl subtrahiert und der Rest auf seine Teilbarkeit durch denselben Teiler untersucht wird, wobei dasselbe Verfahren wieder angewandt werden kann. Als besonderes Beispiel sei auch hier die

1) Leider sind in dem Artikel so zahlreiche Druckfehler stehen geblieben, dafs ich diejenigen Leser, welche sich für das behandelte Thema interessieren, auf meine Programmarbeit: Allgemeine Regeln über die Kennzeichen der Teilbarkeit dekadischer Zahlen, wissenschaftl. Beilage zum Programm des Königl. Gymnasiums zu Wilhelmshaven 1898, verweisen mufs.

Digitized by Google

Regel über die Teilbarkeit durch 7 angeführt: Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn die nach Abstreichen der letzten Ziffer entstandene Zahl, um das Doppelte der letzten Ziffer vermindert, durch 7 teilbar ist.

Da die Untersuchung auf immer kleinere Zahlen zurückgeführt wird, kann man das Verfahren Reduktionsverfahren nennen. Es gründet sich auf folgenden, leicht zu beweisenden Satz: Eine Zahl $10x + y$ ist durch eine andere Zahl p teilbar, wenn $x - qy$ durch p teilbar ist, wobei q eine Zahl von der Beschaffenheit ist, daſs $10q + 1$ durch p teilbar ist.

Dies gilt allgemein, was auch x und y für Zahlen sein mögen; doch setzen wir im folgenden voraus, daſs y nur die letzte Ziffer einer dekadischen Zahl sei, woraus die Bedeutung von x von selbst folgt. Die Gröſse q heiſse Reduktionsfaktor. Für einen bestimmten Teiler p giebt es beliebig viele solcher Gröſsen, die aber eine arithmetische Reihe bilden. Die kleinste positive Gröſse q heiſse Hauptreduktionsfaktor. Man kann ihn durch folgende einfache Überlegung ermitteln.

Wenn $10q + 1$ durch p teilbar sein soll, so heiſst dies, ein Vielfaches von p soll eine Zahl sein, die als letzte Ziffer die 1 hat. Zunächst ist klar, daſs dies nicht möglich ist, wenn p 2 oder 5 als Faktor hat, und solche Teiler schlieſsen wir hier aus, wie es auch in jenem Artikel geschehen ist. Hat aber der Teiler als letzte Ziffer 1, 3, 7 oder 9, so kann man stets ein Vielfaches finden, dessen letzte Ziffer 1 ist. Das kleinste derartige Vielfache findet man durch Multiplikation der Zahl mit den Faktoren 1, 7, 3 oder 9. Dann hat das Vielfache die Form $10q + 1$. Man braucht also nur 1 zu subtrahieren und dann durch 10 zu dividieren, d. h. man braucht nur in der dekadischen Zahl die 1 wegzulassen, so hat man q, den Reduktionsfaktor. Man erhält daher die einfache und ganz allgemein gültige Regel: *Um für einen bestimmten Teiler den Hauptreduktionsfaktor zu bestimmen, multipliziere man den Teiler mit 1, 3, 7 oder 9, so daſs das Produkt auf 1 endet, und streiche diese 1 ab.*

Beispiel: Zu untersuchen, ob 981491 durch 217 teilbar ist. Man bilde $217 \cdot 3 = 651$ und lasse die 1 weg. 65 ist also der Hauptfaktor Die Untersuchung kann nun nach folgendem Schema geschehen:

	981491
$65 \cdot 1 =$	65
	98084
$65 \cdot 4 =$	260
	9548
$65 \cdot 8 =$	520
	434

434 ist durch 217 teilbar, also auch 981491.

Digitized by Google

Für die ersten ungeraden Primzahlen sind die zugehörigen Reduktionsfaktoren folgende.

Primzahlen: 3, 7, 11, 13, 17, 19.
Reduktionsfaktor: 2, 2, 1, 9, 5, 17.

Wir stellen hierbei noch die Frage: unter welchen Bedingungen ergiebt sich bei diesem Verfahren einmal der Rest 0?

Ist die Zahl $z = 10x + y$ und der Reduktionsfaktor q, so mufs also, wenn das Verfahren in allgemeinen Gröfsen ausgedrückt wird, y von z subtrahiert, dann durch 10 dividiert und dann qy subtrahiert werden. Ist die nun entstehende Zahl $10x_1 + y_1$, so mufs wieder y_1 subtrahiert, dann durch 10 dividiert und qy_1 subtrahiert werden, u. s. f., bis der Rest 0 erscheint. Dies kann man in folgender Form ausdrücken:

$$z - (10q + 1)(y + 10y_1 + 10^2 y_2 + 10^3 y_3 + \cdots) = 0,$$

somit

$$\frac{z}{10q+1} = y + y_1\,10 + y_2\,10^2 + y_3\,10^3 + \cdots$$

Führt also das Verfahren zu Null, so mufs z durch $10q + 1$ teilbar sein, d. h. durch das Produkt μp des Teilers, der den Reduktionsfaktor liefert, und die abgestrichenen Ziffern sind die Ziffern des Quotienten $z : \mu p$, der Reihe nach von der Ziffer der niedrigsten Ordnung beginnend. Führt aber bei einer Zahl ζ das Verfahren nicht zur 0, obwohl p ein Teiler ist, und ist μp das Produkt, welches den Reduktionsfaktor liefert, so ist jedenfalls $\mu\zeta$ durch μp teilbar und für $\mu\zeta$ würde man durch das Verfahren den Rest 0 sowie die Ziffern des Quotienten $\mu\zeta : \mu p = \zeta : p$ erhalten. Man kann daher Folgendes festsetzen:

Kommt es bei der Untersuchung im Falle der Teilbarkeit auch darauf an, den Quotienten kennen zu lernen, so multipliziere man die Zahl mit demselben Faktor, mit dem man den Teiler multipliziert hat, um den Reduktionsfaktor zu bestimmen, führe das Verfahren bis zum Reste 0 durch und bilde aus den abgestrichenen Ziffern, von der letzten anfangend, eine neue Zahl, so ist diese der gesuchte Quotient.[1])

1) Das hier von dem am 10. Januar 1902 verstorbenen Verf. beschriebene Verfahren ist nicht neu. Insbesondere hat A. Gugliuzzo-Fazio 1889 in Palermo bei Clausen die kleine Schrift von 16 Seiten veröffentlicht: „Sui caratteri di divisibilità per 7, 13, 17 e pei numeri della forma $q \cdot 10 + 1$“, und 1897 in Palermo bei Reber die Broschüre von 28 Seiten: „Sui multipli dei numeri della forma $10q + r$ con $r = 1, 3, 7, 9$ e sopra una operazione di divisibilità“, wo genau dieselben Operationen durchgeführt werden. Hr. Vivanti, der diese Arbeiten im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik angezeigt hat, weist in dem Referate über die erste Schrift auf noch frühere Quellen hin. Seitdem ist die Methode besonders in Italien, aber auch in Frankreich wiederholt Gegenstand der Erörterung gewesen. Red.

Digitized by Google

So war im obigen Beispiele $981491 : 217$ der Teiler mit 3 multipliziert, um den Reduktionsfaktor 65 zu erhalten. Man bilde also $3 \cdot 981491 = 2944473$ und führe die Untersuchung durch:

$$\begin{array}{r|l} 2944473 & \\ \cdot\ 195 & \\ \hline 29425 & 2 \\ \cdot\ 130 & \\ \hline 2929 & 5 \\ \cdot\ 325 & \\ \hline 2604 & \\ 260 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Somit ist $\frac{981491}{217} = 4523$.

Linden, Januar 1901.

Über gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie.

Von GEORG MAJCEN in Agram.

Die Lösung eines besonderen Problems erforderte zunächst die Konstruktion einer Geraden, welche zu einem Dreieck in einer speziellen Beziehung steht. *Diese Gerade sollte die Dreiecksseiten in solchen drei Punkten schneiden, dafs die drei Strahlen, welche diese Schnittpunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbinden, mit den betreffenden Seiten denselben Winkel* (ω) *einschliefsen.* Es wird im Nachstehenden die Konstruktion solcher Geraden gegeben. Die näheren Untersuchungen ergaben, dafs diese Aufgabe nur als ein spezieller Fall einer allgemeineren aufgefafst werden mufs; sie führten mich auf *besondere Kegelschnittscharen,* deren Bestimmung hier festgelegt werden soll, da jene meines Wissens bisher unbemerkt geblieben zu sein scheinen.

In den ersten Artikeln werden (teilweise auch bekannte) Sätze abgeleitet, welche für die Folge von Nutzen sein werden. Diese Ableitungen dürften in dem Bezwecken eines möglichst synthetisch zu haltenden Vorgangs hier ihre Berechtigung finden.

1. Wir nehmen ein spitzwinkliges Dreieck ABC (Fig. 1) an und bezeichnen seine drei Höhen mit h_a, h_b, h_c. Aus dem Büschel gleich-

Digitized by Google

seitiger Hyperbeln, welche durch die Eckpunkte und den Höhenpunkt (H) des gegebenen Dreiecks gehen, heben wir besonders diejenigen hervor, welche ihre Mittelpunkte auf den Dreiecksseiten haben.

Eine dieser Hyperbeln, deren Mittelpunkt O_a auf BC liegt, sei h_a. Man erhält ihre Punkte als Schnitte entsprechender Strahlen in den entgegengesetzt gleichen projektiven Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte die Eckpunkte B und C sind. Die beiden Höhen h_b und h_c stellen ein Paar entsprechender Strahlen in diesen Büscheln $[B]$ und $[C]$ dar.

Ziehen wir einen beliebigen Strahl x_2 des Büschels $[B]$; sein entsprechender Strahl x_3 im Büschel $[C]$ bildet mit h_c denselben Winkel

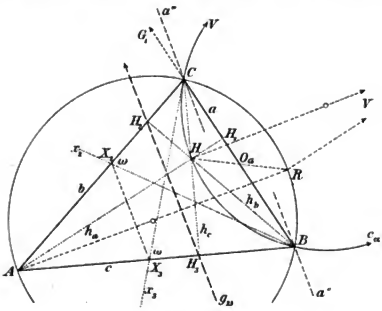


Fig. 1.

$(h_c x_3)$, wie die beiden Strahlen h_b, x_2 in $[B]$, wobei der Sinn der Drehung in beiden Winkeln ein entgegengesetzter ist. Die entsprechenden Strahlen x_2 und x_3 schneiden die bezüglichen Seiten b und c in den Punkten X_2 und X_3. Die Dreiecke BH_2X_2 und CH_3X_3 (wo H_2 und H_3 Höhenfußpunkte sind) sind somit ähnlich; es schließen also die Strahlen x_2 und x_3 mit den Seiten b bezw. c denselben Winkel (ω) ein. In den projektiven Büscheln $[B]$ und $[C]$ sind die Seiten b und c ein entsprechendes Strahlenpaar.

Dem Strahle a des Büschels $[B]$ entspricht im Büschel $[C]$ ein Strahl a''' und jenem Strahle im Büschel $[C]$ ein Strahl a'' im Büschel $[B]$. Beide Strahlen a'' und a''' sind bekanntlich Tangenten der Kurve k_a, da aber BC ein Durchmesser dieser Kurve sein wird, so sind a'' und a''' parallel.

Digitized by Google

Die Seiten c und b des Fundamentaldreiecks werden von den Strahlen der Büschel $[B]$ und $[C]$ in zwei projektiven Punktreihen geschnitten, welche notwendig perspektiv sein werden, da im Punkte A ein entsprechendes Punktepaar vereinigt ist.

Die Strahlen a'' und a''' stellen die Verbindungslinien von zwei Paaren entsprechender Punkte dieser perspektiven Punktreihen dar. Es ist somit der perspektive Mittelpunkt beider Reihen unendlich fern, da die Strahlen a'' und a''' parallel sind.

Die Verbindungsgerade g_{23} der Fußpunkte H_2 und H_3 der Höhen h_b und h_c ist somit als ein Strahl des Scheines beider perspektiven Reihen c und b zu den Strahlen a'' und a''' parallel.

Je *zwei Strahlen* also, welche durch die Eckpunkte B und C so gezogen werden, daß sie mit den gegenüberliegenden Seiten (b und c) bezw. *denselben Winkel* (ω) *bilden*, schneiden diese Seiten in zwei Punkten, *deren Verbindungsgerade zur Geraden* g_{23} *parallel ist.*

Da in der Hyperbel k_a die Tangenten a'' und a''' dem Durchmesser a (BC) konjugiert sind, so ist also g_{23} der Richtung nach demselben Durchmesser konjugiert.

Bei einer gleichseitigen Hyperbel halbieren bekanntlich die Asymptoten die Winkel konjugierter Durchmesserpaare. Zieht man also im Dreieck ABC die Höhen h_b und h_c, verbindet ihre Fußpunkte H_2 und H_3, und sucht die Symmetralen desjenigen Winkels, welcher von der Verbindungsgeraden H_2H_3 (oder g_{23}) und der Seite BC eingeschlossen wird, so sind diese die Richtungen der Asymptoten jener gleichseitigen Hyperbel, welche dem Dreieck ABC umgeschrieben ist und ihren Mittelpunkt in der Mitte O_a von BC hat.

2. Ich habe gezeigt, daß ein durch die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel gelegter Kreis die Kurve noch in zwei Punkten schneidet, welche mit einander verbunden einen *Durchmesser jenes Kreises* liefern. Dieser Durchmesser steht auf demjenigen Durchmesser der Hyperbel *senkrecht*, welcher dem zuerst gewählten Durchmesser der Hyperbel *konjugiert* ist.[1])

Ziehen wir den Umkreis des Dreiecks ABC und in diesem den Durchmesser durch den Eckpunkt A, so wird dieser nach dem obigen Satze auf g_{23} senkrecht stehen, da der Umkreis durch einen Durchmesser (BC) der gleichseitigen Hyperbel k_a geht. Wir können somit sagen:

---

1) Hoffmanns Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. **31**, 599.

Digitized by Google

Die Verbindungslinie der Fußpunkte zweier Höhen im Dreieck ABC steht auf demjenigen Durchmesser des Umkreises senkrecht, welcher durch den dritten Eckpunkt des Dreiecks geht.

Der Durchmesser durch den Eckpunkt A schneidet die gleichseitige Hyperbel in seinem anderen Endpunkt (R). Es steht also die Sehne CR auf der Seite b des Fundamentaldreiecks senkrecht, und es ist deshalb CR zur Höhe h_b parallel. Die durch die Endpunkte B und C des Hyperbeldurchmessers gezogenen parallelen Sehnen CR und BH schneiden die Kurve k_a in den Punkten R und H, deren Verbindungslinie ein Durchmesser der Kurve sein mufs. Man sieht, in welcher Weise dieses mit der Hyperbel k_a im Zusammenhange steht; für das Dreieck ABC folgt aber:

Der durch einen Eckpunkt (A) des Dreiecks ABC gezogene Durchmesser des Umkreises schneidet diesen in einem Punkte R. Die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Höhendurchschnitte (H) des Dreiecks schneidet die gegenüberliegende Seite (BC) in einem Punkte O_a, welcher die Seite BC und die Strecke RH zugleich halbiert. Der Punkt R hat daher von einem der Eckpunkte B oder C dieselbe Entfernung wie der Punkt H vom anderen.

(Wenn wir bemerken, dafs der Winkel RBA ein rechter ist, so folgt weiter, dafs $\sphericalangle RBC = \sphericalangle(a''h_b)$ ist; es sind also h_b und BR die Richtungen zweier konjugierten Durchmesser von k_a).

Ziehen wir denjenigen Kreis (c_a) durch die Punkte B und C des Durchmessers BC, welcher aufserdem noch durch den Höhenpunkt H geht, so schneidet nach Obigem der Durchmesser durch H diesen Kreis noch in einem Punkte V der gleichseitigen Hyperbel k_a. Die Gerade HV ist zu AR parallel, da diese beiden auf g_{23} senkrecht stehen müssen.[1]) Es ist also (weil HR ein Durchmesser der Kurve ist) das Viereck $AHVR$ ein der Kurve eingeschriebenes *Parallelogramm* und die Diagonale AV desselben ein Durchmesser der Kurve k_a. Wegen $\overline{AR} = \overline{HV}$ ist also wieder der Satz bewiesen:

„Die drei durch je zwei Eckpunkte und den Höhenpunkt gelegten Kreise des Dreiecks ABC haben *gleiche* Halbmesser wie der Umkreis."

Die vier Punkte A, B, V und C sind auch Eckpunkte eines der Hyperbel k_a eingeschriebenen Parallelogrammes. Es lassen sich gleiche Sätze für die beiden anderen Hyperbeln (O_b und O_c sind ihre Mittelpunkte) beweisen. Beschreibt man die drei Kreise c (also ABH, BCH und ACH) und verbindet die Eckpunkte mit den Mitten der

1) Siehe vorige Note.

Digitized by Google

gegenüberliegenden Seiten, so bekommt man auf den Kreisen c drei Punkte V, welche, mit einander verbunden, ein dem Fundamentaldreieck umschriebenes, diesem ähnliches Dreieck liefern.

Die drei Punkte R werden erhalten, wenn man durch alle drei Eckpunkte des Dreiecks Durchmesser des Umkreises zieht und deren zweite Endpunkte sucht. Die drei Hyperbeln k_a, k_b und k_c schneiden demnach den Umkreis des Dreiecks ABC in den Punkten R, welche, mit einander verbunden, ein dem Fundamentaldreieck kongruentes Dreieck bilden u. s. w.

Der Höhenpunkt H bildet mit den zwei Punkten H_2, H_3 und dem Eckpunkt A ein vollständiges Viereck. Seine zwei gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in C und die zwei anderen in B. Eine Diagonale schneidet BC in H_1, die andere (g_{23}) in G_1. Diese vier Punkte B, C, H_1 und G_1 sind daher harmonisch. Projiziert man diese aus H_2, so bekommt man vier harmonische Strahlen $H_2(B, C, H_1, G_1)$. Da aber zwei von diesen Strahlen (H_2B und H_2C) auf einander senkrecht stehen, so bilden die zwei anderen H_2H_1 und H_2G_1 (oder H_2H_3) bekanntlich mit den ersteren dieselben Winkel. Dasselbe folgt auch für zwei andere Paare H_3H_2, H_3H_1 und H_1H_2, H_1H_3. Wir können also sagen:

Zieht man durch die Eckpunkte eines Dreiecks je zwei Gerade so, dafs alle mit den gegenüberliegenden Seiten *denselben* Winkel einschliefsen, so liegen ihre sechs Schnittpunkte[1]) mit diesen Seiten auf einem zu dem Dreieck homothetischen Dreieck, von welchem je zwei Seiten mit je einer der bezüglichen Seiten des Fundamentaldreiecks dieselben Winkel einschliefsen.

3. Wir wollen in der Folge eine interessante Beziehung zwischen den Asymptoten der drei gleichseitigen Hyperbeln k_a, k_b und k_c beweisen.

Verlängert man eine Seite (H_1H_2) des Höhenfufspunktdreiecks bis zum Durchschnitte (II) mit der gegenüberliegenden Seite (AB) eines gegebenen Dreiecks ABC, so läfst sich zunächst beweisen, dafs die Halbierungslinie (g) des Winkels $H_2\,\mathrm{II}\,A$ auf der Halbierungslinie (g') des Dreieckswinkels C senkrecht steht. (Fig. 2.) Wir ziehen g' senkrecht zu g.

Die Winkel H_2Cg' und $H_2\,\mathrm{II}\,g$ sind dem Winkel $g\,\mathrm{II}\,A$ gleich. Man fälle aus C das Lot auf $H_2\,\mathrm{II}$. Es sind wieder die Winkel $g'CJ$ und $H_2\,\mathrm{II}\,g$ gleich, ebenso die Winkel BCH_3 und H_1AB, andererseits JCH_2 und H_1H_2B. Wir haben nun die Gleichheit der Winkel H_1H_2B

1) Siehe Fig. 3.

Digitized by Google

und H_1AB zu beweisen. Diese Winkel haben H_1H_2C bezw. CBH_3 zu Komplementärwinkeln. Die letzteren sind aber bekanntlich gleich.[1]) Aus diesem Grunde sind also auch die Winkel BCH_3 und JCH_2 einander gleich, und es ist schliefslich bewiesen, dafs die Senkrechte g' auf g den Winkel bei C halbiert. Zieht man durch C eine Normale (g'') zu g', so wird diese zu g parallel sein und den Aufsenwinkel bei C halbieren.

Konstruiert man auf dieselbe Weise die durch den Eckpunkt B zur Halbierungslinie des Winkels, welchen AC und H_1H_3 einschliefsen, gehende Parallele (g'''), so halbiert diese aus demselben Grunde den Aufsenwinkel bei B. Die Geraden g'' und g''' schneiden einander im

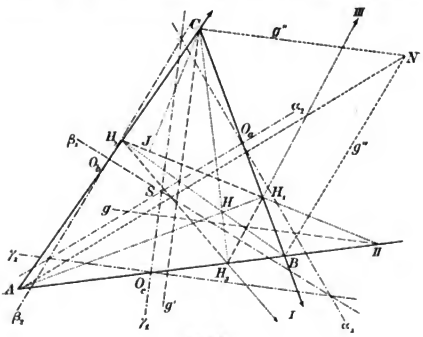


Fig. 2.

Mittelpunkte (N) des Ankreises für die Seite BC. Zieht man die Verbindungslinie AN, so halbiert diese bekanntlich den Winkel bei A und steht wieder, wie früher bewiesen, auf der Halbierungslinie des Winkels, welchen BC und H_2H_3 einschliefsen, senkrecht.

Wir haben oben gezeigt, dafs die Asymptoten der drei Hyperbeln k_a, k_b und k_c mit den Halbierungslinien (g) der Winkel H_2IC, H_3IIIA und H_1IIB parallel sind, und dafs sie durch die Mitten der bezüglichen Seiten a, b und c des gegebenen Dreiecks gehen. Die anderen drei Asymptoten stehen auf den bezüglichen ersteren senkrecht.

1) Es ist $\sphericalangle CH_2H_3 + \sphericalangle CBH_3 = 180°$, also $\sphericalangle H_3H_2A = \sphericalangle CBH_3$; da aber nach dem vor. Art. $\sphericalangle H_1H_2B = \sphericalangle BH_3H_2$ und deshalb $\sphericalangle H_2H_3A = \sphericalangle H_1H_2C$, so ist auch $\sphericalangle H_1H_2C = \sphericalangle CBH_3$. Ähnlich der Beweis für $\sphericalangle CH_1H_2 = \sphericalangle H_2AH_3$ und $\sphericalangle H_2H_3A = \sphericalangle H_1CH_2$ (Antiparallelen).

Digitized by Google

Wir finden, wie oben gezeigt, dasselbe für alle drei Mittelpunkte (N) der Ankreise.

Man kann bekanntlich einen jeden Punkt (N) in der Ebene eines Dreiecks als einen Mittelpunkt für den dem Dreieck umgeschriebenen Kegelschnitt ansehen.[1]) Mit Rücksicht auf einen Satz von Steiner[2]) schneiden sich also drei von den Asymptoten der Hyperbeln k_a, k_b, k_c, welche zu den Verbindungslinien NB, NC und NA parallel laufen, in einem Punkte.

Es folgt dasselbe auch für die beiden anderen Mittelpunkte N der Ankreise, also auch für die weiteren zwei Tripel der Asymptoten.

Es sind aus diesem Grunde drei von den Asymptoten die Höhen in dem Dreiecke, welches von den anderen drei gebildet wird. Wir können also sagen:

Die sechs Asymptoten $\alpha_1\alpha_2$, $\beta_1\beta_2$, $\gamma_1\gamma_2$ der drei gleichseitigen Hyperbeln k_a, k_b und k_c schneiden sich zu dreien in vier Punkten, von welchen ein jeder ein Höhenpunkt für das von den drei anderen gebildete Dreieck ist.

Eines von diesen Asymptoten-Tripeln hat einen Punkt S zum Schnittpunkt, welcher der *Mittelpunkt des Inkreises für das Mittendreieck* $O_aO_bO_c$ ist. Denn die Winkel, welche die Verbindungslinien O_aO_c und O_bO_c mit einer der Asymptoten durch O_c bilden, sind gleich, da diese Asymptote die Höhe im Asymptotendreiecke der drei übrigen Tripelschnittpunkte ist. Ebenso für beide andere Paare der Seiten im Mittendreiecke u. s. w.

Es ist sehr leicht zu beweisen, dafs die Mitten aller sechs Strecken, welche von den Schnittpunkten der Asymptotentripel begrenzt sind, auf dem Feuerbachschen Kreise des gegebenen Dreiecks liegen.

Man kann dem Dreiecke der Schnittpunkte aller vier Asymptotentripel (wenn der vierte S als sein Höhenpunkt betrachtet wird) wieder einen Büschel von gleichseitigen Hyperbeln umschreiben und diesen Büschel dem für das Urdreieck projektiv zuordnen. Dieses Beziehen

---

1) Siehe Steiners gesamm. Werke (Weierstrafs) II, S. 329, 669, weiter Steiner-Schröter, D. Th. d. Kegelschn. gest. a. proj. Eig., II. Aufl., S. 219.

2) Dieser Satz lautet: „Une conique quelconque étant circonscrite à un triangle donné ABC, et étant menées par son centre P et par les milieux A', B', C' des côtés du triangle les droites PA', PB', PC'; les droites AA'', BB'', CC'', menées par les sommets du même triangle parallèlement à celles-là, se couperont toutes trois en un même point P'; . . , et réciproquement . . ." Steiners gesamm. W. I, S. 203, 204.

Digitized by Google

führt sowohl zu kubischen Involutionen auf dem Feuerbachschen Kreise, als auch zur Erzeugung besonderer höherer Kurven.[1])

4. Wir ziehen durch die Eckpunkte A, B, C eines *spitzwinkligen* Dreiecks je zwei Strahlen, welche mit den gegenüberliegenden Seiten alle denselben Winkel (ω) einschliefsen. Nach dem vorigen Art. sind die drei Verbindungslinien der Schnittpunkte mit den betreffenden Seiten zu den drei Verbindungslinien g_{12}, g_{23} und g_{31} parallel. Die zwei dieser Schnittpunkte auf der Seite a bezeichnen wir mit A_1 und A_2, die auf b mit B_1 und B_2 und die auf c mit C_1 und C_2. Es entsteht ein Sechseck $A_1A_2C_1C_2B_1B_2$, für welches wir beweisen wollen, *dafs seine Eckpunkte immer auf einem Kegelschnitte liegen.* (Fig. 3.)

Man kann dem Dreieck ABC einen Kegelschnitt einschreiben, welcher die drei Seiten in den Punkten $H_1H_2H_3$ berührt. Dieser kann für das spitzwinklige Dreieck nur eine *Ellipse* sein.[2])

Die Geraden g_{12}, g_{23} und g_{31} schneiden die gegenüberliegenden Seiten c, a und b des Dreiecks in den Punkten III, II und I, welche auf der Pascalschen Geraden für das degenerierte Sechseck H_1, H_2, H_3 liegen.

Beide Dreiecke ABC und $H_3H_2H_1$ sind daher zentrisch kollinear, was auch daraus folgt, dafs die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte durch denselben Punkt (H) gehen.

Verlängert man die Geraden A_1B_2, B_1C_2 und C_1A_2 bis zu den gegenseitigen Durchschnittspunkten, so bekommt man ein Dreieck $A_0B_0C_0$, welches mit dem Dreieck $H_1H_2H_3$ zentrisch kollinear liegt, da ihre Seiten paarweise parallel sind. Nach dem Satze am Schlusse des Art. 2 ist das Kollineationszentrum dieser Dreiecke der Punkt H; denn die Eckpunkte A_0, B_0, C_0 liegen mit H_1, H_2, H_3 paarweise auf Geraden durch H. Auf denselben liegen aber auch die Eckpunkte A, B, C. Die Dreiecke $A_0B_0C_0$ und ABC sind also auch zentrisch kollinear; ihre drei Paar Seiten, welche sich auf der Kollineationsachse (h) schneiden, sind aber die *Gegenseiten des Sechseckes* $A_1A_2C_1C_2B_1B_2$. Die Kollineationsachse (h) ist demnach *die Pascalsche Gerade für einen Kegelschnitt, welcher durch jene sechs Punkte gehen mufs.*[3])

---

1) Die in diesem Sinne geführten Untersuchungen, welche ich demnächst veröffentlichen werde, ergaben viele eigentümliche Resultate.

2) J. Steiners gesamm. Werke (Weierstrafs) I: Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques, S. 200.

3) Vergl. die Ähnlichkeit dieses Resultates mit dem aus anderen Bestimmungsstücken von Gerlach, Zu den Pascalschen und Brianchonschen Gebilden, Hoffmanns Zeitschr. **16**, 484.

Digitized by Google

Verbinden wir die Punkte B_2 und C_1 (Fig. 3), so mufs die Verbindungslinie zu den Geraden H_2H_3 und B_1C_2 parallel sein; denn H_2 ist die Mitte der Strecke B_1B_2 und H_3 die Mitte von $\overline{C_1C_2}$, und nach dem Vorigen B_1C_2 zu H_2H_3 parallel.

Halbiert man die Strecke H_2H_3 in T und zieht AT, so werden auch $\overline{B_1C_2}$ und $\overline{B_2C_1}$ von dieser Geraden halbiert. Da aber B_1C_2 und B_2C_1 zwei parallele Sehnen des Kegelschnittes $A_1A_2C_1C_2B_1B_2$ (oder kurz k_∞) sind, so geht die Gerade AT durch den Mittelpunkt (M) dieses Kegelschnittes. Die Gerade H_2H_3 ist die Polare des Punktes A in Bezug auf den dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitt

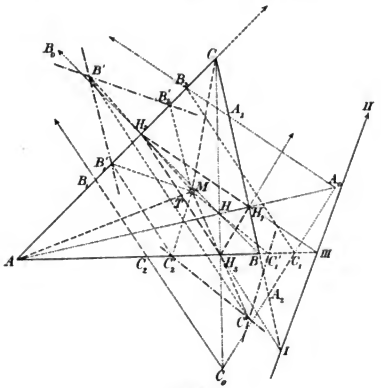


Fig. 3.

$H_1H_2H_3$ (oder k); die Gerade AT geht also auch durch den Mittelpunkt von k. Ähnlich läfst sich beweisen, dafs A_1C_2, A_2C_1 und A_1B_2, A_2B_1 zwei Paar paralleler Sehnen für den Kegelschnitt k_∞ sind, und dafs die Verbindungslinien ihrer Mitten durch den Mittelpunkt des Kegelschnittes k gehen.[1]) *Beide Kurven k und k_∞ sind daher konzentrisch.* Da den drei Sehnenrichtungen B_1C_2, A_1B_2 und C_1A_2 drei konjugierte Durchmesser in k_∞ entsprechen, deren Richtungen mit den bezüglichen Durchmessern von k identisch sind, so folgt, *dafs die Involution konjugierter Durchmesser für k und k_∞ gemeinsam ist;* beide Kegel-

1) Bezüglich weiterer Tangentenkonstruktionen von k sehe man: Hoffmanns Zeitschrift **31**, 522.

Digitized by Google

schnitte sind demnach *homothetisch*. Dasselbe gilt für jeden beliebigen Kegelschnitt k_ω, welcher auf die angegebene Weise konstruiert wird, in Bezug auf den Kegelschnitt k; es folgt also allgemein:

Drei Seiten eines spitzwinkligen Dreiecks nehme man als Träger von gleichseitig-hyperbolischen Involutionen, für welche die Höhenfußpunkte des Dreiecks die im Endlichen liegenden Doppelpunkte sind. Je zwei dieser drei Involutionen seien perspektiv. Einem konjugierten Punktepaare einer dieser Involutionen entspreche in jeder der beiden anderen ein konjugiertes Punktepaar derartig, daß alle drei Paare aus den gegenüberliegenden Eckpunkten durch Gerade projiziert werden, welche mit ihren bezüglichen Trägern denselben Winkel (ω) *einschließen. Je drei entsprechende konjugierte Punktepaare dieser Involutionen liegen auf einem Kegelschnitte. Alle diese Kegelschnitte* (k_ω) *sind homothetisch und konzentrisch.*

5. Durch einen der Eckpunkte A, B, C geht im allgemeinen nur ein solcher Kegelschnitt k_ω. Die Tangenten in den Eckpunkten A, B und C an diese Kegelschnitte sind bezüglich zu den drei Geraden H_1H_2, H_2H_3, H_3H_1 parallel. Da aber bekanntlich auch der Umkreis von ABC in A, B und C dieselben Tangenten besitzt, so folgt:

Der Umkreis des Dreiecks ABC wird in den Eckpunkten von den drei durch diese Eckpunkte gehenden Kegelschnitten k_ω berührt.

Durch einen jeden Punkt der Ebene geht nur ein Kegelschnitt k_ω und eine jede Gerade berührt einen derselben. Für alle Kegelschnitte k_ω fanden wir drei Paare konjugierter Durchmesser und zwar AT und B_1C_2, u. s. w. Es sind ebenso B_1B_2, H_2M; A_1A_2, H_1M; C_1C_2, H_3M drei Paare konjugierter Durchmesser. Soll nun durch einen beliebigen Punkt der Ebene ein Kegelschnitt k_ω bestimmt, oder ein solcher ermittelt werden, welcher eine gegebene Gerade berührt, so konstruiert man diese k_ω aus dem Punkte (bezw. Tangente) und aus zwei Paaren jener konjugierten Durchmesser auf bekannte Weise.[1])

Es ist somit die Aufgabe gelöst: *„Einen Kegelschnitt zu bestimmen, welcher durch einen gegebenen Punkt geht (oder: eine gegebene Gerade berührt), und die drei Seiten eines gegebenen spitzwinkligen Dreiecks in sechs Punkten schneidet, welche, mit den gegenüberliegenden Eckpunkten verbunden, sechs Gerade liefern, die mit den bezüglichen Seiten alle denselben Winkel* (ω) *einschließen.“*

Beide Tangenten in den Schnittpunkten eines beliebigen von den Kegelschnitten k_ω mit einer Seite des Fundamentaldreiecks, z. B. AC,

1) Reye, D. Geom. d. Lage, III. Aufl., I. Abt., S. 108.

Digitized by Google

schneiden einander in einem Punkte des Durchmessers MH_3, weil die Richtungen AC und MH_3 für alle k_ω konjugiert sind. Andererseits liegt ein jeder Schnittpunkt der genannten Tangenten auch auf der Polare (a') des Eckpunktes A in Bezug auf den betreffenden Kegelschnitt k_ω, welche zu H_2H_3 parallel sein mufs. Ähnliches folgt für die Schnittpunkte von Tangentenpaaren in den Punkten der Kegelschnitte k_ω, welche auf anderen Seiten AB und BC liegen.

Im allgemeinen werden die Durchmesser MB_1 und MB_2, welche durch die Schnittpunkte (B_1 und B_2) eines Kegelschnittes k_ω mit einer Seite (hier AC) gehen, nicht konjugiert sein. Es wird vielmehr nur für *einen* der Kegelschnitte der Fall sein, dafs seine beiden Schnittpunkte mit der Seite AC, verbunden mit M, ein Paar konjugierter Durchmesser liefern. Es ist leicht, dieses Paar zu bestimmen. Die für alle Kegelschnitte k_ω gemeinschaftliche Involution konjugierter Durchmesser und der involutorische Schein der gleichseitig-hyperbolischen Punktinvolution auf AC aus M haben immer ein reelles gemeinschaftliches Paar entsprechender konjugierter Strahlen, da die eine der Involutionen eine elliptische, die andere eine hyperbolische ist. Bestimmt man dieses Paar mittelst eines Steinerschen Hilfskreises, so schneidet dasselbe die Seite AC in den Punkten B_1' und B_2'. Der Kegelschnitt k_ω', welcher durch diese Punkte geht, ist bestimmt; seine beiden Punkte C_1' und C_2' auf AB sind Schnittpunkte dieser Seite mit den durch B_2' und B_1' zu H_2H_3 gezogenen Parallelen; seine Schnittpunkte auf BC werden ähnlich gefunden.

Die Tangenten an k_ω' in den Punkten B_1' und B_2' schneiden einander in einem Punkte B', welcher nach dem Vorigen auf MH_3 liegt, so dafs also das Viereck $MB_1'B'B_2'$ ein *Parallelogramm* ist, weil $B'B_1'$ parallel zu $B_2'M$ und $B'B_2'$ parallel zu $B_1'M$ ist. Wir ziehen auch in den Punkten C_2' und C_1' Tangenten an k_ω', welche sich in C' schneiden mögen. Dieser Punkt C' liegt auf MH_3. Die Verbindungslinie $B'C'$ ist die Polare (a') des Eckpunktes A in Bezug auf k_ω', weil B' und C' Pole von Geraden (AC und AB) sind, die durch A gehen. Wie bereits erwähnt, ist diese Polare (a') zu H_2H_3 parallel. Im Dreieck $B'MC'$ schneidet aber die durch die Mitte H_2 von $B'M$ zur dritten Seite $B'C'$ parallel gezogene Gerade H_2H_3 die zweite Seite MC' auch in der Mitte H_3 von MC'.

Da die Punkte C_1' und C_2' von H_3 gleich weit entfernt sind, so folgt, dafs das Viereck $MC_1'C'C_2'$ auch ein *Parallelogramm* ist. Da aber $C_1'C'$ und $C_2'C'$ Tangenten an k_ω' sind, so stellen *die Geraden* MC_1' *und* MC_2' *auch ein Paar konjugierter Durchmesser* des Kegelschnittes k_ω' dar.

Digitized by Google

Analog läfst sich beweisen, dafs die beiden Schnittpunkte A_1' und A_2' von k_ω' mit BC die Endpunkte eines Paares konjugierter Durchmesser für diesen Kegelschnitt sind. Es folgt also der Satz:

Unter den Kegelschnitten k giebt es immer einen und nur einen solchen (k_ω'), welcher jede der drei Seiten des Fundamentaldreiecks in zwei Punkten schneidet, die für diesen Kegelschnitt Endpunkte je eines Paares konjugierter Durchmesser sind.

Es läfst sich also für ein *jedes spitzwinklige Dreieck* eine Ellipse von der genannten Eigenschaft konstruieren. —

Wir sahen, dafs die Pole (B') für alle Kegelschnitte k_ω in Bezug auf dieselbe Gerade AC auf der Polare (a') von A in Bezug auf alle jene Kegelschnitte, als auch auf der Geraden MH_2 liegen. Auf der letzteren Geraden ist also die Reihe der Pole (B') auf die Kegelschnittsgruppe k_ω eindeutig bezogen. Die symmetrische Involution auf AC besitzt einen Doppelpunkt H_2, welcher als Pol für die Gerade AC in Bezug auf den dem Dreieck ABC eingeschriebenen Kegelschnitt $(H_1H_2H_3)$ auch der Reihe der Pole auf MH_2 angehört.

Es ist nun leicht zu erkennen, dafs die Reihe der Pole auf MH_2 zu der symmetrisch-involutorischen Punktreihe auf AC in einer *ein-zweideutigen* Beziehung steht, da doch einem jeden Pole zwei konjugierte Punkte der Involution auf AC und einem jeden Punkte auf dieser ein einziger (Pol) auf MH_2 entspricht.

Die ein-zweideutigen Reihen befinden sich in einer *„reduzierten" Lage*[1]), da dem Punkte H_2 als einem Punkte (Pol) der Reihe auf MH_2 derselbe Punkt als der Berührungspunkt des Kegelschnittes k in der Reihe auf AC entspricht. Bekanntlich umhüllen aber die Verbindungslinien entsprechender Elemente zweier ein-zweideutigen Reihen, welche sich in einer reduzierten Lage befinden, einen Kegelschnitt. Dem Punkte H_2 der Reihe auf MH_2 entspricht in der zweideutigen Reihe aufser demselben Punkte auch noch ein zweiter, welcher mit dem ersteren ein konjugiertes Paar der zweideutigen Reihe bildet. Da aber H_2 ein Doppelpunkt dieser Reihe ist, so folgt, dafs der Punkt H_2 der Berührungspunkt des Trägers der zweideutigen Reihe für den Reduktions-Kegelschnitt ist.[2])

Je kleiner der Winkel ω für einen Kegelschnitt k_ω wird, desto weiter von H_2 liegt der zugehörige Pol auf dem Halbstrahle H_2B'. Wird $\omega = 0$, so kommt der zugehörige Pol in den unendlich fernen Punkt von MH_2; die durch diesen gehenden Tangenten an k_ω fallen

1) Weyr, Theor. d. mehrdeut. geom. Elementargeb. etc., Lpz. 1869, S. 15.
2) Weyr, l. c. S. 17.

Digitized by Google

zusammen, und jener unendlich ferne Punkt ist ein Punkt des Reduktions-Kegelschnittes. Dieser ist somit eine Parabel, und wir können sagen:

Die in den Schnittpunkten aller Kegelschnitte k_ω mit derselben Seite des Fundamentaldreiecks an diese gezogenen Tangenten umhüllen eine Parabel, welche die betreffende Seite in dem auf ihr liegenden Höhenfußpunkte berührt.[1])

6. Wir greifen wieder drei entsprechende Paare der Involution auf den Seiten des Dreiecks ABC heraus und bilden ein Sechseck $A_1A_2C_1C_2B_1B_2$ samt den sechs Projektionsstrahlen dieser Punkte aus

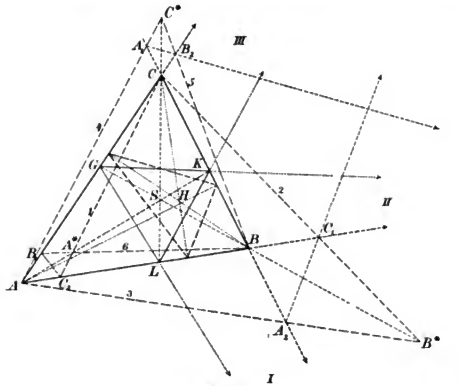


Fig. 4.

den betreffenden gegenüberliegenden Eckpunkten. (Fig. 4.) Es schneiden sich CC_2 und BB_1 in einem Punkte A^*, BB_2 und AA_1 in dem Punkte C^* und endlich AA_2 und CC_1 im Punkte B^*. Der Punkt A^* liegt somit auf der Hyperbel k_a (mit dem Mittelpunkte O_a), der Punkt B^* auf der Hyperbel k_b und C^* auf der Hyperbel k_c. Es ist hiernach ein jeder der Kegelschnitte k_ω mit einem einzigen der Dreiecke $A^*B^*C^*$, welches zu dem betreffenden Winkel ω gehört, innig verknüpft.

1) Wir wollen auf die gegenseitigen Beziehungen dieser drei Parabeln hier nicht näher eingehen. Es ließen sich diesbezügliche Untersuchungen im Sinne der bekannten Abhandlung von Artzt weiterführen. (Artzt, Untersuch. über ähnl. Punktr. auf d. Seiten eines Dreiecks und auf deren Mittelsenkrechten, etc., Programm Recklinghausen 1884, Nr. 332.)

Digitized by Google

Wir erwähnen zuerst eine Beziehung dieser Dreiecke $A^*B^*C^*$ zum Fundamentaldreieck ABC. Wie früher bewiesen wurde, schneiden die Geraden B_1C_2, A_2C_1 und A_1B_2 die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks ABC in drei Punkten I, II, III, welche in einer Geraden (p) liegen müssen.

Die Punkte A_1, B_2, C, C^* bilden vier Eckpunkte eines vollständigen Vierecks, von dem zwei Seiten sich in A und die andern zwei in B schneiden. Die Strecke AB wird von den Geraden C^*C und A_1B_2 in den Punkten L und II (innerlich und äufserlich) harmonisch geteilt. Ebenso bilden die Punkte $A_2C_1BB^*$ vier Eckpunkte eines zweiten vollständigen Vierecks, von dem zwei Seiten in C, die anderen zwei aber in A zusammenlaufen. Zieht man A_2C_1 und B^*B, so bekommt man im Schnitte mit AC zwei Punkte III und G, so dafs ACG III wieder vier harmonische Punkte sind. Beide harmonischen Würfe ABL II und ACG III liegen aber perspektiv, weil sie den Punkt A entsprechend gemein haben. Die Verbindungslinien anderer Paare entsprechender Punkte schneiden sich also im Perspektivitätszentrum (I), welches notwendig mit dem Punkte I auf p zusammenfällt, da die Verbindungslinien entsprechender Punkte BC und II III durch diesen Punkt I hindurchgehen. Die Verbindungslinie GL geht somit auch durch den Punkt I, in welchem sie die Seite BC von ABC trifft. Zieht man AA^*, so bekommt man im Schnittpunkte K mit BC einen Punkt der Art, dafs wieder KL durch III und KG durch II geht. Der Beweis wie für GL.

Entsprechende Seiten beider Dreiecke ABC und KGL schneiden sich somit in drei Punkten einer Geraden (p), woraus folgt, dafs sie zentrisch-kollinear liegen. Die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Eckpunkte gehen durch einen Punkt S. *In diesem schneiden sich also auch AA^*, BB^* und CC^*.*

Bezeichnen wir die Strahlen CC_1 und CC_2 mit 2 und 1, die Strahlen AA_1 und AA_2 mit 4 und 3 und die Strahlen BB_1 und BB_2 mit 6 und 5; diese Strahlen 123456 bilden ein Brianchonsches Sechseit. Denn die Schnittpunkte der Seiten 12 und 45 sind C und C^*, die der Seiten 23 und 56: B^* und B, endlich die von 34 und 61: A und A^*. Nach dem vorher Bewiesenen gehen aber die drei Verbindungslinien gegenüberliegender Schnittpunkte durch denselben Punkt S, und wegen der Richtigkeit der Umkehrung[1]) des Brianchonschen Satzes sind die sechs Seiten AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1, CC_2 die eines Brianchonschen Sechsseits, und wir können sagen:

1) Steiner-Schröter, D. Theor. d. Kegelschn. gest. auf proj. Eigensch., II. Aufl., S. 128.

Digitized by Google

Projiziert man irgend drei entsprechende Paare der symmetrischen Involutionen auf den Seiten von ABC aus den gegenüberliegenden Eckpunkten, so bilden diese sechs Projektionsstrahlen sechs Tangenten eines Kegelschnittes.

Auf diese Weise entspricht einem jeden Kegelschnitt k_ω, welcher durch sechs Punkte $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$ geht, ein Kegelschnitt, welcher die Strahlen AA_1, AA_2, BB_1, BB_2, CC_1 und CC_2 berührt. Diese eindeutige Beziehung führt zu Untersuchungen über Kurven höherer Ordnung, die wir hier nicht näher verfolgen wollen.

Projiziert man die Eckpunkte A^* für alle möglichen Winkel ω aus C und aus A, so sind beide so entstandenen Strahlenbüschel projektiv, weil A, C und alle A^* auf der Hyperbel k_a liegen. Projiziert man wieder die Punkte C^* aus A und C, so sind auch diese projizierenden Strahlenbüschel projektiv, weil A, C und alle C^* auf der gleichseitigen Hyperbel k_c liegen.

Die Strahlenbüschel A $(C^*, C_1^*, C_2^*, \ldots)$ und C $(A^*, A_1^*, A_2^*, \ldots)$ sind aber entgegengesetzt gleich, also projektiv; demnach sind auch die Strahlenbüschel A $(A^*, A_1^*, A_2^*, \ldots)$ und C $(C^*, C_1^*, C_2^*, \ldots)$ projektiv.

Da die entsprechenden Strahlen sich in den Kollineationsmittelpunkten S schneiden, durch welche auch die Verbindungslinien $B(B^*, B_1^*, B_2^*, \ldots)$ hindurchgehen, und weil im Höhenpunkte H drei Eckpunkte A^*, B^*, C^* eines gewissen Dreiecks $A_x^* B_x^* C_x^*$ vereinigt sind, mit welchen dann also auch der zugehörige Kollineationsmittelpunkt S_x zusammenfällt, so können wir schliefsen:

Die Kollineationsmittelpunkte (S) aller Dreiecke $A^* B^* C^*$ und des Fundamentaldreiecks ABC liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche dem Dreieck ABC umgeschrieben ist.

Man bemerke, dafs die Punkte S die *Brianchonschen Punkte* für alle Sechsseite sind, von denen je drei Paar Seiten durch A, B und C gehen und immer alle sechs mit AB, AC und BC gleiche Winkel (ω) einschliefsen.[1])

7. Für ein *stumpfwinkliges* Dreieck ABC (Fig. 5) gelten bezüglich der drei gleichseitigen Hyperbeln k_a, k_b und k_c dieselben Beziehungen wie für das spitzwinklige.

Es folgt auch hier wie dort, dafs die drei konjugierten Paare der drei Involutionen auf den Seiten des Dreiecks aus den gegenüberliegenden Eckpunkten durch Strahlen projiziert werden, welche alle denselben

1) vgl. Steiner-Weierstrafs l., Théorèmes relatifs etc., S. 201, ff. für weitere Entwicklungen.

Digitized by Google

Winkel mit den Seiten einschliefsen. Auch liegen wieder die drei Punktepaare auf demselben Kegelschnitt, welcher aber für das stumpfwinklige Dreieck eine Hyperbel sein mufs.

Der einem stumpfwinkligen Dreieck eingeschriebene Kegelschnitt (k), welcher die drei Seiten in den Höhenfufspunkten berührt, kann nur eine Hyperbel sein.[1]) Es läfst sich nun vollkommen analog den Ausführungen des Art. 4 zeigen, dafs die Kegelschnitte k_ω für das stumpfwinklige Dreieck mit dem Kegelschnitte k *denselben Mittelpunkt und dieselbe Involution konjugierter Durchmesser besitzen.* Es folgt daraus, dafs auch die Doppelstrahlen dieser Involution, d. h. *die Asymptoten des Kegelschnittes k auch solche für alle übrigen k_ω sind.*

Diese Kegelschnitte k_ω bestehen aus *zwei Gruppen*, welche durch die Asymptoten α_1 und α_2 von k von einander getrennt sind. Die derselben Gruppe angehörigen sind *homothetisch* und beide Gruppen *konzentrisch.*

Die Asymptoten α_1 und α_2 können zusammen als die Grenzkurve beider Gruppen angesehen werden, welcher alle Eigenschaften wie irgend einer der beiden Gruppen zukommen. Wir können demnach sagen:

Jede der Asymptoten derjenigen Hyperbel (k), welche die drei Seiten eines stumpfwinkligen Dreiecks in den Höhenfufspunkten berührt, schneidet die Seiten des Dreiecks in drei Punkten, welche aus den gegenüberliegenden Eckpunkten durch Strahlen projiziert werden, die mit den betreffenden Seiten alle denselben Winkel einschliefsen.

Irgend eine Hyperbel k_ω schneidet die Seite AB des Dreiecks in den Punkten C_1 und C_2, welche vom Höhenfufspunkte H_3 auf dieser Seite gleiche Entfernungen haben. Die Asymptoten α_1 und α_2 schneiden diese Seite auch in zwei von H_3 gleich weit abstehenden Punkten (Fig. 5). Es folgt, dafs diese Schnittpunkte der Asymptoten mit der Seite AB (und ebenso für die beiden anderen Seiten) vom Punkte H_3 (bezw. H_2, H_1) getrennt sind.[2]) Projiziert man nun die symmetrische Involution auf jeder Seite von ABC aus dem gemeinsamen Mittelpunkte (M) der Kegelschnitte k_ω, so werden die Asymptoten α_1 und α_2 durch die Doppelstrahlen jenes projizierenden involutorischen Strahlenbüschels immer *getrennt.* Da solche zwei Involutionen kein reelles gemeinsames Paar entsprechender Strahlen besitzen, so folgt, dafs es unter den Kegelschnitten k_ω *keinen* geben wird, welcher die Seiten des Dreiecks in den

1) Steiner-Weierstrafs I., Développement d'une série etc., S. 200.

2) Jede der Asymptoten schneidet je zwei Seiten des Dreiecks ABC in zwei Punkten, deren Verbindungsgerade zu derjenigen der beiden Höhenfufspunkte auf diesen Seiten parallel ist.

Digitized by Google

Endpunkten je eines Paares konjugierter Durchmesser schneiden würde. Die Asymptoten α_1 und α_2 bilden mit je zwei Strahlen, durch welche die Doppelpunkte der Involutionen auf den Dreiecksseiten aus dem Mittelpunkte M projiziert werden, je einen harmonischen Vierstrahl. Die Asymptoten α_1 und α_2 (also Geraden von der vorhin angegebenen Eigenschaft) können aus zwei Paaren jener Projektionsstrahlen mittelst eines Steinerschen Hilfskreises konstruirt werden, nachdem zuvor der Mittelpunkt M auf die bereits angegebene Weise ermittelt worden ist. (Fig. 5.)

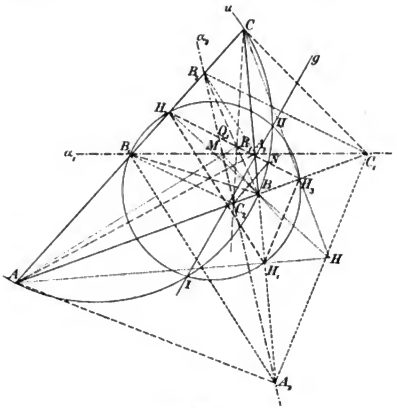


Fig. 5.

In Fig. 5 schneiden die Asymptoten α_1 und α_2 die Dreiecksseiten AB, AC, BC in den Punkten C_1, B_1, A_1, bezw. C_2, B_2, A_2, und es ist, wie bereits erwähnt, $H_1A_2 = H_1A_1$, $H_3C_1 = H_3C_2$ und $H_2B_2 = H_2B_1$; die Geraden B_1C_2 und B_2C_1 sind mit H_2H_3 parallel, ebenso $B_1A_2 \parallel H_1H_2 \parallel B_2A_1$ und $A_1C_2 \parallel H_1H_3 \parallel A_2C_1$. *Die Strecke B_1C_2 auf der Asymptote α_2 wird also im Punkte Q_1, d. h. durch die Seite H_2H_3 des Höhenfußpunktsdreiecks, halbiert.* Ebenso für die Seiten H_1H_3 und H_1H_2 und die betreffenden Abschnitte auf α_1 und α_2 zwischen den beiden anderen Seiten des Dreiecks ABC.

8. Projizieren wir die sechs Punkte A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 aus den Eckpunkten A, B, C, so bekommen wir sechs Strahlen, für welche im

Digitized by Google

Art. 6 bewiesen wurde, dafs sie sechs Tangenten desselben Kegelschnittes sind. Diese sechs Tangenten lassen sich zu Dreieckspaaren kombinieren, deren Eckpunkte wieder auf einem Kegelschnitte liegen müssen.[1])

Wir stellen die drei Strahlen, welche die Punkte A_1, B_1, C_1 projizieren, zu einem ersten und die drei anderen zu einem zweiten Dreiecke zusammen. Wir bezeichnen diese Dreiecke mit $A_1^* B_1^* C_1^*$ und $A_2^* B_2^* C_2^*$, sodafs A_1^* als Schnittpunkt von CC_1 und BB_1, C_2^* als Schnittpunkt von AA_2 und BB_2 u. s. w. erscheint. Die so erhaltenen sechs Eckpunkte liegen auf einem Kegelschnitte (m), für welchen wir beweisen werden, dafs er ein *Kreis* sein mufs. (Fig. 6.)

Die Dreiecke ABA_1 und $AB_1^* C_1$ sind ähnlich; denn die Winkel AA_1B und $AC_1B_1^*$ sind gleich (ω) und der Winkel bei A beiden Dreiecken gemeinsam. Es ist also der Winkel bei B_1^* gleich dem bei B von ABC. Man beweist auf dieselbe Weise aus den ähnlichen Dreiecken $A_2 B_2^* C$ und $C_2 BC$, dafs auch der Winkel bei B_2^* gleich dem bei B von ABC ist, und ebenso die Gleichheit der beiden anderen Winkel in den Dreiecken $A_1^* B_1^* C_1^*$, $A_2^* B_2^* C_2^*$ mit den bei A und C von ABC, woraus folgt, dafs *diese drei Dreiecke unter einander ähnlich sind.*

In dem vollständigen Vierseite ABA_1B_1 schneiden sich die gegenüberliegenden Seiten AB und A_1B_1 im Punkte C_1, die Seiten AB_1 und BA_1 im Punkte C. Die Verbindungslinie CC_1 wird von der Diagonale AA_1 in B_1^* und von der Diagonale BB_1 in A_1^* geschnitten. Es liegen also die Punkte C, C_1, B_1^* und A_1^* harmonisch.

Aus dem vollständigen Vierseite $B_2 CB C_2$ erhellt weiter, dafs auch die Gruppe C, C_2, A_2^*, B_2^* eine harmonische ist. Da aber die Punkte A_1^*, A_2^*, B_1^*, B_2^* dem Kegelschnitte (m) angehören, so ist die Verbindungslinie $C_1 C_2$ die Polare des Punktes C für diesen Kegelschnitt. Die Gerade $C_1 C_2$ ist aber eine Seite des Fundamentaldreiecks; man beweist ähnlich, dafs $B_1 B_2$ eine Polare von B und $A_1 A_2$ eine Polare von A in Bezug auf den Kegelschnitt m ist; wir können also sagen:

Die sechs Strahlen, durch welche die Schnittpunkte der Asymptoten α_1, α_2 mit den Dreiecksseiten aus den Eckpunkten projiziert werden, kann man als Seiten von zwei Dreiecken so gruppieren, dafs die Eckpunkte dieser auf einem Kegelschnitte m liegen, für welchen das Fundamentaldreieck ein Poldreieck ist.

Jedes der genannten Dreiecke $A_1^* B_1^* C_1^*$ und $A_2^* B_2^* C_2^*$ liegt mit dem Fundamentaldreieck zentrisch-kollinear. *Die Kollineationsachsen sind die Asymptoten α_1 bezw. α_2.* Denn die Seiten $A_1^* B_1^*$ und AB

1) Steiner-Schröter, l. c., S. 129.

Digitized by Google

schneiden einander in C_1, die Seiten $A_1^*C_1^*$ und AC in B_1, endlich $B_1^*C_1^*$ und BC in A_1; die Punkte A_1, B_1 und C_1 liegen aber auf der Asymptote α_1. Man beweist analog, dafs α_2 die Kollineationsachse für ABC und $A_2^*B_2^*C_2^*$ ist.

Die Verbindungslinien AA_1^*, BB_1^* und CC_1^* schneiden einander im Kollineationszentrum I beider Dreiecke ABC und $A_1^*B_1^*C_1^*$.

Ziehen wir die Verbindungslinien $C\mathrm{I}$ und $B\mathrm{I}$, (welche durch C_1^* bezw. B_1^* gehen) und bezeichnen die Schnittpunkte von $C\mathrm{I}$ und AB

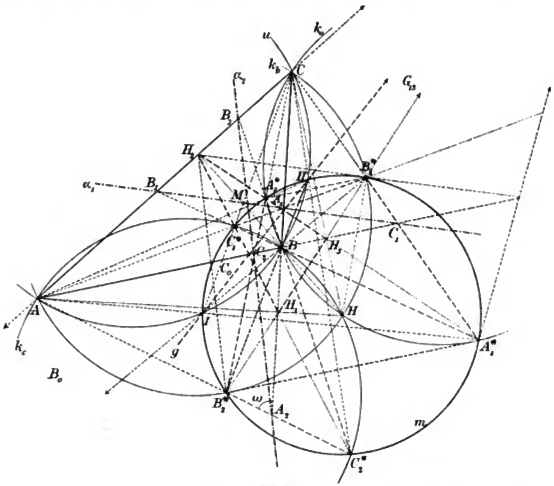


Fig. 6.

mit C_0 und $B\mathrm{I}$ und AC mit B_0. Die Verbindungsgeraden B_0C, $B_1^*C_1^*$, BC_0 gehen sämtlich durch den Eckpunkt A. Zieht man noch $A\mathrm{I}$, so sind die vier letzteren Strahlen harmonisch, da sie die Punkte C, B_1^*, C_1 und A_1^* projizieren, welche aber, wie früher bewiesen, harmonisch liegen.

Es folgt daraus, dafs einerseits die vier Punkte C, C_1^*, C_0 und I, und andererseits B_0, B_1^*, B und I harmonisch liegen. Es liegt aber auch C_0 auf der Polare von C und B auf der Polare[1]) von B_0 in Bezug auf

1) B_0 liegt auf der Polare von B, also liegt auch B auf der Polare von B_0.

Digitized by Google

den Kegelschnitt m, und C_1^* und B_1^* sind Punkte des Kegelschnittes m; der Punkt I liegt also auch auf dem Kegelschnitte m.[1]) Wenn wir für die Dreiecke ABC und $A_2^*B_2^*C_2^*$ ähnlich den Beweis für den zweiten Punkt II vollbringen, so können wir schliefsen:

Die Kollineationszentren (I und II) für je eines der Dreiecke $A_1^*B_1^*C_1^*$ und $A_2^*B_2^*C_2^*$ und das Fundamentaldreieck ABC liegen auf dem Kegelschnitte der sechs Punkte $A_1^*B_1^*C_1^*A_2^*B_2^*C_2^*$.

9. Aus dem Vorangehenden folgt, dafs die Winkel B_2^*AH, $H_1AB_1^*$, $B_2^*CH_3$ und HCB_1^* alle untereinander gleich sind, weil sie Komplementärwinkel von ω sind. Es sind daher die zwei Büschel von Strahlen $A(B_2^*, H, B_1^*, \ldots)$ und $C(B_2^*, H, B_1^*, \ldots)$ projektiv-gleich. Ordnen wir die auf gleicher Stelle stehenden Strahlen als entsprechend zu, so sind die Büschel auch gleichlaufend. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen und zwar B_2^*, H und B_1^* liegen daher auf einem durch A und C gehenden Kreise (k_b). Man beweist auf dieselbe Weise, dafs auch A, B, H, C_1^*, C_2^* auf einem Kreise k_c und B, C, H, A_1^*, A_2^* auf einem Kreise k_a liegen. Diese drei Kreise k_a, k_b und k_c haben *denselben Halbmesser wie der Umkreis* (u) *von* ABC.[2])

Die Kreise k_a und k_b haben die Höhe CH zur Radikalachse.[2]) Beide Kreise liegen also samt den Geraden CB_2^* und CA_1^* in Bezug auf diese Radikalachse symmetrisch. Die Schnittpunkte B_1^*, A_2^* und B_2^*, A_1^* jener beiden Geraden mit den Kreisen k_a und k_b liegen also gegen CH symmetrisch, und es sind deswegen die Geraden $A_2^*B_1^*$ und $A_1^*B_2^*$ zu AB parallel, weil sie auf CH senkrecht stehen.

Man beweist ebenso, dafs $B_1^*C_2^*$ und $B_2^*C_1^*$ zu BC und $A_1^*C_2^*$, $A_2^*C_1^*$ zu AC parallel ist.

Es sind also die Sehnen $A_2^*B_1^*$ und $A_1^*B_2^*$ zur Polare (AB) des Punktes C parallel, und es ist demnach die Höhe CH der den Richtungen jener Sehnen konjugierte Durchmesser des Kegelschnittes m, weil sie den Punkt C mit der Mitte von $A_2^*B_1^*$ verbindet. Es ist ebenso AH der den Sehnen $B_2^*C_1^*$ und $B_1^*C_2^*$, schliefslich BH der den Sehnen $A_2^*C_1^*$, $A_1^*C_2^*$ konjugierte Durchmesser von m. Da die drei Durchmesser durch H gehen, und die Involution konjugierter Durchmesser eine *zirkulare* ist, so folgt:

---

1) Folgt auf eine andere Weise auch aus bekannten Sätzen. Cremona: Elem. d. proj. Geom., Stuttgart 1882; p. 221., ff.

2) Diese Kreise gehen durch je zwei Eckpunkte und den Höhenpunkt von ABC. Siehe Art. 2. Das Dreieck der Mittelpunkte dieser drei Kreise hat Seiten, welche mit denen von ABC entsprechend parallel sind.

Digitized by Google

Der durch die Punkte A_1^*, B_1^*, C_1, A_2^*, B_2^*, C_2^* und die Kollineationszentren I und II gehende Kegelschnitt (m) ist ein Kreis, welcher den Höhenpunkt (H) des Dreiecks ABC zum Mittelpunkte hat.

Wir sahen früher, dafs der Kollineationsmittelpunkt I der Schnittpunkt von AA_1^*, BB_1^* und CC_1^* ist. Der Winkel $C_1^*IA_1^*$ ist aber als ein Peripheriewinkel des Kreises k_c ein Supplementärwinkel des über demselben Bogen stehenden Winkels $C_1^*B_1^*A_1^*$. Es ist also der Winkel AIC gleich dem Winkel bei B_1^* im Dreieck $A_1^*B_1^*C_1^*$ und daher gleich dem Winkel bei B von ABC. Der Winkel AIC ist also ein Peripheriewinkel des Kreises ABC. Man beweist analog, dafs der zweite Kollineationspunkt II der Scheitel eines dem Winkel bei B von ABC gleichen Peripheriewinkels des Kreises ABC ist. Es folgt also:

Die Kollineationszentren I und II sind die Schnittpunkte des Kreises m mit dem Umkreise von ABC. —

Verbinden wir die Punkte A_1^* und A_2^*, B_1^* und B_2^*, so schneiden diese Verbindungslinien einander auf der Polare AB von C_1 und zwar wegen der Symmetrie zu CH im Höhenfufspunkt H_3. Die Dreiecke $A_1^*A_2^*B_1^*$ und $B_2^*B_1^*A_2^*$ sind kongruent, also sind auch die Dreiecke $B_2^*C_2H_3$ und $A_1^*C_1H_3$ kongruent. Der Winkel $C_2B_2^*H_3$ ist dem Winkel CAB_1^* gleich, weil sie Peripheriewinkel über dem Bogen CB_1^* des Kreises k_b sind. Es ist weiter der Winkel $B_2^*C_2H_3$ gleich dem Winkel $AB_1C_1^*$, weil sie Supplementärwinkel von ω sind. Es müssen also die Winkel bei C_1^* und H_3 in den Dreiecken $AB_1C_1^*$ und $B_2^*C_2H_3$ gleich sein. Da aber der Winkel bei C_1^* gleich seinem Scheitelwinkel im Dreieck $A_1^*B_1^*C_1^*$ ist, für welchen wir bereits gezeigt haben, dafs er dem Winkel bei C von ABC gleich ist, so ist der Winkel $B_2^*H_3C_2$ gleich dem Winkel bei C von ABC. Es folgt daraus, *dafs die Gerade $B_1^*B_2^*$ mit der Seite H_3H_1 des Höhenfufspunktsdreiecks zusammenfällt,* und dafs (wegen der Symmetrie) auch $A_1^*A_2^*$ mit H_2H_3 zusammenfällt.[1]) Es wird ähnlich gezeigt, dafs auch die Punkte C_1^* und C_2^* auf H_1H_2 fallen, und wir können sagen:

Die Eckpunkte der Dreiecke $A_1^*B_1^*C_1^*$ und $A_2^*B_2^*C_2^*$ liegen paarweise auf den Seiten des Höhenfufspunktsdreiecks von ABC.

Wir sahen, dafs die vier Punkte C, B_1^*, C_1, A_1^* harmonisch liegen. Projizieren wir diese aus H_2, so bekommen wir vier harmonische Strahlen $H_2(B_1, B_1^*, C_1, R_1)$. Wie aber gezeigt wurde, ist R_1 die Mitte von B_1C_1, folglich ist die Gerade $H_2B_1^*$ zu B_1C_1 oder α_1 parallel.

---

1) Siehe den Beweis, dafs $\sphericalangle H_1H_2A = \sphericalangle ACB$ ist, in der 1. Anmerkung von Nr. 3.

Digitized by Google

Projiziert man weiter die vier harmonischen Punkte C, A_2^*, C_2, B_2^* aus H_2, so bekommt man auf α_1 vier harmonische Durchschnittspunkte mit jenen harmonischen Strahlen aus H_2. Drei von diesen Punkten sind B_2, Q_1, C_2; da aber Q_1 die Mitte von B_2C_2 ist[1]), so muſs $H_2B_2^*$ zu α_1 parallel laufen. Vollkommen analog beweist man Ähnliches für H_1 und H_3, und es folgt daraus:

Verbindet man jeden der drei Höhenfuſspunkte H_1, H_2, H_3 mit jenen zwei entsprechenden Eckpunkten der Dreiecke $A_1^*B_1^*C_1^*$ und $A_2^*B_2^*C_2^*$, bei welchen dieselben Winkel, wie der dem betreffenden Höhenfuſspunkt gegenüberliegende in ABC anliegt, so sind je zwei Verbindungslinien zu den Asymptoten α_1 und α_2 parallel. —

Die Schnittpunkte G_{13}, G_{23}, G_{12} der Seiten des Höhenfuſspunktsdreiecks (H_1H_3, H_2H_3, H_1H_2) mit den entsprechenden Seiten AC, BC, AB von ABC liegen in einer Geraden (g).[2]) Die vier Punkte B_1, C_1^*, B, A_1^* liegen harmonisch, weil B der Pol von AC in Bezug auf m ist. Projizieren wir diese vier harmonischen Punkte aus C, so bekommen wir vier harmonische Strahlen $C(G_{13}, \text{I}, G_{23}, A_1^*)$. Projizieren wir die vier harmonischen Punkte G_{13}, C, H_2, A aus A_1^*, so bekommen wir wieder vier harmonische Strahlen $A_1^*(G_{13}, C, G_{23}, \text{I})$. Die Geraden AA_1^* und CC_1^* gehen nämlich durch I. Beide harmonischen Vierstrahlen haben aber einen gemeinschaftlich entsprechenden Strahl (CA_1^*), die Schnittpunkte der drei übrigen Strahlenpaare liegen also auf einer Geraden, und der Punkt I liegt auf der Geraden g, weil diese durch $G_{13}G_{12}$ bestimmt ist. Wir können nun sagen, wenn wir für II ähnlich dasselbe beweisen:

Die beiden Kollineationszentren I und II liegen auf der Kollineationsachse des Dreiecks ABC und des Höhenfuſspunktsdreiecks.

Mit Hilfe dieses Satzes *läſst sich der Kreis m direkt einfach konstruieren.* Man bestimme nur die Gerade g und beschreibe den Umkreis von ABC. Die Schnittpunkte von g mit dem Umkreise sind die Punkte I und II. Man braucht dann nur aus H mit dem Halbmesser $\overline{HI} = \overline{HII}$ den Kreis m zu beschreiben.

Hat man den Kreis m, so kann man die beiden Asymptoten α_1 und α_2 leicht ermitteln. Verlängert man nämlich H_2H_3, so bekommt man auf m die beiden Schnittpunkte A_1^* und A_2^*. Die Verbindungsgeraden A_1^*C und A_1^*B schneiden die Seiten AB und AC von ABC in den Punkten C_1 und B_1, und es ist die Gerade C_1B_1 die

1) Siehe Fig. 5.

2) Der Deutlichkeit der Fig. 6 wegen sind dort die Punkte G_{23}, G_{12} nicht bezeichnet.

Digitized by Google

Asymptote α_1. Verbindet man A_2^* mit C und B, so bekommt man im Schnitte mit AB und AC die Punkte C_2 und B_2. Die Gerade B_2C_2 ist die zweite Asymptote α_2. Man kann ähnlich die Geraden α_1 und α_2 mittelst der Seiten H_1H_2 und H_1H_3 erhalten.

Aus der Fig. 6 ist ersichtlich, wie man die Asymptoten α_1 und α_2, also auch den besonderen Winkel ω auch ohne Zuhilfenahme von m konstruktiv ermitteln kann. Man beschreibe irgend einen der Kreise k_a, k_b, k_c, etwa k_b, und verlängere H_1H_3 bis B_1^*. Dieser Punkt mit C verbunden schneidet AB in C_1. Man hat somit einen Punkt von α_1, und ein anderer läfst sich ähnlich finden. Zugleich ist der Winkel CC_1A der gesuchte Winkel ω. Man kann statt einen der Kreise k auch u zu diesem Zwecke benützen. Wie wir gesehen haben, sind bei einem spitzwinkligen Dreiecke die Asymptoten α_1 und α_2 imaginär. Es folgt daraus, dafs auch der Kreis m für dieses Dreieck *imaginär* sein wird. Man beweist weiter leicht, dafs für ein rechtwinkliges Dreieck der Kreis m sich auf den *Scheitelpunkt des rechten Winkels reduziert.*

Der Kreis m wird daher als der Ortskreis aller Mittelpunkte von gleichseitigen Hyperbeln, welche dem Dreiseite ABC eingeschrieben sind, erkannt.[1])

Aus den vorangehenden Ausführungen sieht man also, wie dieser Ortskreis konstruktiv ermittelt wird, im Gegensatz zu der Steinerschen Halbmesserbestimmung aus der Relation $\overline{HH_1} \cdot \overline{HA} = \overline{HH_2} \cdot \overline{HB} = \overline{HH_3} \cdot \overline{HC} = r^2$, wenn r der Halbmesser von m ist.

Auch läfst sich der besondere Winkel ω durch Rechnung oder Konstruktion auf folgende Weise bestimmen. Wegen $\overline{HB_1^*} = r$ hat man: $\overline{HH_3} : \overline{HB_1^*} = \overline{HB_1^*} : \overline{HC}$. Es sind also beide Dreiecke $HH_3B_1^*$ und HB_1^*C ähnlich, und also die Winkel HCB_1^* und $H_3B_1^*H$ gleich. Man kann diesen Winkel, welcher ein Komplementärwinkel von ω ist, aus dem Dreiecke $HH_3B_1^*$ ermitteln, von welchem zwei Seiten HH_3 und HB_1^* und der Winkel $HH_3B_1^* = 90 + ACB$ gegeben sind, und ähnlich aus anderen Bestimmungsstücken.

Wir bemerken auch noch, dafs der Kreis m und der Feuerbachsche Kreis einander auf dem Umkreise des stumpfwinkligen Dreiecks und zwar in den Kollineationspunkten I und II schneiden. Denn da der Kreis m der „äufsere Potenzkreis“ für jene beiden anderen Kreise ist[2]), so schneidet er den Feuerbachschen Kreis in denselben Punkten, wie den Umkreis. Wir fanden aber schon früher, dafs die letzteren die Punkte I und II sind, es ist also die obige Behauptung bewiesen (siehe Fig. 5).

1) Steiner-Schröter l. c. S. 286, 287.

2) Steiner-Weierstrafs, II, 677; I, 32, 33.

Digitized by Google

Projiziert man aus den Eckpunkten des Dreiecks ABC nicht nur A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, sondern *irgend welches entsprechende Tripel von konjugierten Punktepaaren der Involution auf den drei Seiten*, so lassen sich wieder die sechs Projektionsstrahlen immer zu *zwei Dreiecken* zusammensetzen, so dafs *ihre Eckpunkte auf einem Kreise liegen.* Der Beweis wie für den Kreis m. Alle diese Kreise haben H zum gemeinschaftlichen Mittelpunkt. *Nur einer unter ihnen,* d. h. m hat die Eigenschaft, dafs das gegebene Dreieck ein *Poldreieck* desselben ist. Auch für das spitzwinklige Dreieck gehört zu einem jeden Kegelschnitt k_∞ ein Kreis, welcher seinen Mittelpunkt in H hat. Es wird jedoch hier nicht möglich sein, dafs das Dreieck ein Poldreieck eines gewissen Kreises (m) werde; bei einem spitzwinkligen Dreieck liegt nämlich H innerhalb des Dreiecks, und die Polare kann von ihrem Pol nicht durch den Mittelpunkt (H) des zugehörigen Kreises getrennt sein.

10. Alle diese Ausführungen behalten auch für das *rechtwinklige* Dreieck ihre Giltigkeit. Der *Kegelschnitt*, welcher die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks in den Höhenfufspunkten berührt, *degeneriert in zwei Punkte*, welche auf der Hypotenusenhöhe liegen. Ein jeder der Kegelschnitte k_∞ zerfällt also in zwei zu dieser Höhe symmetrisch liegende, zu ihr parallele Geraden.

Die Gesamtheit dieser Geraden können wir nun als eine Gruppe von degenerierten Parabeln auffassen, da alle diese Kegelschnitte k_∞ einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt besitzen, welcher zugleich der Berührungspunkt auf der gemeinschaftlichen unendlich fernen reellen Tangente ist.

Auch hier liegen für eine jede degenerierte Parabel die sechs Eckpunkte A_1^*, B_1^*, C_1^*, A_2^*, B_2^*, C_2^* auf einem Kreise. Der Kreis m reduziert sich — wie schon erwähnt — auf einen Punkt, den Mittelpunkt aller jener Kreise.

Es ist kaum notwendig zu bemerken, dafs für die Kegelschnitte k_∞ im Falle eines gleichschenkligen oder gleichseitigen Dreiecks nur eine gröfsere Symmetrie erzielt wird.

Wendet man auf die Kegelschnittgruppen k_∞ die bekannten Polarbeziehungen für Scharen und Büschel an, so zeigen die homothetischen Ellipsen (für das spitzwinklige Dreieck) zum Teil Eigenschaften von jenen und diesen. Es dürfte daher die einheitliche Bezeichnung *„Schar"* für alle drei Gruppen k_∞ berechtigt sein, da dieselbe für Hyperbeln und Parabeln k_∞ ohnehin genügend charakterisiert wird.

Agram, den 22. April 1901.

Digitized by Google

Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes.

Von STANISLAUS JOLLES in Berlin.

1. Euler hat das Trägheitsmoment eines Raumstückes bezüglich einer Achse zuerst definiert, Binet seine Theorie entwickelt, gestützt auf die von ihm eingeführten Begriffe des Trägheits- und Zentrifugalmomentes eines Raumstückes bezüglich einer Ebene. Er untersucht in seiner grundlegenden Arbeit[1]) als Erster die Verteilung der Hauptachsen im Raume und ihren Zusammenhang mit einer bestimmten Schar konfokaler Flächen II. Klasse, er weist auf Raumstücke hin, die bezüglich ihrer Trägheitsmomente gleichwertig sind, und führt die Trägheitsachsen und das Trägheitsellipsoid ein. Auf Binets Ergebnisse stützen sich die Arbeiten Ampères[2]), Cauchys[3]), Poinsots[4]) und wohl auch die von Herrn W. Thomson[5]) und R. Townsend[6]) — Neue Gesichtspunkte in der Theorie der Trägheitsmomente zeigen die Untersuchungen von Culmann[7]) und Herrn E. J. Routh.[8]) Jener weist auf einen für die Theorie der Trägheitsmomente eines Raumstückes wichtigen polaren Raum Γ^2 hin, dieser auf ∞^1 Dreiecke, in deren drei Eckpunkten sich je drei gleich grofse Flächenstücke konzentrieren lassen, so dafs sie einem Flächenstücke bezüglich seiner Trägheitsmomente

1) Binet, Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps. Journ. de l'École Polyt. **9**, 16. Heft (1813), S. 41. (Lu à l'Institut, en Mai 1811.)

2) Ampère, Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanens de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes. Mém. de l'Acad. **5** (1826), S. 86. (Lu à l'Académie royale des Sciences le 18 Juin 1821.)

3) Cauchy, Sur les moments d'inertie. Exercices de Mathématiques. **2** (1827), S. 93.

4) Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. Paris 1852, première partie, chapitre III.

5) W. Thomson, On the principal axes of a solid body. The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. **1** (1846), S. 127 u. 195.

6) R. Townsend, On principal axes of a body, their moments of inertia, and distribution in space. The Cambridge and Dublin Mathematical Journal. **1** (1846), S. 209 u. **2** (1847), S. 19, 140 u. 241.

7) Culmann, Die graphische Statik. Zürich 1866, 2. Abschnitt, 7. Kapitel, §§ 63—67. Die ersten beiden Abschnitte erschienen, wie aus der Vorrede S. XI zu ersehen ist, als erste Lieferung schon 1864.

8) E. J. Routh, Note of the moment of inertia of a triangle. 1863. Quart. Journal of Math. **6** (1864), S. 267.

Digitized by Google

gleichwertig sind. Herr Reye[1]) zeigt kurz darauf, dafs Tetraeder, in deren Eckpunkten Raumstücke derart konzentriert werden können, dafs sie ein Raumstück bezüglich seiner Trägheitsmomente ersetzen, Poltetraeder des polaren Raumes Γ^2 sein müssen. Culmann und Herr Reye gelangen zum polaren Raume Γ^2 ausgehend von einem Trägheitsellipsoid, Hesse[2]) kommt später durch eine glückliche Intuition direkt zu ihm, ohne aber umgekehrt seinen Zusammenhang mit der Theorie der Trägheitsellipsoide zu erkennen. Alle diese Arbeiten sind analytisch. Synthetisch habe ich später zuerst mit Hilfe der Trägheitsellipse[3]) und dann unmittelbar aus dem definierenden Integrale[4]) das einem ebenen Flächenstücke $\mathfrak{F}$ zugeordnete polare Feld Γ^2 abgeleitet, seine Beziehungen zu den Trägheits- und Hauptachsen und die seiner Brennpunkte zu den Trägheits- und Zentrifugalmomenten von $\mathfrak{F}$ dargethan, insbesondere den Zusammenhang der Trägheitsellipsen von $\mathfrak{F}$ mit seinem polaren Felde Γ^2 aufgedeckt, indem ich nicht nur sich schneidende, sondern auch parallele Trägheitsachsen von $\mathfrak{F}$ einführte.

Bei einem Raumstücke $\mathfrak{R}$ gelangt man von seinen Zentrifugalmomenten bezüglich je zweier Ebenen unmittelbar zu dem mit ihm verknüpften Raume Γ^2, sowie zu den Beziehungen von Γ^2 zu den Trägheitsebenen, Hauptebenen und Hauptachsen von $\mathfrak{R}$. Werden auch zwei parallele Ebenen als Trägheitsebenen bezeichnet, wenn in Bezug auf sie das Zentrifugalmoment gleich Null ist, so umhüllen alle parallelen Trägheitsebenen, die je zu den Ebenen eines Ebenenbündels P parallel sind und von ihnen gleichweit abstehen, das Trägheitsellipsoid π^2 des Punktes P. Dafs Ebenen, für welche $\mathfrak{R}$ das gleiche Trägheitsmoment hat, je eine zu Γ^2 konfokale Fläche II. Klasse berühren, wird in **7.** synthetisch bewiesen und in den darauf folgenden Abschnitten gezeigt, in welcher Art die bekannten metrischen Eigenschaften der Zentrifugal- und Trägheitsmomente mit den Fokalkurven von Γ^2 verknüpft sind. Ebenso einfach, wie sich die Eigenschaften der Zentrifugal- und Trägheitsmomente aus denen der Fokalkurven ergeben, ergeben sich auch umgekehrt die Eigenschaften dieser aus denen jener. Ein kurzer Beweis des Reyeschen Satzes von den vier einem Raumstücke in Bezug

1) Reye, Beitrag zu der Lehre von den Trägheitsmomenten. Zeitschrift f. Mathematik u. Physik. **10** (1865), S. 433.

2) Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes. 2. Auflage. Leipzig 1869, 25. Vorlesung.

3) Jolles, Die Beziehungen der Zentralellipse eines ebenen Flächenstückes zu seinem imaginären Bilde. Dieses Archiv (3) **1** (1901), 91.

4) Jolles, Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes. Dieses Archiv (3) **2** (1902), 327.

Digitized by Google

auf seine Trägheitsmomente gleichwertigen Massenpunkten bildet den Schlufs der Abhandlung.

2. Jedem Elemente $d\mathfrak{R}$ eines endlichen Raumstückes $\mathfrak{R}$ kommt in Bezug auf eine beliebige Ebene ξ ein parallel einer Richtstrecke r gemessener Abstand r_ξ zu. In gleicher Weise entspricht dem Elemente $d\mathfrak{R}$ in Bezug auf eine zweite Ebene η ein parallel zur Richtstrecke s gemessener Abstand s_η. Je nachdem r_ξ und s_η gleichen oder entgegengesetzten Sinn wie r und s haben, wird ihnen ein positiver oder negativer Wert beigelegt. Unter diesen Voraussetzungen heifst bekanntlich das über das Raumstück $\mathfrak{R}$ ausgedehnte Integral:

$$\int r_\xi s_\eta d\mathfrak{R}$$

das Zentrifugalmoment des Raumstückes $\mathfrak{R}$ bezüglich der Ebenen ξ, η. Es werde, wenn r und s beliebige Neigungswinkel mit ihren Bezugsebenen ξ bzw. η einschliefsen, durch:

$$^{rs}M_{\xi\eta}(\mathfrak{R}) = {}^{rs}\int r_\xi s_\eta d\mathfrak{R}$$

bezeichnet, hingegen, wenn sie bzw. auf ihnen senkrecht stehen — als orthogonales Zentrifugalmoment des Raumstückes $\mathfrak{R}$ bezüglich der Ebenen ξ, η — durch:

$$M_{\xi\eta}(\mathfrak{R}) = \int r_\xi s_\eta d\mathfrak{R}.$$

Sowie η mit ξ zusammenfällt, geht das Zentrifugalmoment des Raumstückes $\mathfrak{R}$ bezüglich der Ebenen ξ, η in sein Trägheitsmoment:

$$\int r_\xi^2 d\mathfrak{R}$$

bezüglich der Ebene ξ über. Es werde für eine beliebige Richtstrecke r durch:

$$^{rr}M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = {}^{rr}\int r_\xi^2 d\mathfrak{R}$$

und für eine zu ξ senkrechte Richtstrecke — als orthogonales Trägheitsmoment bezüglich der Ebene ξ — durch:

$$M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = \int r_\xi^2 d\mathfrak{R}$$

dargestellt.

Zwischen den Trägheitsmomenten von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf zwei parallele Ebenen ξ, η, von denen ξ durch den Schwerpunkt S von $\mathfrak{R}$ geht und von η den parallel zum Richtstrahl r gemessenen Abstand $\varrho_{\xi\eta}$ hat, besteht die Beziehung:

$$(\alpha) \qquad {}^{rr}M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = {}^{rr}M_{\eta\eta}(\mathfrak{R}) + \varrho_{\xi\eta}^2 \mathfrak{R}.$$

Digitized by Google

3. Wird im Integral:

$$^{r}\int r_{\xi} d\mathfrak{R}$$

der Abstand r_{ξ} des Elementes $d\mathfrak{R}$ von der Ebene ξ als Maſs einer den Raumteil $d\mathfrak{R}$ ausfüllenden Masse aufgefafst, so ist hierdurch ein Massensystem:

$$^{r}\mathfrak{M}_{\xi} = {}^{r}\int r_{\xi} d\mathfrak{R}$$

bestimmt, und zwar entspricht der Ebene ξ eindeutig der Schwerpunkt X von $^{r}\mathfrak{M}_{\xi}$. Nun verschwindet der Ausdruck:

$$^{s\,r}\mathfrak{M}_{\xi\eta} = {}^{s\,r}\int s_{\eta}(r_{\xi} d\mathfrak{R})$$

für das statische Moment von $^{r}\mathfrak{M}_{\xi}$ in Bezug auf eine Ebene η, die durch den Schwerpunkt X von $^{r}\mathfrak{M}_{\xi}$ geht, ferner ist:

$$^{s\,r}\int s_{\eta}(r_{\xi} d\mathfrak{R}) = {}^{r\,s}\int r_{\xi}(s_{\eta} d\mathfrak{R}),$$

folglich geht eine Ebene η durch den Schwerpunkt X von $^{r}\mathfrak{M}_{\xi}$, sobald der Schwerpunkt Y von $^{s}\mathfrak{M}_{\eta}$ auf ξ liegt. Jeder Ebene des Bündels X entspricht hiernach ein Punkt von ξ, dem Punkte X ist also auch die Ebene ξ eindeutig zugeordnet.

Zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes besteht nunmehr folgende Beziehung. Ein Punkt X bestimmt eindeutig eine Ebene ξ und diese wiederum eindeutig jenen, ferner eine Ebene η, die durch X geht, einen Punkt Y, der auf ξ liegt. Eine solche Verwandtschaft zwischen den Punkten und Ebenen des Raumes heifst bekanntlich eine involutorische Korrelation und der Raum selbst, dessen Punkte und Ebenen derart verknüpft sind, ein polarer Raum. Durch die Gleichung:

$$^{r\,s}\int r_{\xi} s_{\eta} d\mathfrak{R} = 0$$

ist also ein polarer Raum von der Eigenschaft bestimmt, dafs in Bezug auf irgend zwei seiner konjugierten Ebenen das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{R}$ gleich Null ist.

Als ein Paar konjugierter zusammenfallender Ebenen ist jede Berührungsebene τ der Inzidenzfläche γ^{3} von Γ^{2} aufzufassen. Da aber das Trägheitsmoment von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf eine reelle Ebene τ niemals gleich Null sein kann, so hat der polare Raum keine reelle Inzidenzfläche γ^{3}, und die in ihm seinen Durchmessern zukommenden Punktinvolutionen sind elliptisch.

Einer durch den Schwerpunkt S des Raumstückes $\mathfrak{R}$ gehenden Ebene ξ entspricht ein Massensystem $^{r}\mathfrak{M}_{\xi}$ mit der Masse Null, das sich aus zwei Massensystemen mit verschiedenen Schwerpunkten zusammen-

Digitized by Google

setzt. Sein Schwerpunkt X liegt also im Unendlichen, und ξ ist somit eine Durchmesserebene und S der Mittelpunkt des polaren Raumes Γ^2.

4. Hat in Bezug auf zwei Ebenen das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{R}$ den Wert Null, so werden diese Ebenen, gleichgiltig, ob sie sich schneiden oder parallel laufen, ein Paar Trägheitsebenen von $\mathfrak{R}$ genannt. Durch einen Strahl g gehen ∞^1 Paare von Trägheitsebenen, sie sind nach **3.** die Ebenenpaare der g im polaren Raume Γ^2 zukommenden Ebenen-involution. Unter ihnen ist im allgemeinen ein Paar zu einander senkrechter Ebenen, sie heifsen die durch g gehenden Hauptebenen von $\mathfrak{R}$. Durch einen Punkt P gehen im allgemeinen drei Ebenen, die paarweise Hauptebenen von $\mathfrak{R}$ sind. Sie bilden das P zugehörige Hauptdreiflach von $\mathfrak{R}$. Die Kanten aller Hauptdreiflache von $\mathfrak{R}$ heifsen seine Hauptachsen, insbesondere die Kanten des einem Punkte P zugehörigen Hauptdreiflachs, die P zugehörigen Hauptachsen. Wird zum Mittelpunkte eines Hauptdreiflachs der Schwerpunkt S von $\mathfrak{R}$ gewählt, so geht es in das Zentraldreiflach von $\mathfrak{R}$ über, seine Kanten und Flächen werden durch die Bezeichnungen Zentralachsen bzw. Zentralflächen von $\mathfrak{R}$ ausgezeichnet. Zentralachsen und Zentralflächen sind identisch mit den Hauptachsen bzw. Symmetrieebenen von Γ^2. Je nachdem die Zentralebenen von $\mathfrak{R}$ die Fokalellipse oder die Fokalhyperbel oder die imaginäre Fokalkurve enthalten, heifsen sie die erste bzw. zweite oder dritte Zentralebene und die bzw. zu ihnen senkrechten Zentralachsen a, b, c die erste, zweite oder dritte Zentralachse. Die Potenzen $-\mathfrak{a}^2$, $-\mathfrak{b}^2$, $-\mathfrak{c}^2$ der den Zentralachsen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ in Γ^2 bzw. zukommenden elliptischen Punktinvolutionen erfüllen die Bedingung:

$$-\mathfrak{a}^2 < -\mathfrak{b}^2 < -\mathfrak{c}^2.$$

Da die Hauptachsen des Raumstückes $\mathfrak{R}$ mit den konjugierten Normalstrahlen des polaren Raumes Γ^2 identisch sind, so gelten die für diese abgeleiteten Sätze auch für jene. Die Hauptachsen bilden also einen Komplex II. Grades, den bekannten Achsenkomplex des polaren Raumes Γ^2. Durch einen Punkt gehende Hauptachsen sind im allgemeinen Erzeugende eines gleichseitigen Strahlenkegels II. Ordnung, er enthält den Schwerpunkt S von $\mathfrak{R}$ und die unendlich fernen Punkte der Zentralachsen. In einer Ebene gelegene Hauptachsen bilden im allgemeinen einen parabolischen Strahlenbüschel II. Ordnung, er enthält die Schnittstrahlen der Ebene mit den Zentralebenen. Die unendlich ferne Ebene und die Zentralebenen sind die Hauptebenen, der Schwerpunkt S und die unendlich fernen Punkte der Zentralachsen die Hauptpunkte des Komplexes. Zu einer Zentralebene normale Ebenen enthalten einen Büschel zu ihr normaler und einen Büschel sich auf ihr schneidender

Digitized by Google

Hauptachsen. Durch den Schwerpunkt S gehende Ebenen enthalten einen Büschel paralleler Hauptachsen und einen solchen mit dem Mittelpunkte S, u. s. w. Eine ausführliche Theorie des Achsenkomplexes eines polaren Raumes giebt Herr Reye im 15. Vortrage der dritten Auflage der zweiten Abteilung seiner Geometrie der Lage.

5. Der zur Richtstrecke r parallele Abstand $\varrho_{x\eta}$ eines Punktes X von einer Ebene η und der zur Richtstrecke s parallele Abstand $\varrho_{s\xi}$ des Schwerpunktes S von der Polarebene ξ von X im polaren Raume Γ^2 sind positiv oder negativ, wenn sie gleichen oder entgegengesetzten Sinn wie ihre Richtstrecken haben. Nun ist nach **3.** das statische Moment ${}^{r}\mathfrak{M}_{\xi\eta}$ des in X konzentrierten Massensystemes:

$${}^{r}\mathfrak{M}_{\xi} = \varrho_{s\xi}\mathfrak{R}$$

in Bezug auf η gleich dem Zentrifugalmomente:

$${}^{rs}M_{\xi\eta}(\mathfrak{R})$$

von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf η, folglich läfst sich dieses in der Form:

$${}^{rs}M_{\xi\eta}(\mathfrak{R}) = \varrho_{x\eta}\varrho_{s\xi}\mathfrak{R}$$

schreiben. Da aber:

$${}^{rs}M_{\xi\eta}(\mathfrak{R}) = {}^{sr}M_{\eta\xi}(\mathfrak{R})$$

ist, so kann auch:

$${}^{rs}M_{\xi\eta}(\mathfrak{R}) = \varrho_{r\xi}\varrho_{s\eta}\mathfrak{R}$$

gesetzt werden.

Das Zentrifugalmoment von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf ξ, η wird zum Trägheitsmomente ${}^{rr}M_{\xi\xi}(\mathfrak{R})$ in Bezug auf ξ, wenn η mit ξ zusammenfällt, sein Ausdruck lautet also:

$${}^{rr}M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = \varrho_{x\xi}\varrho_{s\xi}\mathfrak{R}.$$

Fallen $\varrho_{s\xi}$ und $\varrho_{x\xi}$ auf den zur Ebene ξ konjugierten Durchmesser x des polaren Raumes Γ^2, ist also die Richtstrecke r zu ihm parallel, so sind X und der Schnittpunkt $(x, \xi) = X_1$ konjugiert. Nun besteht zwischen den Strecken SX und SX_1 und der Potenz $-\mathfrak{x}^2$ der x nach **3.** in Γ^2 zugehörigen elliptischen Punktinvolution die Beziehung:

$$SX \cdot SX_1 = -\mathfrak{x}^2.$$

Nach ihr ist:

$$SX_1' = \mathfrak{x} \text{ und } X'X_1' = 2\mathfrak{x},$$

wenn X, X_1 bzw. mit denjenigen konjugierten Punkten X', X_1' von x zusammenfallen, deren Abstand der Mittelpunkt S von Γ^2 hälftet. Für die durch X_1' gehende zu ξ parallele Ebene ξ' gilt folglich:

$${}^{rr}M_{\xi'\xi'}(\mathfrak{R}) = 2\mathfrak{x}^3\mathfrak{R}$$

Digitized by Google

und für die zu ξ parallele, also zu x konjugierte Durchmesserebene ξ'', nach der Gleichung (α) in **2.**:

$$^{rr}M_{\xi'',\xi''}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{x}^2\mathfrak{R}.$$

Die konjugierten Punkte X', X_1' aller Durchmesser x von Γ^2, deren Abstand durch den Mittelpunkt S von Γ^2 gehälftet wird, liegen nun auf einem Ellipsoide σ^2, dessen konjugierte Durchmesser die von Γ^2 sind. Folglich gilt, wenn die Strecken SX', SX_1' die der Ebene ξ'' bezüglich S konjugierten Trägheitshalbmesser heifsen: Werden die den Durchmesserebenen des polaren Raumes Γ^2 bezüglich S konjugierten Trägheitshalbmesser vom Schwerpunkte S aus ihrer Gröfse und Richtung nach abgetragen, so liegen ihre Endpunkte auf einem Ellipsoide σ^2, dessen konjugierte Durchmesser mit denen von Γ^2 zusammenfallen. Dieses Ellipsoid heifst das Zentralellipsoid des Raumstückes $\mathfrak{R}$, seine parallelen Tangentialebenen sind in Γ^2 konjugiert, also paarweise Trägheitsebenen von $\mathfrak{R}$. Das Zentralellipsoid σ^2 und die imaginäre Inzidenzfläche γ^2 von Γ^2 berühren sich in ihrer Schnittkurve mit der unendlich fernen Ebene und gehen in sich selbst über, wenn eine dieser Flächen in Bezug auf die andere polarisiert wird.

6. Der Schnittpunkt X_1 einer beliebigen Ebene ξ mit dem ihr in Γ^2 konjugierten Durchmesser x hälftet den Abstand zweier bestimmten auf x gelegenen konjugierten Punkte A, A_1 von Γ^2. Sie werden auf x durch eine Kugel mit dem Mittelpunkte X_1 ausgeschnitten, deren durch den Schwerpunkt S gehende zu x senkrechte Sehne so grofs ist, wie die auf x gelegene Durchmessersehne $X'X_1' = 2\mathfrak{x}$ des Zentralellipsoids. Für die Abstände des Punktes X_1 von A und A_1 gilt folglich die Beziehung:

$$X_1A^2 = X_1A_1^2 = SX_1^2 + \mathfrak{x}^2,$$

und sonach sind sie die der Ebene ξ bezüglich des Punktes X_1 konjugierten Trägheitshalbmesser. Die Endpunkte $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ der einem beliebigen Punkte P von ξ bezüglich ξ konjugierten Trägheitshalbmesser werden also, von ihm aus gemessen, erhalten, indem man die Verbindungsgerade des Punktes P und des Poles X von ξ mit den durch A_1 und A laufenden zu ξ parallelen Ebenen α und α_1 in $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ zum Schnitt bringt. α steht soweit vom Punkte P ab wie α_1, ferner ist α die Polarebene von A und α_1 die von A_1. Beide Ebenen sind folglich die gleichweit von ξ abstehenden und zu ihm parallelen Trägheitsebenen von $\mathfrak{R}$.

Sind im polaren Bündel P von Γ^2 die Strahlen m den Ebenen μ konjugiert, so sind die Trägheitsebenen α, α_1 korrelativ, wenn den Schnittpunkten $\mathfrak{M}$ und Schnittstrahlen $\mathfrak{m}$ der m und μ mit α die

Digitized by Google

Schnittstrahlen $\mathfrak{m}_1$ und die Schnittpunkte $\mathfrak{M}_1$ der μ und m mit α_1 bzw. entsprechen. Die Verbindungsebenen η', η_1' der homologen Elemente $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{m}_1'$ und $\mathfrak{m}'$, $\mathfrak{M}_1'$ der korrelativen Felder α, α_1 laufen nun parallel, folglich können die beiden parallelen Ebenenpaare α, α_1 und η', η_1' als zwei Paar Gegenflächen eines vollständigen Vierkants K angesehen werden, dessen drittes Paar Gegenflächen μ' und die Verbindungsebene μ_1' der Schnittstrahlen (η', α) und (η_1', α_1) bilden. α, α_1 sind aber als Trägheitsebenen in Γ^2 konjugiert, ferner ist μ' der Ebene μ_1' konjugiert, da μ_1' den μ' im polaren Bündel P konjugierten Strahl m' enthält, somit ist das vollständige Vierkant K ein Polvierkant des polaren Raumes Γ^2, d. h. auch sein drittes Paar Gegenflächen η', η_1' sind konjugiert. Die korrelativen Trägheitsebenen α, α_1 erzeugen hiernach einen Ebenenbündel II. Ordnung, von dem je zwei parallele Ebenen in Γ^2 konjugiert und folglich je zwei Trägheitsebenen von $\mathfrak{R}$ sind. Sein Mittelpunkt ist P und die in seinem Durchmesserbündel konjugierten Strahlen und Ebenen fallen mit den konjugierten Strahlen und Ebenen des polaren Bündels P von Γ^2 zusammen. Da die Inzidenzfläche des polaren Raumes Γ^2 imaginär ist, so ist es auch die aller seiner polaren Bündel P. Die von jenem Ebenenbündel II. Ordnung umhüllte Fläche II. Klasse π^2 ist also ein Ellipsoid. Kurz: Dreht sich eine Ebene um einen Punkt P, so umhüllen die zu ihr parallelen und von ihr gleich weit abstehenden Trägheitsebenen ein Ellipsoid π^2.

Die einem Durchmesser x von π^2 konjugierte Durchmesserebene ξ ist ihm — wie eben gezeigt — auch in Γ^2 konjugiert, somit begrenzen der Mittelpunkt P und die beiden zu der Durchmesserebene ξ parallelen Tangentialebenen α, α_1 von π^2 auf x zwei Strecken $P\mathfrak{P}$ und $P\mathfrak{P}_1$, die gleich sind den ξ bezüglich P konjugierten Trägheitshalbmessern. Aus diesem Grunde heifst das Ellipsoid π^2 das durch das Raumstück $\mathfrak{R}$ bestimmte Trägheitsellipsoid des Punktes P. Das Trägheitsellipsoid des Schwerpunktes S ist das in **5.** gefundene Zentralellipsoid. Die Trägheitsellipsoide der Punkte eines Durchmessers x von Γ^2 schneiden ihn in Punktpaaren der ihm in Γ^2 nach **3.** zukommenden elliptischen Punktinvolution, folglich umschliefsen die Trägheitsellipsoide aller Punkte des Raumes den Schwerpunkt S des Raumstückes $\mathfrak{R}$. Sie schneiden aufserdem das Zentralellipsoid σ^2 in Kegelschnitten, deren Ebenen parallel laufen zu der x in Γ^2 konjugierten Durchmesserebene. Die Trägheitsellipsoide der Punkte einer beliebigen Ebene ε berühren die zu ihr parallelen und von ihr gleich weit abstehenden Trägheitsebenen in Punktepaaren, deren Verbindungsgeraden durch den Pol E von ε in Γ^2 laufen. Diese Verbindungsgeraden laufen parallel, wenn

Digitized by Google

ε eine Durchmesserebene von Γ^2 ist. Eine Durchmesserebene schneidet die Trägheitsellipsoide ihrer Punkte in Ellipsen, deren parallele Tangenten in Γ^2 konjugiert sind. Diese Ellipsen gehen für die Trägheitsellipsoide der Brennpunkte der Durchmesserebene in Kreisschnitte dieser Flächen über. Zu einer Geraden g parallele und von ihr gleich weit abstehende parallele Trägheitsebenen umhüllen einen Strahlenzylinder, er berührt die Trägheitsellipsoide der Punkte von g längs Kegelschnitten, deren Ebenen durch die Polare g_1 von g in Γ^2 gehen. Sobald g mit einem Durchmesser von Γ^2 zusammenfällt, laufen diese Ebenen parallel.

7. In einer Durchmesserebene ε von Γ^2 liegt ein polares Feld Γ^2_ε, dessen konjugierte parallele Strahlen s, s_1 aus dem Pole der Durchmesserebene durch konjugierte parallele Ebenen von Γ^2, oder was dasselbe sagt, durch parallele Trägheitsebenen σ, σ_1 von $\mathfrak{R}$ projiziert werden. Ist ε eine Zentralebene ξ von $\mathfrak{R}$, so stehen diese parallelen Trägheitsebenen σ, σ_1 in ihren Schnittstrahlen s, s_1 auf ξ senkrecht, haben diese von einander konstanten Abstand, so haben es auch jene und umgekehrt. Strahlen von ξ, deren konjugierte zu ihnen parallele Strahlen von ihnen um gleiche Strecken konstanter Länge abstehen, umhüllen nun je einen Kegelschnitt der durch das polare Feld Γ^2_ξ von Γ^2 bestimmten Schar konfokaler Kegelschnitte.[1]) Die Scharen dieser in den Zentralebenen ξ gelegenen konfokalen Kegelschnitte sind perspektiv zu der durch den polaren Raum Γ^2 bestimmten Schar konfokaler Flächen II. Klasse. Entsprechende Kurven liegen auf derselben Fläche, schneiden die Zentralachsen je in den nämlichen Punktepaaren und berühren in ihnen je dieselben zu den Zentralachsen senkrechten Tangentialebenen der Fläche. Die zu Γ^2 konfokalen Flächen werden also längs ihrer Schnittkurven mit den Zentralebenen, ihren sogenannten Zentralkurven, von Ebenen berührt, denen je dasselbe orthogonale Trägheitsmoment zukommt. — Wird die eine beliebige Ebene τ berührende und zu Γ^2 konfokale Fläche II. Klasse Φ^2 aufgesucht, und durch ihren Berührungspunkt T eine Durchmesserebene derart gelegt, dafs ihre Schnittkurve α^2 mit Φ^2 mindestens eine Zentralebene schneidet, so hat der Φ^2 längs α^2 umschriebene Strahlenzylinder II. Klasse A^2 mindestens ein Paar Φ^2 in Punkten einer Zentralkurve berührende Tangentialebenen. Die Brennachsen des Strahlenzylinders A^2 fallen nun mit den Brennachsen desjenigen polaren Bündels von Γ^2 zusammen, dessen unendlich ferner Mittelpunkt zugleich der unendlich ferne Punkt der Zylindererzeugenden ist, folglich entsprechen den Tangentialebenen

1) Jolles: Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes. Dieses Archiv (3) **2** (1902), 335.

Digitized by Google

von A^2 in Γ^2 konjugierte zu ihnen parallele Ebenen, die je von ihnen um gleiche Strecken konstanter Länge abstehen. $\mathfrak{R}$ hat also für die Tangentialebenen des Zylinders A^2 dasselbe orthogonale Trägheitsmoment. Es ist gleich dem orthogonalen Trägheitsmomente von $\mathfrak{R}$ für die Tangentialebenen von Φ^2 längs seinen Schnittkurven mit den Zentralebenen, da n. d. K. unter den Tangentialebenen des Zylinders A^2 auch solche sind, die Φ^2 in Punkten einer Zentralkurve berühren. Zu den Tangentialebenen des Zylinders A^2 gehört nun die Ebene τ, somit gilt: Ebenen gleichen orthogonalen Trägheitsmomentes umhüllen je eine zum polaren Raume Γ^2 konfokale Fläche II. Klasse. Die durch einen Punkt P gehenden Ebenen gleichen Trägheitsmomentes umhüllen je einen Strahlenkegel II. Klasse, er ist konfokal zum polaren Bündel P von Γ^2.

8. Zu den zum polaren Raume Γ^2 konfokalen Flächen II. Klasse gehören seine Fokalkurven, somit liegen in Bezug auf diese Flächen die Pole einer Berührungsebene τ einer Fokalkurve auf dem auf τ in seinem Berührungspunkte T senkrechten Strahle. Er ist zu τ demnach auch in Γ^2 konjugiert, und der polare Bündel T erweist sich folglich in Γ^2 als ein rotatorischer, dessen Rotationsachse mit der Tangente t im Punkte T der betreffenden Fokalkurve zusammenfällt. Die Trägheitsellipsoide τ^2 der Punkte T einer Fokalkurve sind hiernach Rotationsellipsoide. Sie berühren die zur ersten bzw. zweiten Zentralebene parallelen und von ihnen bzw. gleich weit abstehenden Trägheitsebenen, und ihre Äquatorkreise haben, je nachdem T auf der Fokalellipse oder -hyperbel liegt, nach **4.** den Halbmesser $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$. Zu den Punkten T der Fokalellipse gehörige Trägheitsellipsoide τ^2 schneiden die erste Zentralebene in Ellipsen, deren Haupt- und Nebenachse je auf die Normale und Tangente in den Punkten T fällt.[1]) Ihre Hauptsehnen haben die konstante Länge $2\mathfrak{a}$, ihre Nebensehne hat in einem Hauptscheitelpunkte der Fokalellipse die Länge $2\mathfrak{b}$ und nimmt, wenn sich die Tangente von ihm aus nach einem Nebenscheitelpunkte wälzt, stetig ab, bis sie in ihm den Wert $2\mathfrak{c}$ erlangt. Zu den Punkten T der Fokalhyperbel gehörige Trägheitsellipsoide τ^2 schneiden die zweite Zentralebene in Ellipsen, deren Haupt- und Nebenachse aber je auf die Tangente und Normale der Kurve in den Punkten T fällt. Die Nebensehnen haben die konstante Länge $2\mathfrak{b}$. Ihre Hauptsehne hat für einen Scheitelpunkt der Fokalhyperbel die Länge $2\mathfrak{a}$ und wächst stetig, wenn sich die Tangente von ihm aus auf der Hyperbel abwälzt, bis

1) Jolles: Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines ebenen Flächenstückes. Dieses Archiv (3) **2** (1902), Nr. 8.

Digitized by Google

sie mit einer Asymptote zusammenfällt. Für deren unendlich fernen Berührungspunkt ist sie unendlich grofs.

9. Das orthogonale Trägheitsmoment $M_{\xi\xi}(\mathfrak{R})$ von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf eine Ebene ξ läfst sich, wenn ξ zu einer Ebene ξ' parallel läuft, und diese von ihr den Abstand $\varrho_{\xi'\xi}$ hat, in der Form:

$$M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = \int (r_{\xi'} + \varrho_{\xi'\xi})^2 d\mathfrak{R} = M_{\xi'\xi'}(\mathfrak{R}) + 2\varrho_{\xi'\xi}\int r_{\xi'} d\mathfrak{R} + \varrho^2_{\xi'\xi}\mathfrak{R}$$

schreiben. Hierin ist:

$$\int r_{\xi'} d\mathfrak{R} = \varrho_{s_\xi'}\mathfrak{R},$$

$$\varrho_{\xi'\xi} = \varrho_{s_\xi} - \varrho_{s_\xi'},$$

folglich wird:

$$M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = M_{\xi'\xi'}(\mathfrak{R}) + \{2(\varrho_{s_\xi} - \varrho_{s_\xi'})\varrho_{s_\xi'} + (\varrho_{s_\xi} - \varrho_{s_\xi'})^2\}\mathfrak{R},$$

oder:

$$M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = M_{\xi'\xi'}(\mathfrak{R}) + \{\varrho^2_{s_\xi} - \varrho^2_{s_\xi'}\}\mathfrak{R}.$$

Berührt ξ' insbesondere die Fokalellipse bzw. die Fokalhyperbel, so ist nach 8. $M_{\xi'\xi'}(\mathfrak{R})$ gleich $a^2\mathfrak{R}$ bzw. $b^2\mathfrak{R}$ und folglich:

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = (a^2 + \varrho^2_{s_\xi} - \varrho^2_{s_{\xi'}})\mathfrak{R} \\ \text{bzw.} \\ M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = (b^2 + \varrho^2_{s_\xi} - \varrho^2_{s_{\xi'}})\mathfrak{R}. \end{cases}$$

Sind nun:

$$M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = (a^2 + \varrho^2_{s_\xi} - \varrho^2_{s_\xi})\mathfrak{R},$$

$$M_{\eta\eta}(\mathfrak{R}) = (a^2 + \varrho^2_{s_\eta} - \varrho^2_{s_{\eta'}})\mathfrak{R},$$

$$M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R}) = (a^2 + \varrho^2_{s_\zeta} - \varrho^2_{s_{\zeta'}})\mathfrak{R}$$

die orthogonalen Trägheitsmomente für drei durch einen Punkt P gehende zu einander senkrechte Ebenen ξ, η, ζ, so ist:

$$M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) + M_{\eta\eta}(\mathfrak{R}) + M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R}) = (3a^2 + SP^2 - SP'^2)\mathfrak{R},$$

wenn die drei je zu ξ, η, ζ parallelen, die Fokalellipse berührenden Ebenen ξ', η', ζ' sich in P' schneiden. Die Mittelpunkte der orthogonalen, der Fokalellipse umschriebenen Dreikante liegen aber auf einer zur Fokalellipse konzentrischen Kugel mit dem Halbmesser $\sqrt{2a^2 - (b^2 + c^2)}$[1]), somit nimmt obige Gleichung die Gestalt an:

$$M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) + M_{\eta\eta}(\mathfrak{R}) + M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R}) = \{a^2 + b^2 + c^2 + SP^2\}\mathfrak{R}.$$

1) Bekanntlich schneiden sich zu einander senkrechte Tangenten eines Kegelschnittes γ^2 auf einem zu ihm konzentrischen Kreise k^2. Sind demnach

Digitized by Google

Der Klammerausdruck bleibt für je drei zu einander rechtwinklige Ebenen ξ, η, ζ des Bündels P unveränderlich, also auch die Summe der auf sie bezogenen orthogonalen Trägheitsmomente $M_{\xi\xi}(\mathfrak{R})$, $M_{\eta\eta}(\mathfrak{R})$, $M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R})$. Die Punkte, für welche diese Summe konstant ist, liegen somit je auf einer Kugel mit dem Mittelpunkte S. Wird diese Kugel zu einer Punktkugel, d. h. zum Schwerpunkte S selbst, so nimmt $M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) + M_{\eta\eta}(\mathfrak{R}) + M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R})$ seinen kleinsten Wert $(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \mathfrak{c}^2)\mathfrak{R}$ an. Er ist gleich $\mathfrak{R}$ mal dem Quadrate des Halbmessers derjenigen Kugel, auf welcher die Mittelpunkte der dem Zentralellipsoid umschriebenen orthogonalen Dreiflache liegen.

Zu gleichen Ergebnissen würde man gelangen, wenn die Ebenen ξ', η', ζ' die Fokalhyperbel berührten, also der Berechnung der orthogonalen Trägheitsmomente in Bezug auf die drei zu einander senkrechten Ebenen ξ, η, ζ die zweite der Formeln (α) zugrunde läge. Nur wäre in diesem Falle darauf zu achten, dafs die mit der Fokalhyperbel konzentrische Kugel vom Halbmesser $\sqrt{2\mathfrak{b}^2 - (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2)}$, auf welcher die Mittelpunkte der ihr umschriebenen rechtwinkligen Dreikante liegen, nur reell sein kann, wenn:

$$2\mathfrak{b}^2 > \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{c}^2$$

ist.

10. Die durch die Fokalkurven des polaren Raumes Γ^2 bestimmte Schar von konfokalen Flächen II. Klasse hat nach **7.** die Eigenschaft, dafs die orthogonalen Trägheitsmomente bezüglich der Tangentialebenen je einer von ihnen konstant bleiben. Gleiten demnach die Seitenflächen eines orthogonalen Dreiflaches an drei verschiedenen Flächen der konfokalen Schar hin, so bewegt sich nach **9.** der Mittelpunkt des Dreiflaches auf einer mit jenen Flächen konzentrischen Kugel. Der Halbmesser dieser Kugel wird insbesondere gleich der halben Hauptsehne $\mathfrak{c}_i$ der eine Ebene ε berührenden Fläche Φ_i^2 der Schar, wenn die eine Fläche des orthogonalen Dreiflaches die Fläche Φ_i^2 selbst, die beiden anderen die Fokalkurven berühren. Die halbe Hauptsehne von Φ_i^2 ist also gleich dem Abstande des Mittelpunktes

---

die Kegelschnitte τ^2 die orthogonalen Projektionen von γ^2 auf die Ebenen eines Ebenenbüschels, dessen Achse eine Tangente t von γ^2 ist, so liegen die Schnittpunkte ihrer je zu einander senkrechten Tangenten auf je zu den τ^2 konzentrischen Kreisen t^2. Die Kreise t^2 haben mit der Tangente t dieselben Punkte A, B, wie k^2 gemein und ihre Mittelpunkte T sind je die orthogonalen Projektionen des Mittelpunktes C von k^2 auf die Ebenen jener Kreise. Letztere liegen folglich auf einer durch k^2 gehenden Kugel mit dem Mittelpunkte C. Kurz: Die Mittelpunkte der orthogonalen einem Kegelschnitte umschriebenen Dreikante liegen auf einer mit ihm konzentrischen Kugel.

Digitized by Google

S von Γ^2 von einem auf ε gelegenen Punkte F_ε, in dem sich zwei zu ε und zu einander senkrechte Ebenen schneiden, von denen jede eine andere Fokalkurve berührt. Eine um S mit dem Halbmesser SF_ε beschriebene Kugel schneidet hiernach die mit der dritten Zentralachse c zusammenfallende Hauptachse von Φ_τ^2 in den Hauptscheitelpunkten T, T' dieser Fläche. In ihnen wird sie bzw. von den auf der Zentralachse c senkrechten Ebenen τ und τ' berührt. Den Ebenen τ und τ' entsprechen gleich große orthogonale Trägheitsmomente, ihr Wert ergiebt sich, da ST bzw. ST' n. d. K. gleich c_ε ist, als:

$$M_{\tau\tau}(\mathfrak{R}) = M_{\tau'\tau'}(\mathfrak{R}) = (c^2 + c_\varepsilon^2)\,\mathfrak{R}.$$

Allen Tangentialebenen der zum polaren Raume Γ^2 konfokalen Fläche II. Klasse Φ_ε^2 kommt aber gleiches orthogonales Trägheitsmoment zu, folglich kann das orthogonale Trägheitsmoment von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf die Ebene ε auch durch den Ausdruck:

$$(\alpha) \qquad M_{\varepsilon\varepsilon}(\mathfrak{R}) = (c^2 + c_\varepsilon^2)\,\mathfrak{R}$$

dargestellt werden. Der einer Ebene ε entsprechende orthogonale Trägheitshalbmesser hat sonach die Länge der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete gleich der halben Hauptsehne des Zentralellipsoides und dessen andere Kathete gleich dem Abstande des Schwerpunktes S von einem Punkte auf ε ist, in dem eine zu ε senkrechte Tangentialebene der Fokalellipse eine zu ihr und ε senkrechte Tangentialebene der Fokalhyperbel schneidet.

11. Durch einen Punkt P gehen von den zu Γ^2 konfokalen Flächen II. Klasse bekanntlich drei: ein Ellipsoid, ein einschaliges Hyperboloid und ein zweischaliges. Jede von ihnen berührt in P eine andere Fläche seines Hauptdreiflaches und zwar das Ellipsoid diejenige, welche nur die Fokalhyperbel, das einschalige Hyperboloid diejenige, die beide Fokalkurven und das zweischalige Hyperboloid diejenige, die nur die Fokalellipse schneidet. Die Kanten des zu P gehörigen Hauptdreiflaches — also die zu P gehörigen Hauptachsen — durchstoßen nun die erste bzw. zweite Zentralebene in den Eckpunkten eines Poldreieckes des durch die Fokalellipse bzw. Fokalhyperbel bestimmten polaren Feldes. Da nun von den durch einen Punkt P gehenden drei konfokalen Flächen die halbe Hauptsehne des Ellipsoides größer ist, als die des einschaligen Hyperboloides, und diese wiederum größer ist, als die des zweischaligen, so folgt aus der Gleichung (α) in **10:** Die Hauptachse des Trägheitsellipsoides π^2 eines Punktes P schneidet die erste Zentralebene innerhalb der Fokalellipse, die zweite außerhalb der Fokalhyperbel, seine erste Nebenachse schneidet beide Zentralebenen

Digitized by Google

aufserhalb ihrer Fokalkurven, und endlich seine zweite Nebenachse die erste Zentralebene aufserhalb, die zweite innerhalb ihrer Fokalkurve.

12. Das orthogonale Zentrifugalmoment:

$$M_{\xi\eta} = \int r_\xi s_\eta dR$$

nimmt, wenn an die Stelle der r_ξ, s_η bzw. die Abstände $r_{\xi'}$, $s_{\eta'}$ von zwei zu ξ, η bzw. parallelen Ebenen ξ', η' treten und $\varrho_{\xi'\xi}$, $\varrho_{\eta'\eta}$ die Abstände der parallelen Ebenen ξ, ξ' und η, η' bedeuten, die Gestalt an:

$$M_{\xi'\eta}(\mathfrak{R}) = \int (r_{\xi'} + \varrho_{\xi'\xi})(s_{\eta'} + \varrho_{\eta'\eta}) d\mathfrak{R}$$
$$= \int r_{\xi'} s_{\eta'} d\mathfrak{R} + \varrho_{\xi'\xi} \int s_{\eta'} d\mathfrak{R} + \varrho_{\eta'\eta} \int r_{\xi'} d\mathfrak{R} + \varrho_{\xi'\xi}\varrho_{\eta'\eta}\mathfrak{R}.$$

Nun ist:

$$\int s_{\eta'} d\mathfrak{R} = \varrho_{s_{\eta'}}\mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \int r_{\xi'} d\mathfrak{R} = \varrho_{s_{\xi'}}\mathfrak{R},$$

ferner:

$$\varrho_{\xi'\xi} = \varrho_{s_\xi} - \varrho_{s_{\xi'}} \quad \text{und} \quad \varrho_{\eta'\eta} = \varrho_{s_\eta} - \varrho_{s_{\eta'}},$$

folglich wird:

$$M_{\xi'\eta}(\mathfrak{R}) = \int r_{\xi'} s_{\eta'} d\mathfrak{R} + (\varrho_{s_\xi} - \varrho_{s_{\xi'}})\varrho_{s_{\eta'}}\mathfrak{R} + (\varrho_{s_\eta} - \varrho_{s_{\eta'}})\varrho_{s_{\xi'}}\mathfrak{R}$$
$$+ (\varrho_{s_\xi} - \varrho_{s_{\xi'}})(\varrho_{s_\eta} - \varrho_{s_{\eta'}})\mathfrak{R}$$

oder:

$$M_{\xi'\eta}(\mathfrak{R}) = \int r_{\xi'} s_{\eta'} d\mathfrak{R} + (\varrho_{s_\xi}\varrho_{s_\eta} - \varrho_{s_{\xi'}}\varrho_{s_{\eta'}})\mathfrak{R}.$$

Stehen ξ und η senkrecht auf einander, und geht von den bzw. zu ihnen parallelen Ebenen ξ', η' jede durch den Pol der anderen in Bezug auf eine der Fokalkurven, so sind die zu einander senkrechten Ebenen ξ', η' nicht nur in Bezug auf jene Fokalkurve, sondern auch im polaren Raume Γ^2 konjugiert. Es ist unter dieser Voraussetzung nach **3.** das orthogonale Zentrifugalmoment:

$$\int r_{\xi'} s_{\eta'} d\mathfrak{R} = 0,$$

und das orthogonale Zentrifugalmoment von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf zwei zu einander senkrechte Ebenen ξ, η:

$$(\alpha) \qquad M_{\xi\eta}(\mathfrak{R}) = (\varrho_{s_\xi}\varrho_{s_\eta} - \varrho_{s_{\xi'}}\varrho_{s_{\eta'}})\mathfrak{R}.$$

Digitized by Google

Für zwei sich in S schneidende zu einander senkrechte Ebenen ξ, η ergiebt sich hiernach:

$$M_{\xi\eta}(\mathfrak{R}) = -\varrho_{s_\xi s_{\eta'}}\mathfrak{R}.$$

Da ferner $M_{\xi\eta}(\mathfrak{R})$ nach (α) nur verschwinden kann, sobald:

$$(\beta) \qquad \varrho_{s_\xi}\varrho_{s_\eta} - \varrho_{s_\xi}\varrho_{s_{\eta'}} = 0$$

wird, so drückt (β) die Bedingung aus, unter welcher die zu einander senkrechten Ebenen ξ, η mit einem Paar Hauptebenen von $\mathfrak{R}$ zusammenfallen.

13. Drei zu einander senkrechte Ebenen ξ, η, ζ bestimmen unendlich viele Gruppen von drei je zu ihnen parallelen Ebenen ξ', η', ζ', von denen jede den beiden anderen in Bezug auf eine Fokalkurve konjugiert ist. Diese Ebenengruppen bilden Hauptdreiflache von Γ^2 und schneiden die Zentralebenen in Poldreiecken der zugehörigen Fokalkurven. Das orthogonale Trägheitsmoment einer durch den Mittelpunkt P des orthogonalen Dreiflaches $P(\xi, \eta, \zeta)$ gehenden Ebene ε läfst sich nun in einfacher Weise ableiten, sobald eines dieser Hauptdreiflache $P'(\xi', \eta', \zeta')$ und die durch seinen Mittelpunkt P' gehende zu ε parallele Ebene ε' gegeben sind. Werden nämlich in den durch die Punkte P und P' gehenden Strahlen derart positive und negative Richtungen unterschieden, dafs in parallelen Strahlen gleichgerichtete Strecken auch gleiches Vorzeichen haben, und werden ferner als Winkel dieser Strahlen die in vorgeschriebenem Sinne gemessenen Winkel ihrer positiven Richtungen bezeichnet, so bestehen, wenn die Strahlen x, y, z, e in P und die Strahlen x', y', z', e' in P' auf den Ebenen ξ, η, ζ, ε bzw. ξ', η', ζ', ε' senkrecht stehen, die Beziehungen:

$$\varrho_{s_\varepsilon} = \varrho_{s_\xi}\cos(x, e) + \varrho_{s_\eta}\cos(y, e) + \varrho_{s_\zeta}\cos(z, e),$$

$$\varrho_{s_{\varepsilon'}} = \varrho_{s_{\xi'}}\cos(x, e) + \varrho_{s_{\eta'}}\cos(y, e) + \varrho_{s_{\zeta'}}\cos(z, e).$$

Folglich wird aus dem Ausdrucke:

$$M_{\varepsilon\varepsilon}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{a}^2 + [\varrho_{s_\varepsilon}^2 - \varrho_{s_{\varepsilon'}}^2]\mathfrak{R}$$

für das orthogonale Trägheitsmoment von $\mathfrak{R}$ in Bezug auf ε:

$$M_{\varepsilon\varepsilon}(\mathfrak{R}) = [\mathfrak{a}^2 + (\varrho_{s_\xi}\cos(x, e) + \varrho_{s_\eta}\cos(y, e) + \varrho_{s_\zeta}\cos(z, e))^2 - (\varrho_{s_{\xi'}}\cos(x, e) + \varrho_{s_{\eta'}}\cos(y, e) + \varrho_{s_{\zeta'}}\cos(z, e))^2]\mathfrak{R},$$

Digitized by Google

oder:

$$M_{**}(\mathfrak{R}) = [(\mathfrak{a}^2 + \varrho_{s_\xi}^2 - \varrho_{s_{\xi'}}^2)\cos^2(x,e) + (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{s_\eta}^2 - \varrho_{s_{\eta'}}^2)\cos^2(y,e)$$
$$+ (\mathfrak{a}^2 + \varrho_{s_\zeta}^2 - \varrho_{s_{\zeta'}}^2)\cos^2(z,e) + 2(\varrho_{s_\xi}\varrho_{s_\eta} - \varrho_{s_{\xi'}}\varrho_{s_{\eta'}})\cos(x,e)\cos(y,e)$$
$$+ 2(\varrho_{s_\eta}\varrho_{s_\zeta} - \varrho_{s_{\eta'}}\varrho_{s_{\zeta'}})\cos(y,e)\cos(z,e)$$
$$+ 2(\varrho_{s_\zeta}\varrho_{s_\xi} - \varrho_{s_{\zeta'}}\varrho_{s_{\xi'}})\cos(z,e)\cos(x,e)]\,\mathfrak{R}.$$

Die Faktoren von $\cos^2(x,e)$, $\cos^2(y,e)$, $\cos^2(z,e)$ sind $\frac{1}{\mathfrak{R}}M_{\xi\xi}(\mathfrak{R})$, $\frac{1}{\mathfrak{R}}M_{\eta\eta}(\mathfrak{R})$, $\frac{1}{\mathfrak{R}}M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R})$ und die von $\cos(x,e)\cos(y,e)$, $\cos(y,e)\cos(z,e)$, $\cos(z,e)\cos(x,e)$ nach der Gleichung (α) in **12.** $\frac{2}{\mathfrak{R}}M_{\xi\eta}(\mathfrak{R})$, $\frac{2}{\mathfrak{R}}M_{\eta\zeta}(\mathfrak{R})$, $\frac{2}{\mathfrak{R}}M_{\zeta\xi}(\mathfrak{R})$. Sonach ergiebt sich:

$$(\alpha)\quad M_{**}(\mathfrak{R}) = M_{\xi\xi}(\mathfrak{R})\cos^2(x,e) + M_{\eta\eta}(R)\cos^2(y,e) + M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R})\cos^2(z,e)$$
$$+ 2M_{\xi\eta}(\mathfrak{R})\cos(x,e)\cos(y,e) + 2M_{\eta\zeta}(\mathfrak{R})\cos(y,e)\cos(z,e)$$
$$+ 2M_{\zeta\xi}(\mathfrak{R})\cos(z,e)\cos(x,e).$$

Bilden insbesondere die Ebenen ξ, η, ζ ein Hauptdreiflach von Γ^2, so sind nach der Gleichung (β) in **12.** die Zentrifugalmomente in Bezug auf je zwei von ihnen gleich Null, und folglich wird:

$$M_{**}(\mathfrak{R}) = M_{\xi\xi}(\mathfrak{R})\cos^2(x,e) + M_{\eta\eta}(\mathfrak{R})\cos^2(y,e) + M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R})\cos^2(z,e).$$

Diese Gleichung geht, wenn:

$$M_{**}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{e}^2\mathfrak{R},\quad M_{\xi\xi}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{x}^2\mathfrak{R},\quad M_{\eta\eta}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{y}^2\mathfrak{R},\quad M_{\zeta\zeta}(\mathfrak{R}) = \mathfrak{z}^2\mathfrak{R}$$

gesetzt wird in:

$$\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{x}^2\cos^2(x,e) + \mathfrak{y}^2\cos^2(y,e) + \mathfrak{z}^2\cos^2(z,e)$$

über. Sie stellt, wenn unter $2\mathfrak{x}$, $2\mathfrak{y}$, $2\mathfrak{z}$ die je auf den Symmetrieachsen x, y, z eines Ellipsoides π^2 gelegenen Sehnen verstanden werden, bekanntlich das Quadrat des halben Abstandes $\mathfrak{e}$ der beiden zu ε parallelen Tangentialebenen von π^2 dar. Aus ihr folgt demnach für eine um P sich drehende Ebene ε ebenfalls das in **6.** gefundene Trägheitsellipsoid π^2 des Punktes P.

14. Gleichwertig in Bezug auf die Trägheitsmomente sind zwei Raumstücke $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$, denen in Bezug auf die Ebenen des Raumes je gleiche orthogonale Trägheitsmomente zukommen. Nach **7.** entspricht zwei solchen Raumstücken $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ die gleiche Schar konfokaler Flächen II. Klasse, bezüglich deren Berührungsebenen τ die orthogonalen Trägheitsmomente $M_{\tau\tau}(\mathfrak{R})$ und $M_{\tau\tau}(\mathfrak{R}')$ je den gleichen

Digitized by Google

Wert haben. Zu dieser Schar gehören die $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ bzw. zugewiesenen polaren Räume Γ^2 und Γ'^2, demnach haben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ gemeinsamen Schwerpunkt und gemeinsame Hauptträgheitsachsen. Ist $\varrho_{\varepsilon'\varepsilon}$ der Abstand zweier parallelen Ebenen ε', ε, von denen die eine — etwa ε' — durch den Schwerpunkt S geht, so gelten nach der Gleichung (α) in 2. die Beziehungen:

$$M_{\varepsilon\varepsilon}(\mathfrak{R}) = M_{\varepsilon'\varepsilon'}(\mathfrak{R}) + \varrho^2_{\varepsilon'\varepsilon}\mathfrak{R},$$

$$M_{\varepsilon\varepsilon}(\mathfrak{R}') = M_{\varepsilon'\varepsilon'}(\mathfrak{R}') + \varrho^2_{\varepsilon'\varepsilon}\mathfrak{R}'.$$

Nach der Voraussetzung ist aber:

$$M_{\varepsilon\varepsilon}(\mathfrak{R}) = M_{\varepsilon\varepsilon}(\mathfrak{R}') \quad \text{und} \quad M_{\varepsilon'\varepsilon'}(\mathfrak{R}) = M_{\varepsilon'\varepsilon'}(\mathfrak{R}'),$$

folglich wird:

$$\varrho^2_{\varepsilon'\varepsilon}(\mathfrak{R} - \mathfrak{R}') = 0$$

und, da $\varrho_{\varepsilon'\varepsilon}$ als Abstand zweier parallelen Ebenen nicht gleich Null sein kann,

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'.$$

Hiernach sind den zusammenfallenden Zentralebenen von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ in den polaren Räumen Γ^2 und Γ'^2 gleich große orthogonale Trägheitshalbmesser konjugiert. Den bzw. zu ihnen senkrechten Zentralachsen kommen folglich in Γ^2 und Γ'^2 die nämlichen Punktinvolutionen zu, und beide polaren Räume sind somit identisch. Zwei in Bezug auf ihre Trägheitsmomente gleichwertige Raumstücke sind folglich inhaltsgleich und bestimmen ein und denselben Raum Γ^2.

Der zu einem Raumstück $\mathfrak{R}$ gehörige polare Raum Γ^2 ist durch seinen Mittelpunkt S und durch ein Poltetraeder mit den Eckpunkten $P_1 P_2 P_3 P_4$ eindeutig festgelegt. In diesen Eckpunkten lassen sich nun bzw. vier Raumstücke R_1, R_2, R_3, R_4 derart konzentrieren, daß sie den Gesamtinhalt $\mathfrak{R}$ und den Schwerpunkt S haben. Der mit diesem Systeme von Raumstücken verbundene polare Raum Γ'^2 hat ebenfalls zum Mittelpunkte den Schwerpunkt S und zum Poltetraeder das Tetraeder $P_1 P_2 P_3 P_4$, er fällt demnach mit dem polaren Raume Γ^2 von $\mathfrak{R}$ zusammen. Das Raumstück $\mathfrak{R}$ und die bzw. in den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 konzentrierten Raumstücke $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ sind also bezüglich ihrer Trägheitsmomente gleichwertig, d. h. es lassen sich in den Eckpunkten jedes Poltetraeders von Γ^2 bzw. vier Raumstücke $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ derart konzentrieren, daß sie $\mathfrak{R}$ bezüglich seiner Trägheitsmomente ersetzen.

Halensee-Berlin, d. 26. März 1902.

Digitized by Google

Über eine besondere Klasse transcendenter Kurven.

Von E. Wölffing in Stuttgart.

1. Die Lehre von den transcendenten Kurven, welche bei den Geometern des 17. und 18. Jahrhunderts eine grofse Rolle spielte, ist im vorigen Jahrhundert lange Zeit stark vernachlässigt worden, und erst neuerdings hat eine Reihe Mathematiker diesem Gebiet wieder ihre Aufmerksamkeit geschenkt. Aber während man früher nur einzelne transcendente Kurven betrachtete, wie sie meistens die angewandte Mathematik an die Hand gab, sucht man jetzt die grofsen Gesichtspunkte in den Vordergrund zu stellen und bemüht sich, die transcendenten Kurven in Klassen und Familien zusammen zu fassen, die durch Differentialeigenschaften definiert sind und häufig als Spezialfälle auch Familien algebraischer Kurven enthalten. So definiert Cesàro[1]) eine Kurvenklasse durch die Eigenschaft, dafs der Krümmungsradius zum Stück der Normale bis zum Schnitt mit der Polare des Kurvenpunktes in Bezug auf einen festen Kreis, den Direktorkreis, proportional ist. Je nach dem Wert des Verhältnisses beider Gröfsen erhält man verschiedene Unterfamilien: die eine besteht aus allen Kreisen, eine andere aus allen Kegelschnitten, eine dritte aus allen cyklischen und pseudocyklischen Kurven. Nun kann aber auch der Direktorkreis in eine Gerade oder in einen Punkt ausarten, dann erhält man zwei Familien: bei der einen ist der Krümmungsradius proportional zum Stück der Normale bis zu einer festen Geraden; sie heifsen lignes de Ribaucour[2]), kommen aber schon früher, z. B. bei Hôpital[3]) vor. Zu ihnen gehören unter anderem Parabel, Kreis, Cykloide und Kettenlinie. Die andere Familie hat die Eigenschaft, dafs die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor zu letzterem proportional ist. Zu ihnen gehören die Parabel, der Kreis, die gleichseitige Hyperbel, die Lemniskate, die Kardioide, die logarithmische Spirale. Die Kurven der Familie wurden von Hâton de la Goupillière[4]) Spirales sinusoïdes genannt, weil ihre Polargleichung auf die Form gebracht werden kann $r^m = a^m \sin m\vartheta$.

1) Sur deux classes remarquables de lignes planes. Nouv. Ann. de Math. (3) **7** (1888) 171—190.

2) Étude des élassoïdes. Mémoires couronnés Ac. Bruxelles en 4°, **45** (1882).

3) Solution d'un problème physico-mathématique. Mémoires Ac. Paris 1700, p. 9—21.

4) Note sur les courbes que représente l'équation: $\varrho^n = A \sin n\omega$. Nouv. Ann. de Math. (2) **15** (1876), 97—108.

Digitized by Google

Zu jeder der früheren Unterfamilien gehört eine ligne de Ribaucour und eine spirale sinusoïde, z. B. zu den cyklischen Kurven die Cykloide resp. logarithmische Spirale, zu den Kegelschnitten die Parabel resp. die gleichseitige Hyperbel.

2. Die Familie von transcendenten Kurven, welche ich kurz besprechen möchte, wird erhalten, wenn man x und y in der Gleichung der sogenannten courbes triangulaires $x^\lambda + \alpha y^\lambda = \beta^\lambda$ nicht als rechtwinklige Koordinaten auffafst, sondern als Radiusvektor r und als Ursprungslot p auf die Tangente, so dafs die Gleichung wird:

$$r^\lambda + \alpha p^\lambda = \beta^\lambda. \tag{1}$$

Die Formeln für die Koordinaten r und p findet man in dem Lehrbuch von G. Sacchi.[1]) Nun ist der Krümmungsradius

$$\varrho = r\frac{dr}{dp} = \frac{\alpha p^{\lambda-1}}{(\beta - \alpha p^\lambda)^{\frac{\lambda-2}{\lambda}}} = \frac{\alpha p^{\lambda-1}}{r^{\lambda-2}}$$

oder mit $\lambda = 2 - \mu$

$$\varrho = \alpha r^\mu p^{1-\mu}. \tag{2}$$

Durch die Gleichungen (1) und (2) wird eine bemerkenswerte Klasse von Kurven definiert; man kann sagen, dafs zwischen r und p eine Gleichung λ-ten Grades besteht mit nur vollständigen λ-ten Potenzen oder auch, dafs zwischen ϱ, r und p eine homogene binomische Relation existiert.

Indem wir die Diskussion der Gestalt der Kurven für beliebige rationale Werte von λ und μ dem Leser überlassen, betrachten wir ausführlicher einige Familien unserer Kurvenklasse.

a) $\lambda = 0$, $\mu = 2$. — Gleichung (1) wird illusorisch; an ihrer Stelle giebt die Integration von (2), weil $\varrho = r\frac{dr}{dp} = \frac{\alpha r^2}{p}$;

$$\frac{dr}{dp} = \frac{\alpha r}{p}, \tag{3}$$

$$r = Cp^\alpha. \tag{4}$$

Es sei q Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor; so ist $q : \varrho = p : r$ oder $q = \frac{\alpha p r^2}{pr} = \alpha r$.

Da die Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor zu diesem proportional ist, so haben wir die Sinusspiralen vor uns.

---

1) Geometria analitica delle linee piane. Pavia 1854.

Digitized by Google

b) $\lambda = 2,\ \mu = 0.$ — Also

$$\varrho = -\alpha p, \tag{5}$$

$$r^2 + \alpha p^2 = \beta^2. \tag{6}$$

Nun ist der Kontingenzwinkel:

$$d\varphi = \frac{dp}{\sqrt{r^2 - p^2}} = \frac{dp}{\sqrt{\beta^2 - (\alpha+1)p^2}}, \quad ds = \varrho\, d\varphi,$$

somit

$$s = \frac{-\alpha}{\alpha+1}\sqrt{\beta^2 - (\alpha+1)p^2}$$

oder

$$(\alpha+1)^2 s^2 = \alpha^2\beta^2 - (\alpha+1)\varrho^2,$$

also die cyklischen Kurven. Diese treten danach mit den Sinusspiralen als koordinierte Familien auf, während in der Klasse Cesàros diese beiden Familien aus verschiedenen Einteilungsprinzipien entstehen und sich daher in der Cykloide kreuzen.

c) $\lambda = 1,\ \mu = 1.$ — Mit Änderung des Zeichens von α erhält man

$$r = \alpha p + \beta. \tag{7}$$

In dieser Form hat Purkiss[1]) diese Kurven erwähnt, indem er eine Gleichung $f(r, p) = 0$ annahm und nun so verfuhr, als ob r, p rechtwinklige Koordinaten wären und er die Tangente bilden wollte:

$$\frac{\partial f}{\partial r}(R - r) + \frac{\partial f}{\partial p}(P - p) = 0. \tag{8}$$

Die Kurven oskulieren die gegebene Kurve $f(r, p) = 0$, werden aber von Purkiss nicht näher untersucht.

Aus (2) folgt ferner

$$\varrho = \alpha r \tag{9}$$

oder

$$\varrho = \alpha^2 p + \alpha\beta, \tag{10}$$

der Krümmungsradius ist proportional zum Radiusvektor. Die Kurven sind also dieselben, welche von N. Fuſs[2]) untersucht wurden; derselbe gelangt zur Gleichung (7) zurück und drückt die Polarkoordinaten ϑ und

1) The equation of the tangent. Mess. of Math. **8** (1866), 19—22.

2) Solutio problematis ex methodo tangentium inversa. Nov. Act. Ac. Petrop. **4** (1789) 104—128.

Digitized by Google

r als Funktionen des Winkels ψ zwischen Radiusvektor und Tangente aus. Er findet $r = \frac{\beta}{1-\sin\psi}$, ferner

$$(11) \qquad \vartheta = C - \psi + 90^0 + \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + 45^0\right) \text{ für } \alpha = 1,$$

$$(12) \quad \begin{cases} \vartheta = C - \psi + 90 + \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + 45^0\right)\right) \text{für } \alpha < 1, \\ \vartheta = C - \psi + 90 + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2-1}} l \frac{1+\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + 45^0\right)}{1-\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha+1}} \operatorname{tg}\left(\frac{\psi}{2} + 45^0\right)} \text{ für } \alpha > 1, \end{cases}$$

wo C eine Konstante. Auch gelingt ihm die Rektifikation der Kurve:

$$(13) \qquad s = \frac{-\alpha^2\beta\cos\psi}{(1-\alpha^2)(1-\alpha\sin\psi)} + \frac{\alpha\beta}{1-\alpha^2}(\vartheta + \psi + 90^0 - C).$$

Man kann aber s auch durch p ausdrücken:

$$(14) \qquad s = \int \frac{(\alpha^2 p + \alpha\beta)\,dp}{\sqrt{(\alpha^2-1)p^2 + 2\alpha\beta p + \beta^2}},$$

dieses Integral führt auf logarithmische und cyklometrische Funktionen.

Ist $\beta = 0$, so ergiebt sich aus (10) die Kurve augenscheinlich als eine logarithmische Spirale. Ist $\beta \neq 0$, $\alpha > 1$, so nähert sich die Kurve für grofse Werte von r und p der logarithmischen Spirale $\varrho = \alpha p$ und geht in unendlich vielen Windungen ins Unendliche; ist aber $\alpha < 1$, so hat die Kurve keinen unendlich fernen Punkt, der gröfste Wert von r ist $\frac{\beta}{1-\alpha}$. (Dafs die Gleichung $\varrho = \alpha r$ aufser der logarithmischen Spirale zwei Arten neuer Kurven definiert, wurde auch von Thomas Hill[1]) bemerkt.) Für $r = \beta$ wird $p = 0$, also geht die Tangente durch den Ursprung. Das Minimum erreicht r für $r = -p = \frac{\beta}{1+\alpha}$ Die Kurve hat keine (reellen) Spitzen, da in einer solchen keine lineare Gleichung zwischen r und p bestehen könnte.

Die bemerkenswerteste Eigenschaft dieser Kurven, welche ihnen eine bestimmte Stellung im System transcendenter Kurven anweist, ist bisher gänzlich unbemerkt geblieben.

Aus den Gleichungen

$$\varrho = \alpha^2 p + \alpha\beta, \quad d\varrho = \alpha^2 dp, \quad d\varphi = \frac{dp}{\sqrt{(\alpha^2-1)p^2 + 2\alpha\beta p + \beta^2}}$$

1) Systems of coordinates in one plane. Proceed. Amer. Association **11** (1857), 42—45.

Digitized by Google

folgt der Krümmungsradius der Evolute

$$\varrho_1 = \frac{d\varrho}{d\varphi} = \alpha^2\sqrt{(\alpha^2-1)p^2 + 2\alpha\beta p + \beta^2}$$

und weil $p = \frac{\varrho - \alpha\beta}{\alpha^2}$,

$$\varrho_1 = \sqrt{(\alpha^2-1)\varrho^2 + 2\alpha\beta\varrho - \alpha^2\beta^2}. \tag{15}$$

Nun kann ϱ als Bogen der Evolute aufgefafst werden. Für die Evolute ist also das Quadrat des Krümmungsradius eine quadratische Funktion des Bogens; die Evolute mufs daher eine cyklische Kurve sein:

Die Kurven $r = \alpha p + \beta$ sind also Evolventen cyklischer Kurven, natürlich Evolventen spezieller Art.

Während diese Thatsache in ihrer Allgemeinheit bisher unbekannt war, hat doch Fufs (a. a. O.) einen speziellen Fall bereits bemerkt; er fand, dafs die Kurve $\varrho = r$ als zweite Evolute einen Kreis hat. Auch Sylvester[1]) erkannte diese Kurve als spezielle zweite Kreisevolvente und nannte sie *norwich spiral.* Dagegen entging diese Eigenschaft Schlömilch[2]), der sich ebenfalls mit diesen Kurven beschäftigte.

Die Gleichung (15) kann auf die Form gebracht werden

$$\varrho_1^2 = \left(\sqrt{\alpha^2-1}\,\varrho + \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{\alpha^2-1}}\right)^2 \text{ für } \alpha > 1, \text{ oder} \tag{16a}$$

$$\varrho_1^2 = \left(\frac{\alpha^2\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2 - \left(\sqrt{1-\alpha^2}\,\varrho - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right)^2 \text{ für } \alpha < 1. \tag{16b}$$

(16a) stellt eine *Paracykloide,* (16b) eine *Epicykloide* dar.

Nun ist nach Cesàro[3]) die Gleichung einer Epicykloide, wenn a der Radius des festen, b derjenige des beweglichen Kreises ist:

$$\varrho^2 + \frac{a^2}{(a+2b)^2}s^2 = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2},$$

somit

$$\frac{a^2}{(a+2b)^2} = 1-\alpha^2, \quad \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2} = \frac{\alpha^4\beta^2}{1-\alpha^2}.$$

Hieraus folgt:

$$a = \beta, \; b = \frac{\beta}{2}\,\frac{1-\sqrt{1-\alpha^2}}{1-\alpha^2} \tag{17a}$$

---

1) On the successive involutes to a circle. Philos. Magaz. (4) **36** (1868), 295—306; 459—466.

2) Über eine Spirale. Zeitschr. f. Math. u. Phys. **14** (1869), 162—163.

3) Geometria intrinseca. Napoli 1896, p. 67. Deutsche Übersetzung von H. Kowalewski, Leipzig 1901, p. 83.

Digitized by Google

für die Epicykloide und

$$a = \beta, \quad b = \frac{\beta}{2}\,\frac{-1 + i\sqrt{\alpha^2 - 1}}{\alpha^2 - 1} \tag{17b}$$

für die Paracykloide.

Also ist β der Radius des festen Kreises; und da für $p = 0$ $r = \beta$ wird, so *schneidet die Kurve den festen Kreis ihrer Evolute orthogonal* oder:

Legt man an die cyklische Kurve und an den festen Kreis eine gemeinsame Tangente und läfst diese auf der cyklischen Kurve rollen, so beschreibt der Berührungspunkt mit dem festen Kreis die gesuchte spezielle Evolvente.

Indem wir zu der Familie

$$r^\lambda + \alpha p^\lambda = \beta^\lambda$$

zurückkehren, bemerken wir, dafs die polarreziproke Kurve zu einer solchen erhalten wird, indem man r durch $\frac{1}{p_1}$, p durch $\frac{1}{r_1}$ ersetzt. Es wird alsdann

$$r^{-\lambda} + \frac{1}{\alpha}\, p^{-\lambda} = \frac{\beta^\lambda}{\alpha}.$$

Die Kurven mit negativem λ sind also zu denen mit positivem λ polarreziprok (in Bezug auf den imaginären Einheitskreis $x^2 + y^2 + 1 = 0$).

d) Die Kurven $r^{-2} + \alpha p^{-2} = \beta^{-2}$ sind daher zu den cyklischen Kurven polarreziprok; man erhält für $0 > \alpha > -1$ Kurven, welche mit der Poinsotschen Spirale verwandt sind, für $\alpha > 0$ und für $-1 > \alpha$, Kurven, welche Aubry[1]) épis genannt hat. Für $\alpha = -1$ erhält man die hyperbolische Spirale.

e) Die Kurven $r^{-1} + \alpha p^{-1} = \beta^{-1}$ sind zu den unter *c*) genannten Kurven invers. Bordoni[2]) zeigte, dafs sie Evoluten von Polartraktricen sind. Catalan[3]) bewies, dafs, wenn eine solche Kurve auf einer Geraden rollt, ein Punkt ihrer Ebene einen Kreis beschreibt. Diesen Satz geben auch O. Kessler[4]), Besant[5]), Resal[6]), Demoulin[7]),

1) De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes. Journ. de Math. spéc. (4) **4** (1896), p. 201.

2) Sul nuovo torno imaginato dal signor Carlo Parea. Mem. Soc. It. (detta dei XL) **18** I (1820), 205—242.

3) Note sur la théorie des roulettes. Nouv. Ann. de Math. **15** (1856), 102—108.

4) Darstellung der Kegelschnitte als Rouletten, deren Basis eine Gerade ist. Diss. Jena 1869, p. 34—35.

5) On roulettes and glissettes. Cambridge 1870, p. 46.

6) Sur les propriétés d'une courbe qui roule sur une droite. Journ. de Math. (3) **6** (1880), 115—128, bes. 121—123.

7) Sur une transformation géométrique applicable à la théorie des roulettes. Mém. cour. Ac. Brux. en 8°, **45** (1891), 20—21.

Digitized by Google

Morley[1]). Letzterer bemerkt noch, dafs die Kurve, als Evolute der Polartraktrix, Kettenlinie bei einer Centralkraft proportional dem umgekehrten Quadrat des Abstandes vom anziehenden Centrum ist. Die Kurven sind für $\alpha > 1$ algebraisch resp. interscendent, je nachdem α rational oder irrational ist, für $\alpha \gtrless 1$ transcendent. Für $\alpha = 1$ erhält man die Spirale $r = \frac{a}{1-\vartheta^2}$, welche zur norwich spiral polarreziprok ist.

Stuttgart, den 11. Mai 1901.

Unabhängige Darstellung der Mac Mahonschen symmetrischen Funktionen.

Von L. Saalschütz in Königsberg.

Der englische Mathematiker Herr Mac Mahon hat (in Bd. XV der „Proceedings of the London Mathematical Society“) für gewisse symmetrische Funktionen, die sich als Verallgemeinerungen der Potenzsummen ansehen lassen, eine Rekursionsformel nach Art der Newtonschen aufgestellt; dieselbe ist von Herrn Gegenbauer (in d. „Versl. d. Koninkl. Akad. v. Wetensch. z. Amsterdam“ IX, 332—336) mittels eines einfachen Grundgedankens elementar bewiesen worden. Mit Hülfe der von ihm benutzten Gleichung läfst sich aber auch eine *independente* Darstellung der genannten Funktionen erzielen, aus welcher wieder die erwähnte *Rekursionsformel* sich in sehr einfacher Art ableiten läfst. Diese Entwickelungen bilden den Gegenstand der folgenden Seiten.

Seien $a_1, a_2, \cdots, a_r, a_{r+1}, \cdots, a_n$ die Wurzeln der algebraischen Gleichung:

$$F(x) = x^n - f_1 x^{n-1} + f_2 x^{n-2} \mp \cdots = 0; \tag{1}$$

dabei soll $n = r$ oder $> r$ angenommen werden dürfen, so aber, dafs im letzteren Falle die Wurzeln $a_{r+1}, a_{r+2}, \cdots, a_n$ den Wert Null haben. Differentiieren wir die identische Gleichung:

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) \tag{2}$$

k-mal nach x, so erhalten wir, wie man leicht bei successiver Ausführung erkennen kann:

$$F^{(k)}(x) = k! \sum (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_{n-k}), \tag{3}$$

1) The „no-rolling“ curve of Amslers planimeter. Annals of Math. (2) 1 (1899), 21—30.

Digitized by Google

wobei aus den n Faktoren $(x-a_1), \cdots, (x-a_n)$ auf alle möglichen Arten $n-k$ von einander verschiedene auszuwählen und dann deren Produktsumme zu bilden ist.[1]) Statt dieser Gleichung läfst sich auch schreiben:

$$F^{(k)}(x) = k!\ F(x) \sum \frac{1}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_k)}. \tag{4}$$

Dies ist (in etwas anderer Form) die Gleichung, von welcher Herr Gegenbauer ausgeht. Dividieren wir sie beiderseits durch $k!\,F(x)$, multiplizieren mit x^k, setzen $\frac{1}{x} = v$ und entwickeln rechts nach Potenzen von v, so erhalten wir:

$$\begin{cases} \dfrac{(n)_k - (n-1)_k f_1 v + (n-2)_k f_2 v^2 \mp \cdots}{1 - f_1 v + f_2 v^2 - f_3 v^3 \pm \cdots} = \\ \sum (1 + a_1 v + a_1^2 v^2 + \cdots \text{in infin.} \cdots (1 + a_k v + a_k^2 v^2 + \cdots \text{in inf.}) = \\ \sum \Big\{ 1 + \Big(\sum_1^k{}_{(\lambda)} a_\lambda\Big) v + \Big(\sum_1^k{}_{(\lambda)} a_\lambda^2 + \sum_1^k{}_{(\lambda_1, \lambda_2 > \lambda_1)} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2}\Big) v^2 \\ \quad + \Big(\sum_1^k{}_{(\lambda)} a_\lambda^3 + \sum_1^k{}_{(\lambda_1, \lambda_2 > \lambda)} (a_{\lambda_1}^2 a_{\lambda_2} + a_{\lambda_2} a_{\lambda_1}^2) \\ \qquad + \sum_1^k{}_{(\lambda_1, \lambda_2 > \lambda_1, \lambda_3 > \lambda_2)} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3}\Big) v^3 \\ \quad + \Big(\sum_1^k{}_{(\lambda)} a_\lambda^4 + \sum_1^k{}_{(\lambda_1, \lambda_2 > \lambda_1)} (a_{\lambda_1}^3 a_{\lambda_2} + a_{\lambda_1}^3 a_{\lambda_2}^3 + a_{\lambda_1} a_{\lambda_2}^3) \\ \qquad + \sum_1^k{}_{(\lambda_1, \lambda_2 > \lambda_1, \lambda_3 > \lambda_2)} (a_{\lambda_1}^2 a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} + a_{\lambda_1} a_{\lambda_2}^2 a_{\lambda_3} + a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3}^2) \\ \qquad + \sum_1^k{}_{(\lambda_1, \lambda_2 > \lambda_1, \lambda_3 > \lambda_2, \lambda_4 > \lambda_3)} a_{\lambda_1} a_{\lambda_2} a_{\lambda_3} a_{\lambda_4}\Big) v^4 + \cdots \Big\}.^2) \end{cases} \tag{5}$$

Bilden wir nun die durch das vorgeschriebene Summenzeichen geforderte Summe, so kommt die Zahl 1 so oft vor, als k Elemente (Faktoren) sich aus n wählen lassen, jede Potenz (wie a_1, a_1^2, a_1^3) so oft, als $k-1$ Elemente aus $n-1$ ausgesucht werden können, jedes binäre Glied (wie $a_1 a_2$, $a_1^2 a_2^2$, $a_1 a_2^3$) so oft, als $k-2$ Elemente aus $n-2$

1) Die Bedeutung des Summenzeichens ist also in dieser, wie auch in den folgenden Gleichungen, dieselbe wie bei der in der Theorie der symmetrischen Funktionen üblichen Bezeichnung $\sum a_1^{p_1} a_2^{p_2} a_3^{p_3} \cdots$

2) Die Bezeichnung dürfte klar sein: so ist z. B. die letzte Summe gleich der Summe aller Produkte zu je vier (ohne Wiederholung) der Elemente a_1, a_2, $\cdots$, a_k, so dafs λ_1 von 1 bis $k-3$, λ_4 von 4 bis k zu gehen hat.

Digitized by Google

entnommen werden können und so weiter. Bezeichnen wir daher mit Herrn Gegenbauer (und Mac Mahon) die Summe aller möglichen von einander verschiedenen (also den Koeffizienten 1 besitzenden) Glieder, welche *aus je h von den Elementen* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ mit verschiedenen oder gleichen Exponenten versehen, zusammengesetzt sind und *die gleiche Dimension d besitzen*, als $\overset{h}{S}_d$, so ist die rechte Seite von (5):

$$(6)\quad \begin{cases} (n)_k + (n-1)_{k-1}\overset{1}{S}_1 v + \left((n-1)_{k-1}\overset{1}{S}_2 + (n-2)_{k-2}\overset{2}{S}_2\right)v^2 \\ + \cdots + \left((n-1)_{k-1}\overset{1}{S}_{k-1} + (n-2)_{k-2}\overset{2}{S}_{k-1} + \cdots + (n-k+1)_1\overset{k-1}{S}_{k-1}\right)v^{k-1} \\ + \sum_{p=k}^{\infty}\left((n-1)_{k-1}\overset{1}{S}_p + (n-2)_{k-2}\overset{2}{S}_p + \cdots + (n-k+1)_1\overset{k-1}{S}_p + \overset{k}{S}_p\right)v^p. \end{cases}$$

Um auch die linke Seite von (5) nach Potenzen von v zu entwickeln, setzen wir:

$$(7)\qquad (1 - f_1 v^2 + f_2 v^2 \mp \cdots)^{-1} = 1 + \beta_1 v + \beta_2 v^2 + \beta_3 v^3 + \cdots,$$

wo z. B.:

$$\beta_1 = f_1,\ \beta_2 = f_1^2 - f_2,\ \beta_3 = f_1^3 - 2f_1 f_2 + f_3,$$

und das allgemeine Bildungsgesetz der β_i hier unten angegeben wird[1]); dann ist sie:

$$(8)\quad (n)_k + ((n)_k\beta_1 - (n-1)_k f_1)v + ((n)_k\beta_2 - (n-1)_k\beta_1 f_1 + (n-2)_k f_2)v^2 + \cdots$$

Vergleichen wir nun in der durch Gleichsetzung von (6) und (8)

---

1) Es ist

$$(1 - f_1 v + f_2 v^2 \mp \cdots)^{-1} = 1 + (f_1 v - f_2 v^2 \pm \cdots) + (f_1 v - f_2 v^2 \pm \cdots)^2 + \cdots,$$

also ergiebt sich bei Benutzung des polynomischen Lehrsatzes zur Auffindung des Koeffizienten β_i von v^i folgende Regel: Man löse die Gleichung

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \cdots + ip_i = i$$

auf alle möglichen Arten für ganzzahlige nicht-negative Werte von $p_1, p_2, \cdots$ auf und setze jedesmal

$$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots = \lambda;$$

dann ist:

$$\beta_i = (-1)^i \sum_{(i)} (-1)^\lambda \frac{\lambda!}{p_1!\, p_2!\, p_3! \cdots} f_1^{p_1} f_2^{p_2} f_3^{p_3} \cdots$$

(Vgl. noch die spätere Anmerkung zu Gl. (11).)

Digitized by Google

entstehenden Gleichung die Koeffizienten von $v^p\,(p \leqq k)$, so erhalten wir:

$$(9)\quad \begin{cases} (n-1)_{k-1}\overset{1}{S}_p + (n-2)_{k-2}\overset{2}{S}_p + \cdots + (n-k+1)_1\overset{k-1}{S}_p + \overset{k}{S}_p \\ -(n)_k\beta_p - (n-1)_k\beta_{p-1}f_1 + (n-2)_k\beta_{p-2}f_2 \mp \cdots \\ \quad + (-1)^{p-1}(n-p+1)_k\beta_1 f_{p-1} + (-1)^p(n-p)_k f_p. \end{cases}$$

Setzen wir in dieser Gleichung zuerst $n = r$ und dann $n > r$, so wird dadurch (siehe den Anfang dieses Aufsatzes) weder an den $\overset{k}{S}_p$ noch an den Koeffizienten $f_1, f_2, \cdots$ und ebensowenig an den β_i etwas geändert, da die hinzukommenden Gröfsen gleich Null sind; daher kann n *beliebig viele Werte* erhalten, während alles andere konstant bleibt. Da nun andererseits beide Seiten von (9) ganze Funktionen von n sind, gilt diese Gleichung für *jeden* beliebigen Wert dieser Zahl.

Setzen wir

$$n = k - 1,$$

so bleibt links nur das letzte Glied $\overset{k}{S}_p$ stehen, auch rechts gehen die ersten Glieder wegen der verschwindenden Faktoren $(n)_k$, $(n-1)_k$ etc. fort, bis *vor* dem Gliede, welches den Binomialkoeffizienten $(-1)_k$ zum Faktor hat: dieses Glied ist

$$(-1)^k(-1)_k\beta_{p-k}f_k = (k)_0\beta_{p-k}f_k,$$

und wir gewinnen die Gleichung

$$(10)\quad \begin{cases} \overset{k}{S}_p = \beta_{p-k}f_k - (k+1)_1\beta_{p-k-1}f_{k+1} + (k+2)_2\beta_{p-k-2}f_{k+2} \mp \\ \cdots + (-1)^{p-k-1}(p-1)_{p-k-1}\beta_1 f_{p-1} + (-1)^{p-k}(p)_{p-k}f_p; \quad k \leqq p. \end{cases}$$

Vermöge derselben wird $\overset{k}{S}_p$ *in unabhängiger Darstellung gegeben.*

Sammelt man mit Benutzung der Werte für die β_i (siehe Anmerk. zu Gl. (7)) die Koeffizienten eines bestimmten Produkts, wie etwa $f_1^{\alpha_1}f_2^{\alpha_2}\cdots f_k^{\alpha_k}\cdots$, aus den verschiedenen Gliedern auf der rechten Seite der Gl. (10), so zeigt sich die interessante Thatsache, dafs alle diese Koeffizienten dasselbe Vorzeichen haben, und man gelangt überhaupt unschwer zu folgender gedrängteren, wenngleich minder durchsichtigen Darstellung:

Man bestimme $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k, \cdots$ auf alle möglichen Arten als ganze nicht-negative Zahlen so, dafs sie der Gleichung:

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \cdots + k\alpha_k + \cdots = p$$

Digitized by Google

genügen, wobei jedoch mindestens *eine* der Zahlen $\alpha_{k+\varrho}\,(\varrho \gtrless 0)$ von Null verschieden angenommen werden muſs, und setze nach jeder Auflösung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots = \mu,$$

dann ist:

$$(10a)\quad \overset{k}{S}_p = (-1)^{p-k+1} \sum (-1)^{\mu} \frac{(\mu-1)!}{\alpha_1!\,\alpha_2!\cdots} \Big(\sum_{\varrho=0}^{p-k} (k+\varrho)_\varrho\, \alpha_{k+\varrho} \Big) f_1^{\alpha_1} f_2^{\alpha_2} f_3^{\alpha_3} \cdots$$

Setzen wir hierin $k = 1$, so erhalten wir die Waringschen Formeln für die Potenzsummen.

Vergleichen wir in (9) beiderseits die Koeffizienten von n^k, so ergiebt sich:

$$(11)\quad 0 = \beta_p - \beta_{p-1} f_1 + \beta_{p-2} f_2 \mp \cdots + (-1)^{p-1} \beta_1 f_{p-1} + (-1)^p f_p,$$

und diese Gleichung ist in der That richtig, da

$$F(x)(F(x))^{-1} = 1$$

ist.[1]) — Setzen wir in (10) der Reihe nach $p = k+m,\ k+m-1,\ k+m-2,\ \cdots,\ k+1,\ k$, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\overset{k}{S}_{k+m} = \beta_m f_k - (k+1)_1 \beta_{m-1} f_{k+1} \pm \cdots \\
&\qquad + (-1)^{m-1} (k+m-1)_{m-1} \beta_1 f_{k+m-1} + (-1)^m (k+m)_m f_{k+m}, \\
&\overset{k}{S}_{k+m-1} = \beta_{m-1} f_k - (k+1)_1 \beta_{m-2} f_{k+1} \pm \cdots + (-1)^{m-1} (k+m-1)_{m-1} f_{k+m-1}, \\
&\overset{k}{S}_{k+m-2} = \beta_{m-2} f_k - (k+1)_1 \beta_{m-3} f_{k+1} \pm \cdots, \\
&\qquad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
&\overset{k}{S}_{k+1} = \beta_1 f_k - (k+1)_1 f_{k+1}, \\
&\overset{k}{S}_{k} = \quad f_k;
\end{aligned}$$

multiplizieren wir diese beziehungsweise mit $1, -f_1, f_2, -f_3, \cdots, (-1)^{m-1} f_{m-1}$, $(-1)^m f_m$ und addieren, so verschwinden wegen (11), wenn darin bezw. $p = m,\ m-1,\ \cdots,\ 1$ gesetzt wird, die Koeffizienten von $f_k,\ f_{k+1}$, $\cdots,\ f_{k+m-1}$, und es entsteht:

$$(12)\quad \begin{cases} \overset{k}{S}_{k+m} - f_1 \overset{k}{S}_{k+m-1} + f_2 \overset{k}{S}_{k+m-2} \mp \cdots \\ \quad + (-1)^{m-1} f_{m-1} \overset{k}{S}_{k+1} + (-1)^m f_m \overset{k}{S}_{k} = (-1)^m (k+m)_m f_{k+m}; \end{cases}$$

dies ist aber die Mac Mahon-Gegenbauersche Rekursionsformel.

Königsberg, Februar 1902.

---

1) Die Gl. (11) kann auch, mit $p = 1, 2, 3, \cdots$ zur successiven Berechnung der β_i dienen.

Digitized by Google

Angenäherte n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal.

Von HEINRICH SCHOELER in Berlin.

Das nachfolgend beschriebene Verfahren zur angenäherten Teilung eines Winkels in n gleiche Teile setzt voraus, dafs man die $(n+1)$-Teilung desselben Winkels vollziehen kann. Aus unmittelbar einleuchtenden Gründen kommt aber nur der Fall eines ungeraden n in Betracht; dann ist $n+1$ eine gerade Zahl, und da man jeden beliebigen Winkel hälften kann, so kommt die $(n+1)$-Teilung bei ungeradem n auf die $\frac{1}{2}(n+1)$-Teilung der Hälfte des Winkels zurück. Demnach hängt die Teilung in 3, 5, 7, 9, ... Teile von derjenigen der Hälfte des Winkels in 2, 3, 4, 5, ... Teile ab.

Genau ausführbar ist die $(n+1)$-Teilung, wenn $n+1=2^m$, n also $=2^m-1$, d. h. für $n=3, 7, 15, 31, 63, 255, \ldots$ In den übrigen Fällen ist die $(n+1)$-Teilung durch unser Annäherungsverfahren zu vollziehen. Man sieht hiernach, dafs erforderlich wird bei

$n=3.2^m-1$, oder 5, 11, 23, 47, 95, 191, ... eine Dreiteilung,

$n=5.2^m-1$, „ 9, 19, 39, 79, 159, 319, ... „ Fünfteilung,

$n=7.2^m-1$, „ 13, 27, 55, 111, 223, 447, ... „ Siebenteilung

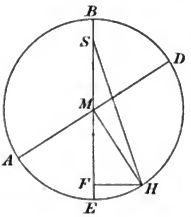
u. s. w.

Ursprünglich wurde zunächst die Drittelung eines beliebigen Winkels unter dem Gesichtspunkte ermittelt, den bei einer Teilung mit Zirkel und Lineal unvermeidlichen Fehler möglichst zu verkleinern. Nach Auffindung einer diesen Ansprüchen hinreichend genügenden Konstruktion ergaben langwierige Versuche und Überlegungen das nachfolgende Verfahren, dessen Prinzip in der Teilung einer Geraden und eines Winkels nach demselben rationalen Verhältnis zu erblicken ist.

Um den Scheitel M des zu teilenden Winkels $\alpha=AMB=EMD$ beschreibe man mit einem beliebigen Radius r den Kreis $BDHEA$, teile den Bogen ED in H so, dafs $EH=\frac{2ED}{(n+1)}$ oder Winkel $EMH=\frac{2\alpha}{(n+1)}$; ferner teile man den Radius MB in S so, dafs $BS=\frac{2r}{(n+1)}$, und verbinde S mit H, so ist Winkel ESH angenähert gleich dem n^{ten} Teile von α.

Digitized by Google

Für die Trisektion ist also der Winkel EMD zu hälften, für die Fünfteilung (falls man sie nicht auf die 15-Teilung lieber zurückführen will) zu dritteln, für die Siebenteilung (Fall der gezeichneten Figur) zu vierteln u. s. w.



Systematisch durchgeführte trigonometrische Berechnungen, deren Ergebnisse in mehreren Tabellen zusammengestellt wurden, haben dem Verf. gezeigt, dafs der konstruktiv gefundene Winkel ESH regelmäfsig etwas gröfser ist als $\frac{\alpha}{n}$. Die Differenz δ zwischen $\frac{\alpha}{n}$ und dem konstruierten Winkel ist für kleine Werte von α sehr klein, nimmt aber mit wachsendem α stetig zu. Bei der Drittelung ist z. B. für:

$\alpha = 10^0$	20^0	30^0	60^0	90^0	120^0	180^0
$\delta = 1''{,}7$	$13''$	$46''$	$6'14''$	$21'40''$	$53'36''$	$3^0 26'6''$.

Durch passende Vorbereitung einer zu vollziehenden Teilung ist man daher im Stande, den Fehler beliebig klein zu machen. Bei der Drittelung eines Winkels z. B. kann man einen zweckmäfsig zu wählenden kleineren Winkel zunächst dreimal abziehen und dann den Restwinkel dritteln; ist dieser Restwinkel kleiner als 10^0, so ist der theoretische Fehler der Zeichnung kleiner als $1''{,}7$. Da das ganze Verfahren eine Reduktion auf eine kleinere Zahl vorstellt, so möge zuletzt die Bemerkung Platz finden, dafs man jeden Fall schliefslich auf die kleinsten Primzahlen 2 und 3 bringen kann.

Berlin, im Januar 1902.

Digitized by Google

Bemerkungen über einige angenäherte n-Teilungen von Winkeln.

Von E. LAMPE in Berlin.

1. Zur näheren Einsicht in die Genauigkeit der vorstehend mitgeteilten Konstruktion des Herrn Schoeler fügen wir folgende Berechnung hinzu. Ist HF das Lot von H auf DE, so ist, falls man den Radius des Kreises $r = 1$ setzt,

$$HF = \sin\frac{2\alpha}{n+1}, \quad MF = \cos\frac{2\alpha}{n+1}, \quad MS = 1 - \frac{2}{n+1} = \frac{n-1}{n+1}.$$

Bezeichnet man den Winkel ESH mit x, so ist also

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin\frac{2\alpha}{n+1}}{\cos\frac{2\alpha}{n+1} + \frac{n-1}{n+1}}.$$

Setzt man für die trigonometrischen Funktionen die Potenzreihen ein und führt die Division aus, so ergiebt sich hieraus

$$x = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{(n+3)\alpha^3}{3n^2(n+1)^2} + \cdots\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{(n-1)\alpha^3}{3n^3(n+1)^2} + \cdots.$$

Man sieht also, dafs $x > \frac{\alpha}{n}$, und dafs, wenn man den Fehler δ für kleine Winkel auf das Glied mit α^3 beschränkt, δ angenähert durch den Ausdruck

$$\delta = \frac{(n-1)\alpha^3}{3n^3(n+1)^2}$$

gegeben wird. Der Fehler wächst demnach mit der dritten Potenz von α, wie man durch die für die Drittelung mitgeteilten Zahlen des Herrn Schoeler bestätigen kann. Der Zahlenkoeffizient von α^3 wird für

$$n = 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9 \quad 11, \ldots$$

$$\frac{1}{648}, \quad \frac{1}{3375}, \quad \frac{1}{10976}, \quad \frac{1}{36450}, \quad \frac{1}{57496{,}2}, \ldots.$$

Die Fehler nehmen also für gröfsere Werte von n sehr schnell ab, wie Herr Schoeler in seinen Tabellen ebenfalls gefunden hatte.

Aus Anlafs des Abdruckes der Note des Herrn Schoeler sollen hier noch zwei andere angenäherte n-Teilungen eines Winkels folgen. Denn obschon die Litteratur dieses Gegenstandes sehr grofs ist (Herr

Digitized by Google

Wölffing zählt in den „Math. naturw. Mitt. in Württemb." (2) **2**, 21—27 über 200 bezügliche Arbeiten auf), so übt die Aufgabe noch immer eine grofse Anziehung aus.

2. M. Koenig veröffentlichte 1894 die Schrift: „Die geometrische Teilung des Winkels", in welcher er die exakte Lösung mit Zirkel und Lineal gefunden zu haben meinte. Seine Lösung war die folgende (vergl. Fig. 1). Der zu teilende Winkel sei $COB = \varphi$. Man nehme Winkel $HAO = \frac{\varphi}{n}$ (die Konstruktion ist gerade wie die des Herrn Schoeler eine rekurrente), fälle die Lote HJ und CG auf OB, ziehe

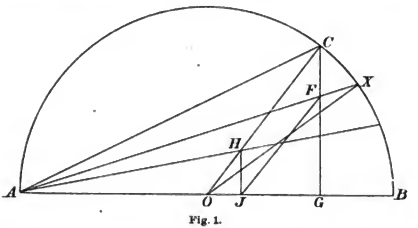


Fig. 1.

JF parallel zu OC und verbinde A mit F. Schneidet AF den Kreis in X, so soll $COX = \frac{\varphi}{n-1}$ sein. Hier ist für praktische Zwecke n als gerade Zahl anzunehmen; dann ist $n-1$ ungerade. Also wird, gerade wie bei Herrn Schoeler, die 3-, 5-, 7-, ... Teilung auf die 4-, 6-, 8-, ... Teilung zurückgeführt.

Bezeichnet man den Winkel FAG mit y, so findet man nach einigen Umformungen:

$$\operatorname{tg} y = \frac{\cos\frac{\varphi}{n} - \cos\frac{(n-1)\varphi}{n}}{\sin\frac{(n-1)\varphi}{n}},$$

woraus, ähnlich wie oben, erhalten wird:

$$y = \frac{(n-2)\varphi}{2(n-1)} + \frac{(n-2)^2\varphi^3}{24n(n-1)^3} + \cdots.$$

Nun ist $CAO = \frac{\varphi}{2}$, also $CAX = \frac{\varphi}{2} - y$, $COX = x = \varphi - 2y$,

$$COX = x = \frac{\varphi}{n-1} - \frac{(n-2)^3\varphi^3}{12n(n-1)^3} \cdots.$$

Digitized by Google

Mithin ist x zu klein, und der Fehler ist angenähert

$$\delta = \frac{-(n-2)^2\varphi^3}{12\,n(n-1)^3}.$$

Der Zahlenkoeffizient von φ^3 ist für $n = 4, 6, 8, \ldots$, der Drei-, Fünf-, Siebenteilung entsprechend: $\frac{1}{324}$, $\frac{1}{562\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{914\frac{2}{3}}$, $\cdots$.

3. Gegenüber diesen beiden rekurrenten Methoden ist ein anderes Verfahren bemerkenswert, das unmittelbar den n^{ten} Teil eines Winkels zu konstruieren unternimmt. Ein pensionierter Feldmesser, der es zur

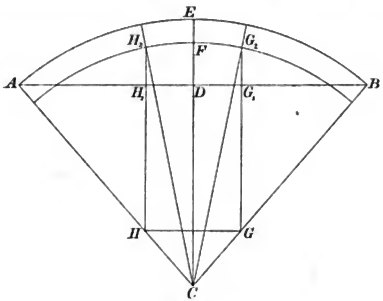


Fig. 2.

Begutachtung einsandte, erklärte im Begleitschreiben, er habe es seit seiner Jugend gekannt und geübt und nie einen Fehler dabei gemacht (vergl. die Fig. 2).

Der zu teilende Winkel sei $ACB = \alpha$. Man beschreibe um C als Zentrum den Kreisbogen AB, ziehe die Sehne AB, die Winkelhalbierende CE und teile den Pfeil DE des Bogens in drei gleiche Teile, so daß $DF = \frac{2}{3}DE$, $FE = \frac{1}{3}DE$ ist. Mit CF als Radius beschreibe man den konzentrischen Kreisbogen. Den Radius CA teile man in n gleiche Teile; H sei der erste Teilpunkt von C aus, d. h. $CH = \frac{r}{n} = CG$. Man projiziere die Linie HG auf AB in H_1G_1 und verlängere die projizierenden Lote HH_1, GG_1 bis zu den Schnittpunkten H_2 und G_2 mit dem konzentrischen Kreise vom Radius CF. Verbindet man H_2 und G_2 mit C, so soll Winkel H_2CG_2 der n^{te} Teil von α sein (vom Verf. mitgeteilt in Mathesis (2) **10**, 158, 1900).

Digitized by Google

Bezeichnet man H_2CG_2 mit β, so ergiebt die Figur leicht

$$\sin\tfrac{1}{2}\beta = \frac{3\sin\frac{1}{2}\alpha}{n(2+\cos\frac{1}{2}\alpha)},$$

also

$$\beta = 2\arcsin\frac{3\sin\frac{1}{2}\alpha}{n(2+\cos\frac{1}{2}\alpha)}$$
$$= \arcsin\frac{1}{n}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^5}{5760}\cdots\right) = \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha^3}{24n^3} - \frac{\alpha^5}{5760n} + \cdots.$$

Setzt man für kleine Winkel den Fehler $\delta = \frac{\alpha^3}{24n^3}$(angenähert), so folgt der Zahlenkoeffizient von α^3 für

$$n = 3, \quad 5, \quad 7, \quad 9, \ldots$$
$$\delta = \tfrac{1}{648}, \quad \tfrac{1}{3000}, \quad \tfrac{1}{8232}, \quad \tfrac{1}{17496}, \cdots.$$

Doch ist zu beachten, dafs das Glied mit der fünften Potenz von α bald beträchtlichere Werte annimmt. Als independentes Verfahren hat die Konstruktion ihre Vorzüge. Merkwürdig ist die Benutzung der Formel $\frac{3\sin x}{(2+\cos x)} = x - \frac{x^5}{180}\cdots$, die auch von Catalan für die angenäherte Dreiteilung verwendet und die bis auf Nikolaus von Cusa zurück verfolgt ist.

Berlin, August 1902.

Digitized by Google

Rezensionen.

Arthur von Oettingen. Elemente des geometrisch-perspektivischen Zeichnens. Mit 209 Textfiguren. Leipzig 1901. W. Engelmann 8°. VII + 177 S.

Das Buch behandelt die Grundlehren der Perspektive, ungefähr in dem an technischen Hochschulen gelehrten Umfange, jedoch unter absichtlicher Vermeidung aller praktischen Anwendungen, ja sogar unter Hervorkehrung eines gegensätzlichen Standpunktes (Einleitung S. 2). Außerdem ist ungefähr ein Drittel des Buches der Einführung in die projektive Geometrie und der Angabe von Eigenschaften der Kegelschnitte gewidmet. Die projektiven Eigenschaften sind aber nicht organisch aus der perspektiven Abbildung entwickelt wie in W. Fiedlers „Darstellender Geometrie," sondern das Buch beginnt mit der Lehre über projektive Punktreihen und Strahlenbüschel (mit Bezugnahme auf Steiners „Systematische Entwickelung"), lehrt die Konstruktion der Doppelelemente konlokaler projektiver Gebilde und verwendet die erhaltenen Sätze und Konstruktionen beim perspektiven Zeichnen. Auf Seite 54 folgt dann die projektive (oder wie der Verf. sagt „perspektivische") Erzeugung von Kegelschnitten und die Lehre von den harmonischen Elementen, wobei aber bezüglich der Beweise zum Teil auf Steiner verwiesen wird. In einem Anhang (S. 164—177) wird eine Schar von Sätzen über Kegelschnitte angeführt, „die zur Konstruktion von Kegelschnitten anwendbar" sein sollen, bezüglich ihrer Beweise wird jedoch auf Salmon-Fiedlers „Analytische Geometrie der Kegelschnitte" verwiesen. Schon aus pädagogischen Gründen erscheint eine solche Zusammenstellung von teils metrischen, teils projektiven Sätzen, die der Zeichner zum geringsten Teil braucht und deren (analytische!) Beweise er auch in dem angezogenen Werk oft nicht findet, da sie dort als Übungsaufgaben vorgelegt werden, verwerflich.

Vielleicht würde es sich kaum lohnen, näher auf den Inhalt des Buches einzugehen, wenn nicht die auf dem Titelblatte angeführte Stellung des Verfassers ganz andere berechtigte Erwartungen erregte. Leider wird das Lesen des Werkes in jedem Fachmann den peinlichen Eindruck erwecken, als wäre der Verfasser entweder mit dem Gebiete der darstellenden und projektiven Geometrie nicht so vertraut, wie es sich für einen Lehrer des Faches ziemt, oder als hätte er das Buch sehr flüchtig abgefafst. Für wen das Buch geschrieben ist, bleibt unklar, trotzdem es diesbezüglich in der Einleitung heifst: „Als Leserkreis dachte sich der Verfasser vor allem Lehrer und Dozenten der höheren Mathematik, dann auch Künstler und Laien von tieferer mathematischer Bildung, am wenigsten Techniker aller Art." Denn für so verschieden mathematisch vorgebildete Leser passend zu schreiben, ist unmöglich. Den

Digitized by Google

Künstler möchte ich kennen lernen, der, um Perspektive zu erlernen, den Ballast der projektiven Geometrie, noch dazu in dieser Form geboten, mitschleppen möchte! Und einen „Dozenten der höheren Mathematik" wird es merkwürdig anmuten, wenn nach Erklärung der Begriffe „Punktenreihe" und „Strahlbüschel" (S. 5) die projektive Verwandtschaft auf folgende Weise eingeführt wird: „Ein Punkt B und eine Gerade A können aufeinander bezogen werden, indem jedem Punkte von A ein bestimmter Strahl von B entspricht, wobei die Strahlen des Büschels nach den Punkten der Punktenreihe benannt werden" (Fig. 2 steht daneben). Oder wenn es nach Anführung der Thatsache, „dafs die beiderseits im Unendlichen liegenden Punkte von A (Gerade) identische Punkte sind" (S. 6), weiter heifst: „die scheinbare Paradoxie wird dadurch gehoben, dafs beide Punkte gleichartig nicht existieren." Verwirrend wird es auf ihn wohl nicht wirken, wenn auf S. 165, 166 (Satz 12) der Brianchonsche Satz über das einem Kegelschnitt umschriebene Sechseck Pascal „Essai sur les coniques" Paris 1640 und der dazu „in direktem Gegensatz" stehende Pascalsche Satz Brianchon „Journal de l'Ec. Polyt. Cah. XIII, 1824" zugeschrieben wird. Ungenauigkeiten liefsen sich viele anführen. Besonders fällt der Gebrauch von Benennungen auf, die man in diesem Sinne heutzutage sonst kaum findet: z. B. S. 9, „perspektivisch gleich" (S. 10 wieder „projektivisch gleich") für kongruent, S. 18 „Doppelgerade" und „Doppelbüschel" für vereinigt liegende (konlokale) projektive Punktreihen oder Strahlenbüschel, „unendliche Elemente" statt unendlich ferne Elemente. Von zwei schiefliegenden projektiven Punktreihen heifst (S. 13) die eine eine „schiefe Projektion" der andern.

Ebensowenig Gutes läfst sich über den eigentlich darstellend geometrischen Teil des Buches sagen. Er zeichnet sich durch Einführung einer ganzen Schar neuer, aber meines Erachtens unnützer Namen, wie (S. 26—29) „Bildrahmen, Firmament, Ober-, Unter- und Rückenhimmel (sogar oberer und unterer Rückenhimmel!), Fufsebene (statt des gebräuchlichen „Grundebene"), Terrain, Rückenterrain, Stathme" aus. Im II. Teil, Kap. 4 (S. 33—38) führt der Verfasser, weil nach seiner Ansicht „der Verwirrung durch eine konsequente Benennung ein Ende gemacht werden mufs", für die drei aufeinander senkrechten „Hauptrichtungen von Linien" die Benennungen *„orthogonal, vertikal und brachial"*, für die „Hauptrichtungen von Ebenen" die Benennungen *„frontal, horizontal und stathmal"* ein. Hierzu sagt er in einer Anmerkung (S. 37): „Da es nicht ganz leicht ist, sofort die sechs Namen bei der Hand zu haben, so bediene ich mich einer Mnemotechnik, die mir stets sehr nützlich war und die ich deshalb dem Leser nicht vorenthalten möchte: An die je drei Hauptgebilde OVB und FHS knüpfe ich die Namen des ersten und dritten Reichskanzlers: **O**tto von **B**ismarck und **F**ürst **H**ohenlohe-**S**chillingsfürst."

In einer Anmerkung auf S. 132, 133 giebt der Verfasser „alle Gründe" an, die ihn veranlafst haben, seine „Elemente" „trotz des Vorhandenseins des ausgezeichneten Werkes" von G. Ad. V. Peschka (nicht von Peschka!) und Em. Koutny, des einzigen Werkes über Perspektive, dessen er erwähnt, zu veröffentlichen. Dafs in anderen Werken sich die Darstellung von Gebilden mit Benutzung des „Terrains" die „schärfere Trennung der Mafsperspektive von der der Lage", sowie die Einführung „der Elemente der synthetischen Geometrie in das perspektivische Denken und Zeichnen" schon

Digitized by Google

lange findet, scheint dem Verfasser fremd zu sein. Seine Darstellung von Regelflächen zweiten Grades, auf die er so grofses Gewicht legt, hätte er z. B. schon in der ersten Auflage des oben erwähnten Fiedlerschen Werkes (Leipzig 1871) Nr. 90, S. 316 flg. finden können. Wenn der Verfasser am Schlusse obiger Anmerkung sagt: „Wir haben unser System vollständig unabhängig von diesem (dem Peschka-Koutnyschen) Werke ausgearbeitet. Man wird daher nirgends eine Spur von Ähnlichkeit herausfinden," so fehlt dafür die Angabe der von ihm bei der Ausarbeitung wirklich benutzten Werke.

Dies dürfte zur Charakterisierung der Art, in der das Buch verfafst ist, genügen.

Königsberg i. P. ———— E. Müller.

H. Andoyer. Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure. A l'usage des étudiants des Facultés des Sciences. Tome I. (VI, 508. 8°.) Paris 1900, Gauthier-Villars.

Dieses beachtenswerte Buch behandelt vorzugsweise diejenigen Sätze und Methoden der Formen-Theorie, welche der projektiven Geometrie der algebraischen Gebilde zu Grunde liegen. Dabei wird jedoch das Hauptgewicht auf die analytischen Resultate selbst, nicht auf ihre geometrische Interpretation gelegt; die letztere wird immer nur beiläufig berührt. Dieser eigentümliche Standpunkt hat seine Vorteile und seine Nachteile. Ein Vorteil ist es offenbar, dafs man von jedem so gewonnenen Resultat mit gleicher Leichtigkeit zu *jeder* geometrischen Interpretation desselben übergehen kann; ein Nachteil, dafs man mit Sätzen und Begriffen in abstracto operiert, denen nur oder hauptsächlich durch ihren konkreten geometrischen Ursprung Interesse und Bedeutung zukommt.

Im Gegensatz zu anderen Autoren, welche die geometrische Terminologie auch da noch beibehalten, wo eine geometrische Interpretation fehlt, z. B. in höheren Räumen, hält es Andoyer für zweckmäfsig, eine neue Terminologie einzuführen. So spricht er von Elementen erster und zweiter Art statt von Punkten und Geraden einer Ebene oder Ebenen und Geraden eines Punktes, von Serien statt von Kurven oder Kegeln; dagegen werden inkonsequenterweise die Bezeichnungen Distanz, Winkel, Fläche beibehalten.

Dafs der Verfasser auf ausführliche Litteraturangaben absichtlich — mit Rücksicht auf den didaktischen Zweck des Buches — verzichtet hat, scheint mir nicht zu billigen: im Gegenteil ist grade ein zusammenfassendes Lehrbuch wie das vorliegende, das den Zweck hat, in ein bestimmtes, nicht elementares Gebiet einzuführen, zugleich der geeignetste Ort, die Original-Arbeiten anzugeben und auf deren Studium nachdrücklich hinzuweisen.[1])

Der uns zunächst vorliegende erste Band behandelt das binäre und das ternäre Gebiet: die Geometrie in einer und in zwei Dimensionen.

Die eindimensionale Geometrie wird in den meisten Lehrbüchern der analytischen Geometrie zu Unrecht vernachlässigt; so wichtige und grundlegende Begriffe wie die des Doppelverhältnisses und der Distanz finden in ihr die naturgemäfseste Stelle der Behandlung.

1) Einen Ersatz in dieser Beziehung bietet Franz Meyers Bericht über die Fortschritte der projektiven Invariantentheorie, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. I, Berlin 1892 (frz. Ausg. v. H. Fehr, Paris 1897; ital. Ausg. v. G. Vivanti 1900).

Digitized by Google

Andoyer stellt sich gleich auf den allgemeinsten Standpunkt: er betrachtet Systeme von Formen von beliebig vielen Variabelnpaaren erster und zweiter Art. Dafs Andoyer schon hier, im binären Gebiet, Elemente beider Arten einführt, hat seine Berechtigung in der dadurch vervollkommneten Analogie zum ternären und quaternären Gebiet; und Analogiebildung ist grade bei formalen Theorien ein wichtiges heuristisches Hilfsmittel.

Nachdem die fundamentalen Begriffe: „Koordinaten, Fundamentalelemente, Gewicht" erklärt sind, folgt der Fundamentalsatz der symmetrischen Funktionen und die Definition der Polaren als Entwicklungskoëffizienten von Taylorschen Reihen. Die Polaren werden zur Darstellung der Koëffizienten der transformierten Formen benutzt, die aus den ursprünglichen durch lineare Transformation der Variablen entstehen. Hierbei bezeichnet Andoyer als „transponierte" Substitution diejenige, deren Reziproke man sonst — nach dem Vorgange von Gaufs[1]) — so bezeichnet. Nunmehr folgen Definition und Existenzbeweis der absoluten Invarianten; die Anzahl der unter sich unabhängigen ist kleiner als die Koëffizientenanzahl der Formen, und zwar um den „Rang"[2]) einer gewissen Matrix. Die Zerlegung der Substitutionen in infinitesimale liefert sofort die Differentialgleichungen der absoluten und demnächst diejenigen der relativen Invarianten. Der Hilbertsche Satz von der Existenz endlicher Fundamentalsysteme für ganze Invarianten wird unbewiesen mitgeteilt. Einige Verallgemeinerungen des Invariantenbegriffs (Kombinanten, Invariant-Systeme, multiple Invarianten) beschliefsen das erste Kapitel.

Das folgende bringt die Betrachtungen der invariantenbildenden Prozesse (Polaren, Überschiebungen) und insbesondere derjenigen Invarianten, deren Verschwinden die Bedingung für das Bestehen einer gegebenen Anzahl linearer Relationen zwischen gegebenen Formen ausdrückt; diese erweisen sich später für die Bildung der Resultanten und Diskriminanten als nützlich.

Da binäre Formen *eines* Variabelnpaares in Linearfaktoren zerfallen, ist die Betrachtung der Invarianten von Systemen linearer Formen von grundlegender Bedeutung. Dieser Betrachtung ist das dritte Kapitel gewidmet. Die Rolle, die dem Doppelverhältnis als — im Grunde — einziger absoluten Invariante zukommt, wird gebührend hervorgehoben. Durch Zusammenfallen irgend zweier der sechs Werte desselben entstehen die drei Fälle der Harmonie, Äquianharmonie, Singularität, entsprechend dem Verschwinden der respektiven Invarianten g_3, g_2, D; deren Relation $27\,D^2+g_3^2=4g_2^3$ vielfach wiederkehrt und namentlich bei den kubischen und biquadratischen Formen von Wichtigkeit ist.

In den folgenden Kapiteln werden für die bilineare Form von vier Variabeln und für ein System quadratischer Formen vollständige Systeme aufgestellt. Bei den letzteren braucht man keine andern Invarianten einzuführen, als solche, die von höchstens dreien der quadratischen Formen abhängen und keine andern Relationen zwischen den Invarianten, als solche die von höchstens vieren der Formen abhängen.

Die nächsten Abschnitte sind den kanonischen Formen und der Aufstellung voller Systeme für die kubische, biquadratische, quintische, lineo-

1) Disquisitiones arithmeticae art. 268 IV = Werke I S. 304.
2) Diesen allgemein eingeführten Ausdruck gebraucht Andoyer nicht.

Digitized by Google

quadratische, quadrato-quadratische Form gewidmet. Bei zwei Formen mit zwei Variabelnpaaren wird der Bézoutsche Satz über die Anzahl der gemeinsamen Elemente, ferner die symmetrischen Funktionen derselben, bei drei solchen Formen die Resultante besonders behandelt.

Mit der allgemeinen (d. i. elliptischen und hyperbolischen) und der speziellen (d. i. parabolischen) Metrik im binären Gebiet wird das erste Buch geschlossen.

Das zweite Buch: ternäre Geometrie, nimmt zunächst denselben Gang. Nach Erörterung der invariantenbildenden Prozesse und Ableitung der Differentialgleichungen der Invarianten wird zur Aufstellung eines vollständigen Systems von Invarianten für ein System linearer Formen, oder, was dasselbe ist, für ein System von Variabeln erster $(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; \cdots)$ und zweiter Art $(\xi_1, \xi_2, \xi_3; \cdots)$ geschritten. Das vollständige System besteht aus Invarianten der drei Arten:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3,\ (xyz) = \begin{vmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ y_1 y_2 y_3 \\ z_1 z_2 z_3 \end{vmatrix},\ (\xi\eta\zeta).$$

Zwischen denselben bestehen aber Relationen; z. B.

$$(xyz)(xtu) = \begin{vmatrix} (xyt)(xyu) \\ (xzt)(xzu) \end{vmatrix}, \quad (xyz)^2(tuv) = \begin{vmatrix} (yzt)(yzu)(yzv) \\ (zxt)(zxu)(zxv) \\ (xyt)(xyu)(xyv) \end{vmatrix}.$$

Hierzu ist zu bemerken, dafs Pascal[1]) diese Relationen zwischen den Determinanten einer Matrix alle auf den zweiten Grad reduziert hat, z. B. ergiebt die obige durch Entwicklung nach der dritten Kolonne:

$$(xyz)(tuv) = (yzv)(xtu) + (zxv)(ytu) + (xyv)(ztu).$$

Des weiteren sind besonders hervorzuheben zwei Bildungen der Resultante dreier ternärer Formen: in der ersten, die der Cayleyschen für binäre Formen analog ist, erscheint die Resultante als Determinante; in der zweiten als Determinantenquotient, oder bei Ausdehnung auf Funktionen von mehr Variablen als Produkt von Determinantenquotienten. Hierbei ergiebt sich auch die von Roberts[2]) angegebene Verallgemeinerung des Bézoutschen Satzes über den Grad der Resultante.

Es folgt die Untersuchung der Singularitäten einer Serie (Kurve) insbesondere die Aufstellung der Plückerschen Formeln. Aus den Plückerschen Formeln, die zwischen Ordnung (p), Klasse (π), den Anzahlen der Doppel- und Rückkehrpunkte (d, r), der Doppel- und Wendetangenten (δ, ϱ) bestehen, folgen bekanntlich noch die Relationen:

$$3p - r = 3\pi - \varrho,$$

$$\frac{(p+1)(p+2)}{2} - d - 2r = \frac{(\pi+1)(\pi+2)}{2} - \delta - 2\varrho,$$

$$\frac{(p-1)(p-2)}{2} - d - r = \frac{(\pi-1)(\pi-2)}{2} - \delta - \varrho,$$

1) Pascal, Memorie dei Lincei (4) V S. 374 (1888) = I Determinanti (1897) S. 148, 157.

2) J. für Math. 67 (1867), 266. Vahlen ebenda 113 (1893), 348.

Digitized by Google

deren erste die Differenz der beiden andern ist. Es ist naheliegend, aber meines Wissens bisher nicht geschehen, nach *allen* Relationen von der Form:

$$\varphi(p,\ d,\ r) = \varphi(\pi,\ \delta,\ \varrho)$$

oder also nach einem Fundamentalsystem solcher Relationen zu fragen. Ein solches erhält man, wenn man zu zweien von jenen drei Relationen die folgende, ersichtlich von jenen unabhängige:

$$p^3 - p^2 - p(2d + 3r) = \pi^3 - \pi^2 - \pi(2\delta + 3\varrho)$$

hinzunimmt.

Die in den folgenden Kapiteln enthaltene Theorie der Enveloppen, die Behandlung der Hesseschen, Steinerschen, Cayleyschen Kurve, der bilinearen und der quadratischen Formen, Büschel und Netze, der trilinearen und der kubischen Form bieten manches Beachtenswerte; namentlich sei auf die einfache und elegante Herstellung der Schliefsungsinvarianten zweier ternären quadratischen Formen, sowie auf die Untersuchung der Inflexionselemente der kubischen Kurve hingewiesen.

Bei der Kurve vierten Grades wird besonders die Konfiguration der 28 Doppeltangenten und die damit zusammenhängende Erzeugung der Kurve als Enveloppe von Kegelschnittsystemen untersucht.

Von der „allgemeinen" metrischen Geometrie verdient die Behandlung der orientierten Kreise Beachtung, ferner des verallgemeinerten Apollonischen und des Malfattischen Taktionsproblems, des Ptolemäischen und des Feuerbachschen Satzes.

Bei der Darstellung der Bewegungen als Transformationen hätte wohl die Darstellung der Bewegung in der (elliptischen, parabolischen, hyperbolischen) Ebene durch die Transformationen

$$x + iy \left\| \frac{(\alpha + i\beta)(x + iy) + (a + ib)}{j^2(a - ib)(x + iy) + (\alpha - i\beta)}, \right. \qquad (j^2 \text{ resp.} = -1,\ 0,\ +1)$$

die sich wie die „Quaternionen" $(\alpha + i\beta) + (a + ib)j$ $(ij = -ji)$ komponieren, Erwähnung verdient. Diese Darstellung ist um so wichtiger als sie entsprechend in mehr Dimensionen gilt. So wird die Bewegung im dreidimensionalen (ell., par., hyp.) Raum durch

$$x + iy + jz \left\| \frac{(\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta)(x + iy + jz) + (a + ib + jc + ijd)}{k^2(a - ib - jc + ijd)(x + iy + jz) + (\alpha - i\beta - j\gamma + ij\delta)} \right. \begin{pmatrix} i^2 = -1 \\ j^2 = -1 \\ ij = -ji \\ k^2 = \text{resp.} -1,\ 0,\ +1 \end{pmatrix}$$

dargestellt, wenn dieser Ausdruck wirklich einen Vektor darstellt. Hierzu ist notwendig und hinreichend, dafs

$$\frac{\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta}{a - ib - jc + ijd} = \frac{(\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta)(a + ib + jc - ijd)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

ein Vektor, also $-\alpha d + \beta c - \gamma b + \delta a = 0$ ist, wodurch die Anzahl der unabhängigen Parameterverhältnisse von sieben auf sechs reduziert wird. Jene Transformationen komponieren sich wie die „Biquaternionen":

$$(\alpha + i\beta + j\gamma + ij\delta) + (a + ib + jc + ijd)k \qquad (ik = -ki,\ jk = -kj).$$

Digitized by Google

In der „speziellen“ (parabolischen) metrischen Geometrie wird der neuauftretende Begriff „Fläche“, dem sonst gewisse prinzipielle Schwierigkeiten entgegenstehen, durch einen Grenzübergang von der „allgemeinen“ Geometrie her gewonnen. Mit der Einführung und einigen Anwendungen der Kreiskoordinaten wird der Schlufs gemacht.

Die Darstellung ist im ganzen klar, knapp und einfach. Durch Hervorhebung der Hauptresultate wäre eine gröfsere Übersichtlichkeit zu erreichen gewesen.

Königsberg i. Pr. ——— K. Th. Vahlen.

Bertrand A.-W. Russell. Essai sur les fondements de la géométrie. Traduction par A. Cadenat, revue et annotée par l'auteur et par L. Couturat. Paris, Gauthier-Villars. 1901. 8^0. X und 274 S.

Seit dem 17. Jahrhundert haben die englischen Mathematiker eine Stellung für sich eingenommen und neue Gedanken, die auf dem Kontinente entstanden waren, entweder ganz abgelehnt oder doch nur nach langem Zögern sich zu eigen gemacht. Das ist sofort einleuchtend für die Analysis, es ist aber nicht minder richtig für die Geometrie, für die in England bis vor kurzem Euklids *Στοιχεῖα* das ausschliefsliche Elementar-Lehrbuch gewesen sind. Von diesem Gesichtspunkte aus wird es verständlich, dafs sogar ein Cayley im Jahre 1865 Lobatschefskijs imaginäre Geometrie mit einem kühlen: *I do not understand this* bei Seite geschoben hat und sein Leben lang ein orthodoxer Euklidiker geblieben ist. Erst während der letzten Jahre scheinen die seit mehr als einem Jahrhundert auf dem Kontinente mit steigendem Eifer und Erfolge betriebenen Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie in England Verständnis und Würdigung gefunden zu haben. Ein bemerkenswertes Symptom hierfür ist das im Jahre 1897 erschienene Werk von Herrn Russell: *Essay on the foundations of geometry*, in dem dieser den Versuch unternommen hat, eine zusammenfassende, historisch-kritische Darstellung der Untersuchungen zu geben, die seit Kants Auftreten Mathematiker und Philosophen über das Raumproblem angestellt haben. Obgleich der Versuch, nach der Überzeugung des Ref., in wesentlichen Punkten mifslungen ist, so bedeutet er doch ohne Zweifel für England einen erfreulichen Fortschritt und erweckt die Hoffnung auf weitere Fortschritte.

Die französische Ausgabe, die Herr Cadenat mit Sorgfalt und Geschick bearbeitet hat, ist bis auf einige kleine Verbesserungen mit dem Originale identisch; es sind also die zahlreichen und wichtigen Veröffentlichungen über das Raumproblem, die von 1897 bis Mai 1901 (Datum der Vorrede) erschienen sind, nicht berücksichtigt worden, wahrscheinlich weil sie Herrn Russell unbekannt geblieben sind. Wenn es sich jedoch darum handelt, sein Werk als wissenschaftliche Leistung zu beurteilen, so kann Unkenntnis der Literatur keinen Entschuldigungsgrund bilden; vielmehr mufs sich der Ref. dabei auf den Standpunkt stellen, den die Forschung gegenwärtig erreicht hat.

Die Anordnung des Stoffes, die Herr Russell gewählt hat, ist einfach und zweckmäfsig. Nachdem er seine Auffassung des Raumproblems dargelegt hat, bei der die erkenntnistheoretisch-metaphysische Seite in den Vordergrund tritt (S. 1 bis 9), giebt er zunächst eine Geschichte der Metageometrie (Kap. I, S. 9 bis 68), in der über die Arbeiten der Mathematiker

Digitized by Google

berichtet wird, und läfst darauf eine kritische Darstellung der philosophischen Forschungen über das Raumproblem folgen, die Kant, Riemann, Helmholtz, Erdmann, Lotze und Delbœuf angestellt haben (Kap. II, S. 69 bis 149). Alsdann begründet er seine eigene Theorie, nach der die Axiome der projektiven Geometrie *rein a priori* sein sollen, während die Axiome der metrischen Geometrie *ein empirisches Element* enthalten (Kap. III, S. 150 bis 224). Den Schlufs bilden „philosophische Konsequenzen" (Kap. IV, S. 224 bis 254).

Dafs der Verfasser in dem ersten Kapitel mit einem Berichte über die mathematischen Untersuchungen beginnt, welche die Grundlagen der Geometrie zum Gegenstande haben, das wird ein jeder billigen, der zur philosophischen Betrachtung einer Theorie nur diejenigen für berechtigt und befähigt hält, die genaue Kenntnis davon besitzen, eine Meinung, gegen die freilich spricht, dafs nicht wenige Philosophen ein entscheidendes Urteil über Dinge fällen, von denen sie nur höchst oberflächliche, ja falsche Vorstellungen haben. Jedenfalls wird der Mathematiker von Fach geneigt sein, den Wert der philosophischen Erörterungen, die in den Kapiteln II bis IV folgen, in erster Linie danach zu bemessen, ob der Autor die mathematischen Untersuchungen über das Raumproblem sorgfältig studiert und richtig aufgefafst habe; ferner wird er wünschen, dafs jener die Originalschriften selbst gelesen und nicht aus sekundären Quellen geschöpft habe.

Wie steht es in dieser Beziehung mit dem vorliegenden Werke? Als Grundlage für seine Geschichte der Metageometrie haben dem Verfasser die *Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie* gedient, die Herr Felix Klein im Jahre 1889/90 in Göttingen gehalten und 1892 in Form autographierter Hefte veröffentlicht hat (2. unveränderte Auflage 1893). Seit dem Jahre 1890 hat jedoch die betreffende Literatur eine so beträchtliche Vermehrung erfahren, dafs Herr Klein schon im Jahre 1894 ausdrücklich erklärt hat, seine Vorlesungen seien „nach verschiedenen Richtungen in der Zwischenzeit durch neuere Publikationen überholt" (Math. Ann. 1894, **45**, 141). Seitdem hat die Vermehrung des Materials für eine Geschichte der Metageometrie von Jahr zu Jahr zugenommen. Es erweckt daher keine günstige Meinung, wenn im ersten Kapitel fast ausschliefslich die Angaben von Herrn Klein wiedergegeben werden. In Folge dessen *steht die Darstellung nicht auf der Höhe, die sowohl die Forschungen über die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie als auch die Untersuchungen über diese selbst im Jahre 1897, geschweige denn für die französische Ausgabe im Mai 1901, erreicht hatten.* Es sei gestattet, die wichtigsten Lücken und Mängel aufzuzählen.

Als Bibliographie der „nichteuklidischen Literatur" wird allein das Verzeichnis erwähnt, das Herr Halsted 1878 in den beiden ersten Bänden des *American Journal* veröffentlicht hat. Mit Bedauern vermifst man Herrn Bonolas ausgezeichnete *Bibliografia sui fondamenti della geometria noneuclidea*, die seit 1899 in dem von Herrn Loria herausgegebenen *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche* erscheint und, wie der Ref. mitzuteilen in der Lage ist, noch in diesem Jahre zum Abschlusse gelangen soll.

Der Bericht über Saccheri und Lambert ist sehr mager ausgefallen. Bei Saccheri bedarf die Angabe, Beltrami habe zuerst auf ihn aufmerk-

Digitized by Google

sam gemacht, der Berichtigung. Der *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) ist niemals ganz in Vergessenheit geraten; noch im Jahre 1824 hat Camerer in seinem vortrefflichen *Excursus ad El. I, 29* ausführlich und durchaus sachgemäfs über ihn berichtet. Dann aber hat nicht etwa Beltrami Saccheris Werk wiederentdeckt, sondern ist, wie er selbst berichtet, durch den Pater Manganotti darauf hingewiesen worden.

Was über Legendre gesagt wird, ist unvollständig und ungenau. Legendres Schriften, besonders die *Élémens de géométrie*, haben im ersten Drittel des 19. Jahrhunderts neben Kants *Kritik der reinen Vernunft* wohl am meisten dazu beigetragen, dafs das Raumproblem eingehender untersucht wurde; besonders deutlich tritt der Einflufs Legendres bei Lobatschefskij hervor (Einleitung der *Neuen Anfangsgründe* vom Jahre 1835). Hervorzuheben, dafs Legendre eine ausführlichere Behandlung verdient hätte, hält der Ref. um so mehr für seine Pflicht, als bei seinem in Gemeinschaft mit F. Engel herausgegebenen Werke: *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauſs* (Leipzig 1895) Legendre zu kurz weggekommen ist.

Ganz und gar übergangen sind Schweikart und Taurinus. Dafs Schweikart schon zwischen 1812 und 1816 zu der Überzeugung gelangt ist, das Parallelenaxiom sei unbeweisbar, und es gebe eine in sich konsequente Geometrie, die „Astralgeometrie", in der die Summe der Winkel des Dreiecks von zwei Rechten verschieden sei (vergl. Gaufs' Werke Bd. VIII, S. 180 bis 181 und 238), und dafs Taurinus schon 1826 in den *Geometriae prima elementa* die nichteuklidische (hyperbolische) Trigonometrie aufgestellt hat, das sind Thatsachen, die in keiner Geschichte der Metageometrie fehlen dürfen, schon weil die S. 15 berührte Frage nach den Beziehungen, in denen die Untersuchungen Lobatschefskijs und der beiden Bolyai zu Gaufs' Jugendkonzeptionen stehen, dadurch jedenfalls von einer primären zu einer secundären herabgedrückt wird und nur noch lediglich biographisches Interesse behält.

Sehr wenig befriedigend ist die Darstellung der Ideen der beiden Bolyai (S. 15—16), was nur zum Teil dem Mangel an einer leicht zugänglichen Ausgabe ihrer Schriften zuzuschreiben ist; die neue Ausgabe des Tentamen, die von der Ungarischen Akademie der Wissenschaften veranstaltet wird und von der Band I im Jahre 1897 erschienen ist, während Band II Ende dieses Jahres zur Ausgabe gelangen soll, kennt Herr Russell nicht. Selbst eine solche Entschuldigung fehlt aber bei den ganz unzureichenden Angaben über Lobatschefskij (S. 14), dessen System mit dem Johann Bolyais nicht identisch ist, wie der Verfasser glaubt, sondern sich von ihm in wesentlichen Punkten unterscheidet; von dem russischen Geometer weifs Herr Russell nur die *Géométrie imaginaire* vom Jahre 1837 und die *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* vom Jahre 1840 anzuführen. Unrichtig ist die Angabe, Lobatschefskijs Werke seien erst durch Beltramis *Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea* vom Jahre 1868 in weiteren Kreisen bekannt geworden; denn für ihre Würdigung ist das Erscheinen des Briefwechsels Gaufs-Schumacher (Bd. 5, 1863) und das Eintreten Baltzers und Hoüels (1866) die entscheidende Wendung gewesen. Näher darauf einzugehen ist überflüssig, da alles, was man darüber sagen kann, bereits in der vortrefflichen Biographie Lobatschefskijs von Engel gesagt ist, dessen schönes Buch:

Digitized by Google

N. I. Lobatschefskij. Zwei geometrische Abhandlungen, aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und einer Biographie des Verfassers, Leipzig, 1. Teil 1898. 2. Teil 1899 Herr Russell nicht benutzt hat, während uns doch erst durch die deutsche Übersetzung der russisch geschriebenen Hauptwerke Lobatschefskijs das Verständnis für das erschlossen worden ist, was dieser eigentlich gemeint und gewollt hat. Es ist das um so mehr zu bedauern, als Lobatschefskij auf Grund dieser Schriften auch im zweiten Kapitel neben Riemann und Helmholtz einen Platz verdient hätte.

Nicht einverstanden ist der Ref. mit der S. 12 ausgesprochenen Behauptung, erst durch die Heranziehung der projektiven Geometrie sei wirklich bewiesen worden, dafs die nichteuklidischen Systeme auf keinen Widerspruch führen können, indem nämlich jeder Widerspruch in ihnen zu einem Widerspruch in der Euklidischen Geometrie selbst führen müfste (deren Widerspruchslosigkeit freilich Herr Russell, wie fast alle anderen Autoren, stillschweigend als Axiom voraussetzt). Der Ref. ist vielmehr der Überzeugung, dafs bereits durch Lobatschefskij und J. Bolyai für die *Ebene* die Widerspruchslosigkeit der hyperbolischen Geometrie nachgewiesen worden sei. Für den *Raum* verhält es sich allerdings anders. Das hat schon J. Bolyai selbst erkannt; über einen Versuch von ihm, auch für den Raum die Widerspruchslosigkeit der absoluten Geometrie nachzuweisen, hat der Ref. auf Grund des Nachlasses in einer der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vor kurzem vorgelegten Abhandlung ausführliche Mitteilungen gemacht.

Für unbegründet hält der Ref. ferner die Bedenken des Verfassers gegen die Widerspruchslosigkeit der elliptischen Geometrie (S. 51), die ja mit der Geometrie des Strahlenbündels identisch ist.

Bis jetzt handelte es sich ausschliefslich um Arbeiten kontinentaler Mathematiker. Aber auch in der englischen Literatur fehlt es nicht an Lücken, z. B. wird Clifford mit keinem Worte erwähnt. Auch die Angaben über Cayleys Mafsbestimmung lassen in mehrfacher Hinsicht zu wünschen übrig. Zu dem *Sixth Memoir upon Quantics* vom Jahre 1859 bemerkt Herr Russell: „Cayley beweist, dafs die Geometrie von zwei Dimensionen, wenn das Absolute ein *imaginärer* Kegelschnitt ist, die sphärische Geometrie ist, aber er hat nicht die Übereinstimmung mit der Geometrie von Lobatschefskij für den Fall bewiesen, wo das Absolute *reell* ist; in der That zeigt er nirgends, dafs er Kenntnis von den nichteuklidischen Systemen besitzt". Die letzte Bemerkung leidet an einer gewissen Unbestimmtheit, die sich beseitigen läfst. Eine von Herrn Russell überschene Note Cayleys, die 1865 im Phil. Mag. erschienen ist (*On Lobatschefsky's imaginary Geometry*, wiederabgedruckt Collected papers, Vol. V, S. 471 bis 472) zeigt, dafs Cayley erst damals, im Jahre 1865, Kenntnis von Lobatschefskijs Abhandlung aus dem Jahre 1837 erhalten hat, ohne dafs er jedoch den Zusammenhang der imaginären Geometrie mit seiner Mafsbestimmung auf Grund eines reellen Kegelschnittes erkannt hätte. Vielmehr bemerkt er zu den Formeln der nichteuklidischen Trigonometrie, die Lobatschefskij allerdings nur mit einem: *j'ai prouvé ailleurs* begründet hatte: „Ich verstehe das nicht; es würde jedoch sehr interessant sein, eine *reale* geometrische Interpretation des zuletzt angeführten Systems von Gleichungen zu finden". Um so höher wird man die Leistung von Herrn

Digitized by Google

Klein zu schätzen haben, der, nachdem Herr Fiedler in der zweiten Auflage seiner Bearbeitung der *Analytischen Geometrie der Kegelschnitte* von Salmon (Leipzig 1866) über Cayleys Auffassung der metrischen Grundbegriffe berichtet hatte, im Jahre 1871 den Zusammenhang zwischen Cayleys Maßbestimmung und der nichteuklidischen Geometrie erkannt und eingehend dargelegt hat *(Über die sogenannte nichteuklidische Geometrie,* Math. Ann. **4** (1871), 573—625. **5** (1873), 112—145. **7** (1874), 531—537).

Was im Anschlusse an Cayleys Maßbestimmung, S. 55—59, über die imaginären Größen gesagt wird, könnte im 18. Jahrhundert geschrieben sein. Zum Schlufs meint der Verfasser: „Ein Metaphysiker, der eine so absurde Sache wie die unendlichfernen imaginären Kreispunkte erfände, würde mit Schimpf und Schande davongejagt werden. Aber die Mathematiker dürfen sich ungestraft alles erlauben". An einer anderen Stelle (S. 126) sagt Herr Russell: „Der Angriff, den Lotze gegen die Metageometrie gerichtet hat, enthält verschiedene Verkehrtheiten, die einer ungenügenden mathematischen Kenntnis des Gegenstandes zuzuschreiben sind." Mit ihm selbst ist es bei den imaginären Größen nicht besser bestellt! Ebenso wenig weifs er von den modernen Untersuchungen über die Grundlagen der Arithmetik; man findet bei ihm weder das Axiom des Archimedes noch das Postulat G. Cantors (Math. Ann. **5** (1872), 123) erwähnt, Dinge, die doch für einen jeden unumgänglich nötig sind, der gegenwärtig von dem Raume als Zahlenmannigfaltigkeit im Sinne Riemanns sprechen will.

Unerklärlich ist dem Ref., dafs Herr Russell, der die autographierten Vorlesungen von Herrn Klein so eifrig studiert und so fleifsig benutzt hat, nicht auf dessen sonstige neuere Forschungen eingegangen ist; nur die schon erwähnten älteren Veröffentlichungen werden gelegentlich erwähnt. Es handelt sich einmal um die Abhandlung: *Zur nichteuklidischen Geometrie* (Math. Ann. **37** (1890), 544—572) und dann um das *Gutachten betr. den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von Sophus Lie anläfslich der ersten Verteilung des Lobatschefskij-Preises* vom Oct. 1897 (Math. Ann. **50** (1898), 583—600). Die in der ersten Abhandlung entwickelte Anschauung, dafs die Axiome der Geometrie dem Prozesse der „Idealisierung" ihren Ursprung verdanken, die übrigens bereits in einer Abhandlung vom Jahre 1873 (Math. Ann. **22**, 249—259, von Herrn Klein angedeutet war, hätte im zweiten Kapitel der *Foundations* berücksichtigt werden müssen.[1]) Die Lektüre des *Gutachtens* aber würde Herrn Russell zu einer Revision seiner Auffassung der Untersuchungen Lies veranlafst haben, einer Auffassung, die der Ref. geradezu als einen für das ganze Werk verhängnisvollen Irrtum bezeichnen möchte. Ehe jedoch hierauf näher eingegangen wird, möge noch bemerkt werden, dafs auch die neueren Untersuchungen anderer deutscher Mathematiker von Herrn Russell nicht beachtet worden sind; ich nenne etwa Hilbert (Grundlagen der

1) Im Sommer 1901 hat Herr Klein seine Anschauungen über diese Dinge ausführlich entwickelt in einer Vorlesung über *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien*, die soeben in autographierter Ausarbeitung erschienen ist (Zusatz Mai 1902).

Digitized by Google

Geometrie, 1899), Killing (Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Bd. 1, 1893, Bd. 2, 1898), Pasch (Vorlesungen über neuere Geometrie, 1882).

Den Schluſs des Kapitels bildet ein Bericht über die Arbeiten von Sophus Lie (S. 60—64). Es mag hingehen, daſs die Definition einer kontinuierlichen Gruppe von Transformationen, wie sie S. 60—61 gegeben wird, nicht ausreicht, und daſs die Auseinandersetzungen über mehrgliedrige Gruppen (S. 61) sehr unklar sind. Entschiedener Widerspruch muſs jedoch erhoben werden, wenn Herr Russell behauptet, „die Methode von Lie", d. h. seine Lösung des *Riemann-Helmholtzschen Problems*, „erschöpfe den Gegenstand vollständig." Der dritte Band der *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig 1893) zeigt aufs deutlichste, daſs Lie selbst weit davon entfernt gewesen ist, zu wähnen, durch seine Forschungen sei das Raumproblem, soweit es mathematischer Natur ist, vollständig erledigt worden. „Welchen Nutzen", fragt er am Schlusse des betreffenden Abschnittes (S. 536—537), „hat nun aber die Geometrie von einer Erledigung des Riemannschen Problems? — — — Riemann beschränkt sich ja auf die Behandlung einer Zahlenmannigfaltigkeit und versucht solche Axiome aufzustellen, die zur Begründung der Geometrie dieser Zahlenmannigfaltigkeit ausreichen. Hieraus ergiebt sich, daſs man zur Erledigung des Problems über die Grundlagen der Geometrie folgenden Weg einschlagen kann: Es sei Z das Axiom, das aussagt, daſs der dreidimensionale Raum eine Zahlenmannigfaltigkeit ist. Ferner seien A die Axiome, die bei Voraussetzung des Axioms Z noch notwendig und hinreichend sind, um die Geometrie des dreidimensionalen Raumes zu begründen. Ein derartiges System A von Axiomen, das nichts Überflüssiges enthält, haben wir in Kapitel 13 aufgestellt. Da Z und A zusammengenommen keine überflüssigen Bestandteile enthalten, werden die Axiome A, für sich genommen, sicher keine entbehrlichen Bestandteile enthalten. Man muſs daher versuchen, unter Beibehaltung der Axiome A solche weiteren möglichst einfachen Axiome hinzuzufügen, daſs diese zusammen mit den Axiomen A zum Aufbau der Geometrie genügen." Lie sagt dann noch einige Worte über den Weg, den man einschlagen könnte, um zu den hinzuzufügenden Axiomen zu gelangen, ohne jedoch auf diese seiner innersten Meinung nach undankbare Aufgabe näher einzugehen (vergl. auch die Äuſserungen S. 393—398).

Während man früher die Annahme, der Raum sei eine dreifach ausgedehnte stetige Zahlenmannigfaltigkeit, als selbstverständliche Folge der Stetigkeitsverhältnisse des Raumes und der in ihm liegenden Kurven und Flächen angesehen hatte, hat sich im Laufe der Zeit, wie Herr Klein in dem schon erwähnten *Gutachten* mit Nachdruck hervorgehoben hat, mehr und mehr herausgestellt, daſs in den allgemeinen Begriffen von Kurven und Flächen unüberwindliche Schwierigkeiten verborgen liegen, und daſs jene Voraussetzung über den Raum nur dann zulässig ist, wenn man bereits die *Elementargeometrie* entwickelt hat. Hieraus aber folgt, „daſs alle Untersuchungen, welche mit dem Begriff Zahlenmannigfaltigkeit beginnen", und dazu gehören auch die Untersuchungen von Sophus Lie, „wenn man sie *direkt* als Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie interpretiren wollte, einen Zirkel enthalten würden. Wir können sie nur als Hilfsmittel für solche Untersuchungen gelten lassen; sie ebenen sozusagen den Weg, auf welchem die rein geometrischen Untersuchungen vorzugehen haben."

Digitized by Google

Es scheint bis jetzt nicht bemerkt worden zu sein, dafs bereits im Jahre 1835 Lobatschefskij ähnlichen Gedanken Ausdruck gegeben hat. In der Einleitung seiner grofsen Abhandlung *Neue Anfangsgründe der Geometrie* sagt er: „Gewöhnlich beginnt man die Geometrie, indem man den Körpern drei Ausdehnungen beilegt, den Flächen zwei, den Kurven eine, während man beim Punkte gar keine zuläfst. Indem man die drei Ausdehnungen Länge, Breite und Höhe nennt und unter diesen Benennungen eigentlich die drei Koordinaten versteht, beeilt man sich auf diese Weise verfrühte Begriffe durch Worte mitzuteilen, denen die gesprochene Sprache bereits einen gewissen, für die strenge Wissenschaft freilich noch unbestimmten Sinn beilegt. In der That, ist es möglich, sich die Ausmessung der Länge nach klar vorzustellen, wenn wir noch nicht wissen, was eine gerade Linie ist? Wie kann man von Breite und Höhe reden, ohne vorher etwas über Lote, über die Ebene und darüber gesagt zu haben, wie sich die Lote in einer und in verschiedenen Ebenen verhalten?" u. s. w.

Kehren wir jedoch zu Herrn Russell zurück. Wenn er seinen philosophischen Untersuchungen das System der Axiome *A* von Lie zu Grunde legt, das er als der Weisheit höchsten Schlufs betrachtet, so mufs sein Verfahren vom Standpunkte des Mathematikers aus beanstandet werden. Nimmt man hinzu, dafs die mathematische Grundlegung auch sonst zu wünschen übrig läfst, so entsteht der Zweifel, ob es sich empfiehlt, auf die philosophischen Kapitel des Werkes näher einzugehen, ein Zweifel, der sich in Gewifsheit verwandelt, wenn man einige Erwägungen prinzipieller Natur anstellt, die an dieser Stelle freilich nur angedeutet werden können.

Mit Recht hat Herr Russell an die Spitze des zweiten Kapitels Kant gestellt, dessen *Prolegomena* (1783) die erste Periode in der Geschichte des Raumproblems eröffnen, die man als erkenntnistheoretische Behandlung wesentlich in metaphysischem Interesse charakterisieren kann. Durch Kants transzendentalen Idealismus ist die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf die Grundlagen der Geometrie gelenkt worden. Während die darauf gerichteten Bestrebungen zunächst wenig Beachtung erfuhren oder gar verspottet wurden, vielleicht gerade wegen ihres Zusammenhanges mit in Mifskredit geratenen philosophischen Spekulationen, hat seit den sechziger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts die mathematische Seite des Raumproblems immer mehr Teilnahme gefunden und ist von den Mathematikern auf das eingehendste durchforscht worden. Die erkenntnistheoretisch-metaphysischen Probleme sind dabei in den Hintergrund getreten. Gegen Fragen wie die, ob die Axiome der Geometrie apriorisch oder empirisch seien, werden sich, wie der Ref. glaubt, gegenwärtig viele Mathematiker von vorn herein ablehnend verhalten; ehe man eine solche Frage stelle, werden sie sagen, müsse erst festgestellt werden, was es mit den Begriffen: Axiome der Geometrie, apriorisch, empirisch auf sich habe, und ob ihnen in der Bedeutung oder in den Bedeutungen, die ihnen von den Philosophen beigelegt werden, überhaupt Existenzberechtigung zukomme; sonst sei zu befürchten, dafs bereits in ihrer Verwendung eine petitio principii liege, sodafs auf diese Spekulationen das Wort jenes Spötters Anwendung finde, wonach Philosophie der systematische Mifsbrauch einer eigens zu diesem Zwecke erfundenen Terminologie sei.

Digitized by Google

Auf der anderen Seite darf nicht übersehen werden, dafs die mathematische Behandlung das Raumproblem weder erschöpft noch erschöpfen kann. Dafs sie vielmehr einer Ergänzung fähig und bedürftig ist, zeigen die physiologisch-psychologischen Untersuchungen über das Raumproblem, die bezeichnender Weise derselbe Forscher inauguriert hat, der gleichzeitig mit Riemann *die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, behandelte, nämlich Helmholtz (Physiologische Optik. Die Thatsachen in der Wahrnehmung).

Der Zusammenhang dieser Untersuchungen mit denen der Mathematiker läfst sich etwa so herstellen. Die mathematische Behandlung des Raumproblems ist, wie schon Lambert hervorgehoben hat, wesentlich eine logische. Den Ausgangspunkt bildet ein System von Axiomen, d. h. es wird postuliert, dafs zwischen den Elementen eines Systems von Dingen gewisse Beziehungen bestehen sollen, dafs z. B. durch zwei „Punkte" stets eine „gerade Linie" bestimmt sei. Dann ist zu zeigen, dafs diese Axiome von einander unabhängig sind und sich nicht widersprechen; vorausgesetzt werden dabei die Gesetze der reinen Logik und aufserdem die Anwendbarkeit der rein logisch zu begründenden Arithmetik auf die betrachteten Dinge. Die Bedeutung der Dinge, die in den Axiomen vorkommen, „Punkt", „gerade Linie" u. s. w., ist bei dieser Untersuchung durchaus gleichgültig, und an und für sich würde eine ähnliche Diskussion für jedes vorgelegte System von Axiomen durchgeführt werden können. Damit jedoch die betrachteten Axiome *Axiome der Geometrie* genannt werden dürfen, müssen sie einer weiteren Forderung genügen, die nun nicht mehr rein logischer Art ist und über das Gebiet der Mathematik hinausgreift. Herr Hilbert hat diese Forderung so formuliert: Ein System von Axiomen heifst ein System von Axiomen der Geometrie, wenn es die notwendigen und hinreichenden, unter sich unabhängigen Bedingungen angiebt, denen man ein System von Dingen unterwerfen mufs, damit jeder Eigenschaft dieser Dinge eine geometrische Thatsache entspreche und umgekehrt, damit also diese Dinge, in dem Sinne von Hertz, ein vollständiges und einfaches Bild der geometrischen Wirklichkeit seien. Dabei bedarf der Sinn der Worte: *geometrische Thatsache, geometrische Wirklichkeit* einer genaueren Analyse, die jedoch die Mathematik nicht geben kann, die zu liefern vielmehr Sache der physiologisch-psychologischen Untersuchung des Raumproblems sein mufs. An Untersuchungen hierüber fehlt es keineswegs. Es möge genügen, die Namen Hering, Lipps, Stumpf und Wundt zu nennen und auf die Mach-Avenarius'sche Schule hinzuweisen. Alle Wissenschaft, so argumentiert diese etwa, auch Geometrie und Mechanik, habe ihren Ausgangspunkt in den einheitlichen Lebensäufserungen des primitiven Menschen, und erst allmählich habe sich die Absonderung in getrennte Wissenszusammenhänge vollzogen. Hieraus entspringe die Hoffnung, dafs es gelingen könne, die prinzipiellen Schwierigkeiten in Geometrie und Mechanik dadurch zu beseitigen, dafs unter Herauslösung der überall versteckt liegenden metaphysischen Konstruktionen die einfachen physiologisch-psychologischen Ursprünge dieser Wissenschaften wieder aufgedeckt werden. Die Durchführung dieses, wie es scheint, gesunden Grundgedankens wird freilich noch viel Arbeit erfordern.

Wie schon erwähnt wurde, hat Herr Russell die erkenntnistheoretisch-metaphysische Seite des Raumproblems in den Vordergrund der Betrachtung

Digitized by Google

gestellt. Auf die physiologisch-psychologischen Seite ist er gar nicht eingegangen, sodafs sein Werk sowohl in mathematischer wie in philosophischer Beziehung wesentliche Lücken aufweist und den Anforderungen, die man bei dem gegenwärtigen Stande der Forschung zu stellen berechtigt ist, nicht entspricht.

Kiel. PAUL STÄCKEL.

Wilhelm Wundt. Gustav Theodor Fechner. Rede zur Feier seines hundertjährigen Geburtstages gehalten. Mit Beilagen und einer Abbildung des Fechner-Denkmals. Leipzig, Wilh. Engelmann, 1901. VI u. 92 S. gr. 8°.

Die in einer öffentlichen Sitzung der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am 11. Mai 1901 gehaltene formvollendete und gedankenreiche Rede zur Feier des hundertjährigen Geburtstages Fechners (19. April 1801 bis 18. November 1887) schildert kurz die Entwickelung seiner Persönlichkeit und verweilt dann länger bei der Vorführung seiner philosophischen Leistungen. Der hierzu in hervorragender Weise geeignete Festredner entwirft ein anschauliches Bild vom Schaffen des originalen Denkers und fafst die Bedeutung seines philosophischen Systems als einer höheren Stufe der Schellingschen Naturphilosophie am Schlusse in die Worte zusammen: „Gründlich geschult in der indessen reifer gewordenen Naturforschung seiner Zeit, hat er ein Weltbild entworfen, das freilich eine philosophische Dichtung blieb, in dem aber die verworrenen Ideen jener Naturphilosophie in einer abgeklärten, wissenschaftlicheren Gestalt wiederkehrten, während ihr Urheber zugleich bei der Ausführung seiner Lebensaufgabe den positiven Wissenschaften eine Fülle neuer Anschauungen und Anregungen zuführte. Dieser Mann war Gustav Theodor Fechner, der Erneuerer und Vollender der romantischen Naturphilosophie des neunzehnten Jahrhunderts."

Die Beilagen enthalten dasjenige, was zur Aufnahme in die Rede selbst nicht geeignet schien, was aber die in ihr gegebene Schilderung der Persönlichkeit Fechners und seiner Philosophie zu ergänzen geeignet ist.

Der stillen und anspruchslosen Gelehrtennatur des liebenswürdigen Leipziger Physikers und Philosophen ist in der vorliegenden Schrift ein dauerndes Denkmal gesetzt worden.

Berlin. E. LAMPE.

Otto Hölder. Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung gehalten am 22. Juli 1899. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. Leipzig, B. G. Teubner, 1900. 75 S. gr. 8°.

Die Rede behandelt (S. 1—23) die Frage nach der Art und Weise, wie in der Geometrie Erkenntnisse gewonnen werden, in einer für einen gröfseren Hörerkreis berechneten, höchst ansprechenden Form und berührt dabei die in Betracht zu ziehenden erkenntnistheoretischen Fragen. Die Anmerkungen und Zusätze (S. 24—73) geben dann weitere Begründungen und Ausführungen nebst reichlichen litterarischen Belegen. Mit der Hilbertschen Festschrift über die Grundlagen der Geometrie verglichen, die kurz vor der Entstehung der gegenwärtigen Rede erschienen ist, kann die vor-

Digitized by Google

liegende Veröffentlichung etwa als ein wertvoller philosophischer Kommentar jener streng zergliedernden Untersuchungen mit ihren positiven mathematischen Ergebnissen bezeichnet werden.

Der Gedankengang der Rede zielt darauf ab, dafs die sogenannte Anschauung in ihre aus der Erfahrung stammenden Elemente aufzulösen ist, steht also, wenn man überhaupt den hergebrachten Ausdruck anwenden darf, auf empirischem Boden. „Dadurch dafs man alle anschaulichen Voraussetzungen besonders formuliert, kann man die geometrische Deduktion selbst der Anschauung entkleiden. Bezeichnet man die geometrischen Elemente und die Operationen durch Symbole und durch Aneinanderreihen von Symbolen, so kann man in einfacheren Fällen die geometrische Deduktion vollständig in einen mit Symbolen ausgeführten Kalkul auflösen.“ Die Frage, wie der Geometer deduktiv zu Werke geht, welche Voraussetzungen benutzt werden, wie aus diesen Voraussetzungen andere Erkenntnisse durch eine Reihe kleiner und sicherer Schritte abgeleitet werden, also die geometrische Deduktion selbst wird vom Redner sorgfältig in einigen Beispielen untersucht. Als eigentümlich für die Schlufsweise der Geometrie und der Mechanik wird „eine Art von Experiment“ bezeichnet, auf Grund dessen wir schliefslich voraussagen, wie die Messungen ausfallen müfsten, die wir an einer genau ausgeführten Zeichnung oder an einem Modell vornehmen könnten. Wir haben also ein Gedankenexperiment an Stelle eines Realexperimentes gesetzt, und darin besteht die Deduktion. Nach Beleuchtung dieser allgemeinen Sätze durch Beispiele aus der Geometrie und aus der Mechanik kehrt der Verfasser am Schlusse zur allgemeinen Betrachtung zurück. „Dieses Verhalten der Deduktion besteht aus Schlüssen von ganz eigenartiger Form. Die mathematischen Wissenschaften haben also in der That eine besondere Methode. Die Besonderheit beruht im Gegenstand, der lange Reihen von Denkoperationen in gewissen charakteristischen Reihen vorzunehmen gestattet, so dafs dadurch besondere Schlufsformen entstehen. In diesem Sinne kann man also sagen, dafs die Mathematik und die exakten Wissenschaften ihre eigene Logik haben.“

Die leicht lesbare, gedankenreiche Schrift mit ihrem aktuellen Inhalte sei allen Freunden philosophischer Betrachtungen auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften warm empfohlen.

Berlin. E. Lampe.

J. Sachs. Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie. Erster Teil. Stuttgart 1900, Julius Maier. 220 S.

Der vorliegende Teil des Lehrbuches bringt die ersten Anfangsgründe der synthetischen Geometrie (Elemente und Grundgebilde, Projektivische Beziehungen, Doppelverhältnis, Prinzip der Dualität) in der breiten Ausführlichkeit und in der Form von Frage und Antwort, die der Kleyerschen Sammlung bekanntlich eigentümlich sind. Jedem rein geometrischen Kapitel folgt die Erörterung der Mafsbeziehungen desselben Gegenstandes. Fragen und Aufgaben im engen Anschlufs an den Lehrgang sind in grofser Zahl beigefügt.

Berlin. C. Faerber.

Digitized by Google

Močniks Geometrische Formenlehre und Anfangsgründe der Geometrie für Realschulen. Bearbeitet von Johann Spielmann. 18. geänderte Aufl. Wien und Prag 1900, F. Tempsky.

Die neue, von Herrn Spielmann besorgte Auflage dieses für österreichische Realschulen bestimmten und deshalb den österreichischen Lehrplänen entsprechenden Buches, will den Anforderungen gerecht werden, die man in neuerer Zeit in pädagogischer Hinsicht an die Darstellung der Elemente der Geometrie zu stellen pflegt. Das Lehrbuch beginnt (entsprechend dem augenblicklich für die preufsischen Schulen vorgeschriebenen Lehrplan) mit einer besonderen Formenlehre und enthält das planimetrische und stereometrische Pensum bis zur Untersekunda inkl. Überall herrscht die Tendenz vor, die Figuren nicht als starre Gebilde, sondern als bewegliche Gestalten zu betrachten; von vorn herein wird axiale und zentrale Symmetrie stark betont und bei den Beweisen mehr Gewicht auf Anschaulichkeit als auf logische Strenge gelegt.

Berlin. ——— C. Faerber.

A. Moroff. Die Schul-Algebra als niederste Analysis. Bamberg 1900, Gärtner.

In der Meinung dafs der algebraische Unterricht auf unsern Schulen sehr reformbedürftig sei, kündigt der Verf. eine „Revolution" der Schul-Algebra an. Trotz eifrigen Suchens habe ich aber in der Abhandlung nichts wesentlich Neues, weder in wissenschaftlicher noch in pädagogischer Beziehung, entdecken können. Die gleichzeitige Behandlung von Addition und Subtraktion, von Multiplikation und Division, die Einführung der negativen Zahlen gleich im ersten Anfange kann doch kaum als grofser Fortschritt angesehen werden. Die Darstellung unterscheidet sich von den üblichen Lehrbüchern der Algebra durch eine häufig blumenreiche, an Verständlichkeit dadurch aber nicht gewinnende Sprache, durch eine merkwürdige Wertschätzung einzelner besonderer Rechnungsoperationen (z. B. des Absonderns eines gemeinsamen Faktors), durch Vermischung von Bewiesenem und Unbewiesenem; alles in allem, ich halte den Schüler, der nach diesem Leitfaden Algebra lernen soll, nicht für beneidenswert.

Berlin. ——— C. Faerber.

F. G. Gaufs. Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Schulausgabe. Halle 1900, E. Strien.

Wem vierstellige Logarithmen genügen, dem sind die Gaufsschen Tafeln ihrer zweckmäfsigen Einrichtung und guten Ausstattung wegen durchaus zu empfehlen. Neben den üblichen Tabellen enthalten sie eine grofse Zahl mathematischer, physikalischer und chemischer Constanten. Doch dürfte statt der Sehnen-Tafel, welche neben den natürlichen Werten des Sinus wohl entbehrt werden kann, eine Tabelle für die Längen der Kreisbogen wünschenswerter gewesen sein.

Berlin. ——— C. Faerber.

Digitized by Google

R. Heger. Fünfstellige logarithmische und goniometrische Tafeln. Leipzig 1900. B. G. Teubner.

Die Tafel der gemeinen Logarithmen der natürlichen Zahlen hat die gebräuchliche Form erhalten, dagegen weicht die der Logarithmen der goniometrischen Zahlen in ihrer Anordnung von anderen Tafeln ab; dadurch, dafs diese Tafel ähnlich eingerichtet wurde wie die erste, ist erheblich an Raum gespart worden. Innerhalb gewisser Grenzen ist das Intervall in beiden Tafeln verkleinert. Es folgt eine Tafel für den Arcus und die natürlichen goniometrischen Funktionen, eine der Gaufsischen Logarithmen, der fünfstelligen Quadrate und der vierstelligen Kuben. Die nächste Tafel enthält die Werte der Funktionen $x^3 \pm x$, nach wachsendem x geordnet; sie dient zur numerischen Auflösung der Gleichung $x^3 \pm x = m$, auf welche jede kubische Gleichung reduziert werden kann. Es sei bemerkt, dafs sich eine Tafel ähnlicher Art für den irreduziblen Fall schon bei Barlow 1814 findet. Um aber auch die annähernde Auflösung von kubischen Gleichungen anderer Form, sowie von höheren algebraischen und transcendenten Gleichungen, die bei gewissen geometrischen und mechanischen Aufgaben auftreten, zu erleichtern, sind 21 kleine Tafeln angefügt; sie werden gewifs zur Belebung und Entlastung des Unterrichts an höheren Lehranstalten, für die das Tabellenwerk bestimmt ist, beitragen. Den Schlufs bildet eine Tafel für Lebensversicherungen, ferner zahlreiche geographische und physikalische Konstanten, sowie Erläuterungen. Dem Tabellenwerk, das nach einem wohldurchdachten Plane eingerichtet ist und sich auch durch die äufsere Ausstattung empfiehlt, ist eine weite Verbreitung zu wünschen.

Berlin. R. Güntsche.

K. Kraus. Grundrifs der Arithmetik für Lehrer- und Lehrerinnen-Bildungsanstalten. Wien 1900. A. Pichlers Witwe und Sohn.

Der Verfasser hat sich, der Bestimmung des Buches entsprechend, an das Organisationsstatut für österreichische Lehrer- und Lehrerinnenseminare angeschlossen, daher weicht dasselbe in seiner Anlage von anderen Lehrbüchern der Arithmetik in mehrfacher Hinsicht ab. Einen grofsen Teil des Buchs nimmt die Einführung in den Zahlbegriff, das numerische und das kaufmännische Rechnen ein; das Übungsmaterial, z. B. für Gleichungen, ist infolge dessen eingeengt. Auf wissenschaftliche Strenge macht der Grundrifs keinen Anspruch, wie z. B. die Behandlung der Wurzelsätze zeigt. Die Berührung mit anderen Unterrichtsgebieten ist anzuerkennen, doch sollten die Glieder einer Aufgabe stets in organischem Zusammenhange miteinander stehen; anzuerkennen ist ferner die Verbindung mit der Anschauung und die Einstreuung von historischen Notizen.

Berlin. R. Güntsche.

G. Mahler. Ebene Geometrie. Mit 111 Figuren. 3. Auflage. Leipzig 1900, Göschen. 158 S. Preis 0,80 M.

Auf knappem Raum wird das Wichtigste aus der elementaren Planimetrie bis zur Ausmessung des Kreises in bündiger, aber klarer Darstellung und mit sorgfältiger Auswahl des Lehr- und Übungsstoffs geboten; eine

Digitized by Google

Erweiterung des Pensums ist durch Erwähnung von Sätzen und Aufgaben aus der Lehre von den Transversalen, den Chordalen, den Brocardschen Punkten u. s. w. angedeutet. Die Begriffe zentrische und axiale Symmetrie, ebenso wie Parallelverschiebung, Umklappung und Drehung erhalten eine fundamentale Bedeutung; es sei hier besonders auf die eigenartige Behandlung der Kongruenzsätze im 6., der regelmäfsigen Vielecke im 9. und vor allem der Konstruktionsaufgaben im 16. Kapitel hingewiesen. Das Büchlein ist somit ein willkommener Beitrag zu der Richtung, welche die traditionelle euklidische Anordnung durch eine moderne Betrachtungsweise ersetzen will, doch geht es hierin nicht soweit wie z. B. Henrici u. Treutlein, sondern nimmt eine mehr vermittelnde Stellung ein. Die Ausstattung ist ansprechend, die Übersicht der Figuren durch zweifarbigen Druck wesentlich erhöht. Auch zu historischen Notizen ist Raum gefunden. Das Werkchen ist warm zu empfehlen.

Berlin. R. Güntsche.

F. Meigen. Lehrbuch der Geometrie. 2. Auflage. Hildburghausen 1900, Otto Pezoldt. Lex.-8°. IV u. 83 S. m. 159 Figuren. Preis geh. 2 M.

Das Buch gehört zu der Sammlung von technischen Lehrheften, die im obigen Verlage erschienen sind. Der Lehrgang ist der übliche und erstreckt sich bis zur Ausmessung des Kreises. Die Schärfe der Darstellung könnte an manchen Stellen erhöht werden; Ausdrucksweisen: wie „ein Würfel wird von 6 geraden Flächen begrenzt. Solche Flächen heifsen Ebenen", die Verwischung der Grenze zwischen Grundsatz und Lehrsatz, Entwickelungen wie die in der Parallelogrammlehre, die über eine Veranschaulichung der Sätze kaum hinausgehen, erregen Bedenken. Eingefügt sind 271 Aufgaben, grofsenteils rechnerischer Art, häufig der Praxis entnommen, es mag sich daher mit dem Lehrbuch immerhin an einem Technikum arbeiten lassen.

Berlin. R. Güntsche.

Siegmund Günther. A. v. Humboldt, L. v. Buch. 39. Band der Geisteshelden. Berlin 1900. Ernst Hofmann u. Co.

Dieser Band der populären Biographiensammlung schliefst sich würdig an seine Vorgänger an. In der That konnte zur Bearbeitung des Lebens eines Humboldt kaum ein Geeigneterer von dem rührigen Verlage auserlesen werden, als der Münchener Geograph, der selbst von einer erstaunlichen Vielseitigkeit einem Polyhistor am besten gerecht werden kann. Wir verkennen nicht die Schwierigkeit eines solchen Unternehmens trotz des grofsen und viel zitierten biographischen Denkmals, das der wissenschaftlichen Welt bereits vorlag. Es ist eben etwas anderes, eine volkstümliche Darstellung in engem Rahmen zu liefern, und wir meinen, dafs es vielleicht besser gewesen wäre, den ganzen Raum des Buches dem einen Manne zu widmen, oder den Umfang noch weiter zu ziehen, wie bei andern Lebensbeschreibungen der Sammlung. Bei der engen Begrenzung war wohl eine gröfsere Beschränkung im Stoff geboten. Manches hätte ausgeschlossen werden, dann hätte einzelnes weiter ausgeführt werden können; und wir denken hier vor

Digitized by Google

allem an den Kampf des Plutonismus und des Neptunismus, der sich bei Humboldt wie bei Buch gleich wichtig zeigt. Hier war es sicher nötig, das Wesentliche voranzuschicken, die Ansichten des berühmten Lehrers beider, A. G. Werners, voranzustellen und zu zeigen, wie die auf Reisen gesammelten Erfahrungen schliefslich zum Siege der plutonischen Ideen führten. So müssen wir bis zur 234. von 271 Seiten warten, um wenigstens in Kürze über die entscheidenden Thatsachen belehrt zu werden. Immerhin werden die mit den Grundlagen der dynamischen Geologie vertrauten Leser durch die Lektüre des Buches sich leicht über die Bedeutung dieser Geisteshelden informieren.

Charlottenburg. ———— H. Samter.

Heussi. Leitfaden der Physik. 15. Auflage. 134 S. Berlin 1901, O. Salle.

Ein physikalisches Lehrbuch, das die 15. Auflage erlebt, mufs grofse Vorzüge haben. Ich kann mir wohl vorstellen, dafs ein eifriger Schüler gerade dieses Buch zu seinen Lieblingsbüchern zählt; macht es ihn doch durch seine anschauliche, unterhaltende Methode, ich möchte fast sagen spielend, ohne langweilige Definitionen und Rechnungen mit den interessanten Erscheinungen der Physik bekannt; und Lust und Liebe zur Sache zu erwecken ist die Vorbedingung eines gedeihlichen Unterrichts. Aber lassen sich diese unbestreitbaren Vorzüge nicht vereinen mit einer anderen Forderung, welche wir Lehrer hauptsächlich an ein Schulbuch stellen müssen: Klarheit der Grundbegriffe und Korrektheit des Ausdrucks? In dieser Beziehung läfst das Buch noch manches zu wünschen übrig. Es wird genügen, einige Proben anzuführen. Wir lesen p. 19: „Wirken mehrere Kräfte in derselben Richtung auf einen Körper, so bewegt sich der Körper mit einer Geschwindigkeit, die gleich der Summe der Kräfte ist.“ p. 69: „Die Verwandlung des Eises in Wasser bedingt die räumliche Entfernung der Massenteile von einander, also eine Bewegung der Massen; die Fortbewegung träger Massen erfordert Kraft, um diese Arbeit zu leisten. Schmelzung besteht also in einer Arbeitsleistung von seiten der Wärme“ u. s. w. p. 129: „Um diesen Widerstand (1 Ohm) zu überwinden, ist eine bestimmte Elektrizitätsmenge notwendig.“

Berlin. ———— F. Bremer.

Kraus und Böttger. Grundrifs der Physik für Lehrer- und Lehrerinnen-Seminare und verwandte Lehranstalten. 344 S. Leipzig 1901, A. Pichlers Wtw. u. Sohn.

Das Buch enthält diejenigen Lehren der Physik, welche man in einem ersten Kursus vorzutragen pflegt, also etwa das Pensum unserer Realschulen, in grofser Ausführlichkeit und mit bemerkenswerter Korrektheit des Ausdrucks, obwohl, dem Zweck des Buches entsprechend, alle mathematischen Formeln ängstlich vermieden sind. Das Hervorheben des Wichtigsten durch den Druck und die Einteilung in gröfsere Abschnitte sind vom pädagogischen Standpunkte aus wertvolle Eigenschaften, selbst da wo Pedanterie vielleicht Verstöfse gegen die Logik erblicken könnte. Besonders schätzenswert ist

Digitized by Google

an dem Buche die reichhaltige Zusammenstellung von Übungsfragen, von Beobachtungen in freier Natur, von Schülerversuchen und von einfachen, leicht herstellbaren Apparaten. Auf die historische Entwickelung der Physik ist ohne Übertreibung gebührende Rücksicht genommen, bei allen Fremdwörtern ist die Herleitung aus dem Lateinischen oder Griechischen angegeben. Etwas sonderbar mutet es allerdings an zu lesen: horízo = ich begrenze oder mechané = Werkzeug. Wäre es nicht angemessener zu schreiben: ὁρίζω (horízo) = ich begrenze und μηχανή (mechané) = Werkzeug?

Berlin. F. Bremer.

Smoliks Elemente der darstellenden Geometrie. Ein Lehrbuch für Oberrealschulen, bearbeitet von Heller; Wien und Prag, Tempsky und Leipzig, Freytag. 2. Auflage, 1900. 8°, VII + 304 S.

„Eine Ebene ist bekanntlich eine Fläche, in welcher sich nach allen Richtungen hin gerade Linien ziehen lassen. Wenn man also zwei beliebige Punkte einer Ebene durch eine Gerade verbindet, so mufs diese ihrer ganzen Länge nach in der Ebene enthalten sein. Man kann sich daher (!) die Ebene durch die nach einem bestimmten Gesetze fortschreitende Bewegung einer geraden Linie entstanden denken“ (§ 22). Diese sehr allgemeine Folgerung aus der Definition ist doch ganz unmöglich. Der Verfasser fährt fort: „Bewegt sich eine Gerade derart, dafs sie eine zweite, feste Gerade fortwährend schneidet und entweder stets parallel bleibt zu ihrer ursprünglichen Lage oder stets durch einen festen Punkt geht, so erzeugt sie eine Ebene.“ Der Leser mufs also schliefsen: Da eine sich nach einem bestimmten Gesetze fortbewegende Gerade eine Ebene beschreibt, so erzeugt auch jede nach einem der beiden angegebenen Gesetze fortschreitende Gerade eine Ebene. Es hätte doch natürlich gezeigt werden müssen, dafs die so erzeugte Fläche der anfangs aufgestellten Definition der Ebene genügt. — In § 51 heifst es: „Die unendlich kleinen (also nicht mehr zerlegbaren Teilchen) einer krummen Linie nennt man ihre Elemente. Sie können als unendlich kleine Strecken, die zwischen zwei unmittelbar auf einander folgenden Lagen des die Linie erzeugenden Punktes liegen, aufgefafst werden.“ Jeder Teil einer Linie, mag er auch noch so klein sein, bleibt noch zerlegbar. Unzerlegbare Elemente einer Linie giebt es nicht, ja sie sind sogar undenkbar. Unzerlegbar ist nur der Punkt. Das Unendlich-Kleine ist ein Grenzbegriff. — In § 53 ist der um den einen Brennpunkt f_1 der Ellipse mit dem Radius $2a$ geschlagene Kreis richtig als der zum andern Brennpunkt f gehörige Leitkreis bezeichnet. Bei der Tangentenkonstruktion heifst dann umgekehrt der um f geschlagene Kreis zu f gehörig. Dasselbe wiederholt sich im Abschnitt über die Hyperbel. Der Unkundige wird dadurch leicht verwirrt werden. In § 82 sind in den Figuren und im Text die Punkte im Raume und ihre Projektionen auf die Zeichenebene mit demselben Buchstaben bezeichnet.

Diese und einige ähnliche Einwendungen und Ausstellungen richten sich gegen Abschnitte des Buches, die zum grofsen Teil ebensogut hätten wegbleiben können. Denn es ist doch wohl anzunehmen, dafs jedem, der sich mit darstellender Geometrie beschäftigt, die Elemente der Stereometrie und wohl auch der Koordinatengeometrie bekannt sein werden.

Digitized by Google

Die Behandlung der darstellenden Geometrie selbst ist durchweg eine klare und leicht verständliche. Eine grofse Anzahl vorzüglicher Figuren im Text erleichtert das Studium der gelösten Aufgaben, fördert die Raumanschauung und leitet zum selbständigen Entwerfen der in den zahlreichen Übungsaufgaben geforderten Zeichnungen an. Das Buch ist in drei Hauptteile zerlegt. Im ersten wird die Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen auf *einer* Projektionsebene, dann auf zwei zu einander senkrechten (Grundrifs und Aufrifs) und endlich auf drei Ebenen (Kreuzrifs) gelehrt, ferner die Darstellung ebener Polygone und des Kreises und ihres Schattens. Es wird überall die orthogonale Parallelprojektion angewandt, ebenso in den beiden andern Teilen des Buches. Der zweite Teil behandelt die Darstellung gerader und schiefer Prismen und Pyramiden und der regelmäfsigen Polyeder im Grundrifs und Aufrifs, die Konstruktion ihres Schattens, ihrer Schnitte mit Ebenen und mit einander. Im dritten Teil werden dieselben Aufgaben für Cylinder, Kegel und Kugel gelöst. In einem Anhange ist eine knappe Darlegung der Zentralprojektion und der perspektivischen Darstellung geradliniger Figuren, des Kreises und der oben genannten Körper gegeben. — Von der geometrischen Verwandtschaft der Figuren (Affinität, Kollineation) ist nur nebenbei Gebrauch gemacht. Überhaupt sind die zur Verwendung kommenden Hilfsmittel so einfach und die Lösungen der Aufgaben so eingehend beschrieben — in einzelnen Abschnitten sogar überflüssig breit —, dafs das Buch nicht nur auf Oberrealschulen brauchbar ist, sondern das Studium der meisten Kapitel auch tüchtigeren Primanern anderer höherer Lehranstalten ohne grofse Mühe möglich sein und viel Anregung bieten wird. Auch den jüngeren Studierenden der Hochschulen, die sich mit der darstellenden Geometrie erst bekannt machen wollen, ist die Benutzung des Buches warm zu empfehlen. — Vermifst habe ich ein Druckfehlerverzeichnis. Es ist wegen einer Anzahl störender Druckfehler, die dem weniger Geübten das Verständnis erschweren, notwendig.

Grofs-Lichterfelde. Edm. Schulze.

Gino Loria. Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro III. **Il substrato matematico della Filosofia naturale dei Greci.** Modena 1900 coi tipi della società tipografica, antica tipografia soliani. 138 p. Estratto del Vol. XII, Ser. II delle Memorie della R. Accademica di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Sezione di Scienze, pag. 3—138.

Das I. Buch ist 1893 (Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 39, Hist. litter. Abtlg. S. 184—185), das II. Buch 1895 (Bd. 40, S. 218—219) erschienen. Für die Ausarbeitung des III. Buches hat der Herr Verfasser sich, wie das Erscheinungsjahr erkennen läfst, eine längere Frist gegönnt. Heute liegt es gedruckt vor uns. Als Inhalt bezeichnet Hr. Loria die Darstellung solcher mathematischen Lehren, welche in näherer oder entfernterer Verbindung mit der Mechanik des Himmels stehen, und wenn man die entferntere Verbindung weit genug ausdehnt, kann man sich mit dieser Begriffsbestimmung auch einverstanden erklären, die im Grunde doch nur die Vereinigung ziemlich verschiedenartiger Gegenstände rechtfertigen soll. Thatsächlich bespricht Herr Loria nach einander die ältere griechische Astronomie, die Sphärik, die Blütezeit der Sternkunde unter Hipparch und Ptolemäus, die griechische

Digitized by Google

Optik, die Hydrostatik als Schöpfung Archimeds, die praktische Mechanik des Heron von Alexandria, die Feldmessung ebendesselben sowie seine Leistungen in der Geometrie, endlich die sonstigen griechischen Feldmesser. Man sieht aus dieser Aufzählung, dafs Herr Loria durch seine Anordnung genötigt ist, den Leser durch Jahrhunderte vorwärts und wieder rückwärts zu schleifen. Ob dadurch bei denjenigen, die nicht bereits als Wissende herantreten, ein klares Bild der Entwicklung der mathematischen Wissenschaften in Griechenland erzeugt werden kann? Wir dürfen die Frage stellen, aber nicht beantworten; das müfste einer jener Leser übernehmen, in deren Interesse wir fragen. Sei übrigens die Anordnung zu loben oder zu tadeln, auf die sorgsame Ausfeilung der einzelnen Einteilungsglieder hat sie nicht den geringsten Einfluſs ausgeübt. Überall erweist sich Herr Loria als im Besitz des sämtlichen reichhaltigen Materials, das insbesondere seit den letzten Jahrzehnten sich angehäuft hat, und wir könnten keine dahin zielende Arbeit nennen, die er nicht verwertet hätte, keine strittige Frage, die nicht bei ihm Erwähnung fände, wenn auch manchmal nur um das Eingeständnis zu machen, sie sei noch nicht spruchreif. Wir sind selbst viel zu sehr mit dieser Enthaltsamkeit einverstanden, als dafs wir sie nicht billigen sollten.

Heidelberg. ———— M. Cantor.

J. Lange. Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Übungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. 2. Auflage. Berlin 1900, H. W. Müller. 8°. 68 S.

Nach einem kurzen, vorbereitenden Abschnitt, der die im folgenden angewandten Sätze über harmonische Strahlen und Punkte enthält, werden die Kegelschnitte in der üblichen Weise durch die Brennpunkte und die Hauptachsenlänge (die Parabel durch Brennpunkt und Leitlinie) definiert und hieraus auf rein geometrischem Wege die wichtigsten Eigenschaften der Kurven, besonders ihre Gestalt, ihre Schnitte mit Sekanten, Sätze über Tangenten und Normalen u. s. w. abgeleitet. Die Benutzung der Leitkreise und der Leitlinien führt auf neue Definitionen der Kurven und auf die Darlegung ihrer Verwandtschaft unter einander, die auch aus ihrer Darstellung als Schnitte eines Kegels hervorgeht. — Die Beweise werden durchweg mit den einfachsten Mitteln geführt. Die als bekannt vorausgesetzten geometrischen Sätze müssen jedem Primaner geläufig sein. Nur die Fassung der Beweise scheint mir teilweise zu kurz. Ich möchte bezweifeln, dafs die Mehrzahl der Primaner imstande ist, aus den knappen Andeutungen über die im Beweise zur Verwendung kommenden Sätze die Reihe der notwendigen Schlufsfolgerungen immer selbständig herzustellen. Einige Figuren (z. B. 14, 15, 16, 20) würden an Anschaulichkeit gewinnen und sich leichter dem Gedächtnis einprägen, wenn die fortgelassene Kurve hineingezeichnet wäre. — In der zweiten Hälfte des Buches werden Pol und Polare, Pascalscher und Brianchonscher Satz zunächst für den Kreis und dann durch Benutzung der Kegelprojektion allgemein für Kegelschnitte behandelt, ferner eine Reihe von Sätzen über konjugierte Durchmesser gegeben und Flächenformeln abgeleitet. Der Zusammenhang mit der analytischen Behandlung der Kegelschnitte wird hergestellt, indem aus metrischen

Digitized by Google

Relationen, die auf geometrischem Wege gewonnen werden, die Gleichungen der Kegelschnitte in verschiedenen Formen abgeleitet werden. Die letzten Abschnitte führen in die Lehre von den projektivischen und involutorischen Punktreihen und ihren Beziehungen zu den Kegelschnitten kurz ein und eröffnen dadurch dem Schüler den Ausblick auf ein weites Feld späterer Studien. — 250 Aufgaben, teils Konstruktionsaufgaben, teils zu beweisende Sätze bilden den Schlufs des kleinen Leitfadens und werden jedem, der das Buch benutzt, eine willkommene Beigabe sein. Sie sind nicht nur geeignet, die Bekanntschaft mit den abgeleiteten Sätzen zu befestigen, sondern können mit dazu dienen, die Kenntnis der Eigenschaften der Kegelschnitte zu erweitern und zu vertiefen.

Grofs-Lichterfelde. EDM. SCHULZE.

Sickenberger und **Bauschinger. Kaufmännische Algebra.** Leipzig 1900, Verlag der Handels-Akademie. 8°. 131 S.

Der Titel sollte wohl besser Leitfaden der Algebra für Kaufleute heifsen. Denn eine besondere kaufmännische Algebra giebt es nicht. Das Buch enthält eine Zusammenstellung der Sätze und Formeln der elementaren Algebra, soweit sie auf den sechsstufigen Realschulen gelehrt wird, also die Grundrechnungen mit ganzen und gebrochenen Zahlen, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, einfache Reihen, Zinseszins- und Rentenrechnung, Gleichungen 1. und 2. Grades mit einer und mit mehreren Unbekannten und am Schlufs eine Tafel der vierstelligen Mantissen der Zahlen 100—999 und eine Zinsfaktorentafel. Jedem Abschnitte sind Musterbeispiele und eine gröfsere Anzahl von Übungsaufgaben angeschlossen, die möglichst Vorkommnisse des geschäftlichen Lebens berücksichtigen. Besonders die Anwendungen der Gleichungen und Proportionen auf Prozent-, Zins- und Diskontrechnung, auf Mischungs- und Teilungsrechnung, sowie die Aufgaben aus der Zinseszins- und Rentenrechnung sind zu empfehlen. — Weniger kann ich mich mit der Darstellung des theoretischen Teils einverstanden erklären. Hier war die mathematische Zeichensprache zu erklären und in möglichst einfacher und durchsichtiger Weise zu zeigen, wie die Gesetze des Rechnens aus den Definitionen und aus einander mit logischer Notwendigkeit sich ergeben. Die Lösung dieser Aufgabe scheint mir nicht durchweg geglückt zu sein. Auch die Ausdrucksweise läfst an verschiedenen Stellen zu wünschen übrig. Ich will nur einiges anführen. In § 19 heifst es: „Wenn von einem gegebenen Produkt noch ein Faktor gegeben ist, so kann man hieraus den andern bestimmen.“ In § 24: „Man verfährt dabei in folgender Form.“ Es folgt ein Beispiel der Division einer Summe durch eine andere. In § 37: „Das zweite Glied eines Verhältnisses wird häufig auf 100 gebracht; man heifst dies Prozente.“ In § 93: „.... führt gewöhnlich auf Gleichungen 4. Grades, welche allgemein nicht lösbar sind.“ Auch unnütze Fremdwörter, wie Dignand, Potenziation, Radikation, Methode der Komparation (für „Auflösung durch Gleichsetzen“), sollten bei einer etwaigen neuen Auflage des Buches vermieden werden.

Grofs-Lichterfelde. EDM. SCHULZE.

Digitized by Google

M. Dehn, Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Inaug. Diss. z. Erlangung d. Doktorwürde d. phil. Fakultät d. Univ. zu Göttingen. Leipzig 1900. B. G. Teubner. 8°. 38 S. [Abgedruckt in Math. Ann. 53].

Es war vorauszusehen, dafs die klassische Arbeit D. Hilberts „Grundlagen der Geometrie" (Festschrift z. Feier d. Enthüllung d. Gaufs-Weber-Denkmals in Göttingen, Leipzig 1899) den Anstofs zu weiteren Untersuchungen auf diesem Gebiete geben werde. Die erste dieser Art, von Hilbert selbst angeregt und durch Rat gefördert, liegt hier vor und verdient wegen der Fülle neuer ungehoffter Ergebnisse die Beachtung aller Geometer, die dem logischen Aufbau ihrer Wissenschaft Interesse entgegenbringen. Zum Verständnis dieser geistreichen Arbeit ist die Kenntnis der angeführten Hilbertschen, auf der sie fufst, unbedingt erforderlich, und es ist demnach schwierig, in wenigen Zeilen über ihren Inhalt zu berichten.

Hilbert hat (a. a. O. § 12) gezeigt, dafs eine Geometrie existiert, in der alle Axiome der gewöhnlichen Geometrie mit Ausnahme des Stetigkeitsaxioms (Axiom des Archimedes) gelten.[1]) Er nennt eine solche Geometrie eine *Nicht-Archimedische* und beweist z. B. (a. a. O. Kap. III, IV), dafs die Lehre von den Streckenproportionen und von den Flächeninhalten ebener Figuren in dieser Geometrie bestehen bleibt.

Ferner hat bekanntlich Legendre bei seinen Untersuchungen über das Parallelenaxiom (1833) die beiden wichtigen Sätze aufgestellt:

1) In einem Dreieck kann die Winkelsumme niemals gröfser als $2R$ sein.
2) Wenn in einem Dreieck die Winkelsumme $= 2R$ ist, so ist sie es in jedem Dreieck.

Der Verfasser vorliegender Arbeit hat nun untersucht, ob diese Sätze auch in einer Nicht-Archimedischen Geometrie gelten, und ist zu dem Ergebnis gelangt, dafs der zweite Satz, bei dessen Beweis Legendre ausdrücklich das Stetigkeitsaxiom benutzt (vgl. Baltzer, Elem. d. Math., 2. Bd. IV. § 2, 10), unabhängig von diesem gilt, dafs hingegen zum Beweise des *ersten* Legendreschen Satzes das Stetigkeitsaxiom unbedingt nötig ist. Zum Beweise der letzten Behauptung konstruiert Dehn eine Geometrie, die er eine *„Nicht-Legendresche"* nennt, in der alle Axiome mit Ausnahme des Euklidischen und Archimedischen gelten, und in der es durch jeden Punkt zu einer Geraden unendlich viele nichtschneidende Geraden giebt; trotzdem[2]) beträgt dann die Winkelsumme in jedem Dreieck mehr als $2R$. Der erste Legendresche Satz ist also ohne Zuhilfenahme des Stetigkeitsaxioms unbeweisbar.

Unter Voraussetzung dieses Axioms decken sich bekanntlich die drei verschiedenen Hypothesen über Existenz und Anzahl der Geraden, die durch einen Punkt gehen und eine gegebene Gerade nicht schneiden (*eine, unendlich viele, keine reelle* Nichtschneidende), mit den drei verschiedenen Hypothesen

1) G. Veronese hat in seinem Werke, Grundzüge der Geometrie, deutsch von A. Schepp, Leipzig 1894, sich ebenfalls mit dem Aufbau einer solchen Geometrie beschäftigt.

2) Dafs für den Fall der elliptischen Geometrie Legendres Beweis seines ersten Satzes die Geltung verliert, bemerkt schon Baltzer a. a. O. Anmerkung.

Digitized by Google

über die Größe der Winkelsumme im Dreieck ($= 2R, < 2R, > 2R$). Als Hauptergebnis der Dehnschen Arbeit möchte ich den Beweis dafür ansehen, daß dies nicht mehr der Fall ist in einer Nicht-Archimedischen Geometrie. In einer solchen kann z. B. das Parallelenaxiom nicht gelten und trotzdem die Winkelsumme in jedem Dreieck $2R$ betragen (*Dehns Semi-Euklidische Geometrie*). „Es ergiebt sich also, daß keiner der Sätze: Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte; die Abstandskurve ist eine Gerade etc., mit dem Parallelenaxiom als äquivalent angesehen werden kann, und daß Euklid mit der Aufstellung des Parallelenaxioms gerade das richtige traf."

Schließlich beweist Dehn noch die höchst überraschende Thatsache, dass das Analogon des ersten Legendreschen Satzes für den Fall der elliptischen Geometrie ohne Voraussetzung des Archimedischen Axioms gilt, nämlich daß in einer solchen Geometrie die Winkelsumme im Dreieck stets $> 2R$ ist.

Die Resultate seiner Untersuchungen über die Winkelsumme im Dreieck und über die Anzahl der durch einen Punkt gehenden und eine gegebene Gerade nicht schneidenden Geraden stellt der Verfasser in folgendem übersichtlichen Schema zusammen:

Die Winkelsumme im Dreieck ist:	Durch einen Punkt giebt es zu einer Geraden:		
	keine Parallele	eine Parallele	unendlich viele Parallelen
$> 2R$	Elliptische Geometrie	(Unmöglich)	Nicht-Legendresche Geometrie
$= 2R$	(Unmöglich)	Euklidische Geometrie	Semi-Euklidische Geometrie
$< 2R$	(Unmöglich)	(Unmöglich)	Hyperbolische Geometrie

Der Gedankengang der Arbeit ist in rohen Umrissen folgender. Aus einer Geometrie, in der die Axiome der Verknüpfung und Anordnung sowie für die wirklichen Punkte und Geraden die Kongruenzaxiome gelten, wird durch Auszeichnung eines Punktes O und neue Definitionen über Strecken- und Winkelkongruenz (Pseudogleichheit) eine „*Pseudogeometrie*" abgeleitet, in der dann alle Axiome der gewöhnlichen Geometrie mit Ausnahme des Archimedischen Axioms gelten. Es gelten daher in dieser Pseudogeometrie auch alle vom Archimedischen Axiom unabhängigen Sätze der Euklidischen Geometrie. Insbesondere ist die Winkelsumme in jedem Dreieck pseudogleich $2R$. Ferner folgt unmittelbar die Giltigkeit des Pascalschen Satzes vom Sechseck im Winkelraum. Mit dessen Hilfe kann aber die projektive Geometrie (unabhängig immer vom Archimedischen Axiom) begründet und endlich bewiesen werden, daß zwei (im Sinne der zugrunde gelegten Geometrie) kongruente Punktquadrupel auf zwei Geraden pseudogleiche Doppelverhältnisse bilden. Daraus erschließt Dehn den eigenartigen und für die Beweise der eben erwähnten Beziehungen grundlegenden Satz: Überträgt man auf einer durch O gelegten Geraden die Strecke OA kongruent nach AA_1, und ist dann AA_1 pseudokleiner bzw. pseudogleich oder pseudogrößer als

Digitized by Google

OA, so gilt dasselbe auch für jede andere durch O gehende Gerade und für jeden auf ihr liegenden Punkt A. Aus diesem Satze und dem obigen über die Winkelsumme im Dreieck ergiebt sich dann unmittelbar der Beweis für den zweiten Legendreschen Satz in seiner verallgemeinerten Form. Zur Konstruktion der *Nicht-Legendreschen* Geometrie geht Dehn von der eingangs erwähnten Nicht-Archimedischen Geometrie Hilberts aus, legt eine elliptische Maßbestimmung zugrunde, grenzt dann ein Gebiet ab, dessen Punkte allein als wirkliche Punkte betrachtet werden sollen, und beweist, daß für diese Geometrie alle Axiome mit Ausnahme des Euklidischen und Archimedischen gelten. Die hieraus wie oben abgeleitete Pseudogeometrie ist die Nicht-Legendresche, weil in ihr der Legendresche Satz nicht gilt.

Beim Studium der Abhandlung hatte ich an manchen Stellen den Wunsch, der Verfasser hätte uns auch einen Einblick in die Analogien gewährt, die ihn bei seinen Begriffsbildungen, z. B. bei der Aufstellung der Pseudogeometrie und Nicht-Legendreschen Geometrie, wahrscheinlich geleitet haben. Er hätte hierdurch das Verständnis seiner Arbeit bedeutend erleichtert.

Königsberg i./Pr. E. Müller.

Rufsner, Elementare Experimental-Physik für höhere Lehranstalten. Hannover. Verlag von Gebrüder Jänecke. 5 Bände. I. Mechanik fester Körper. 146 S. II. Mechanik flüssiger und gasförmiger Körper. 162 S. III. Akustik und Optik. 184 S. IV. Wärme und Reibungselektricität. 148 S. V. Magnetismus und Galvanismus. 178 S. 1901.

Dem Verfasser ist das 5 Bände umfassende Werk offenbar aus seinem Unterricht an der Königl. Gewerbe-Akademie zu Chemnitz herausgewachsen. Dafür spricht einerseits die Betonung der technischen Einzelheiten, andererseits eine Fülle von zahlenmäßig ausgeführten Übungsaufgaben. Daß letztere, soweit es anging, mit Zugrundelegung des *C-G-S*-Systems gelöst sind, kann als besonderer Vorzug des Buches angesehen werden. Auch in Bezug auf die Auswahl des Stoffes und die Benutzung der neuesten Apparate und Versuchsanordnungen steht das Werk durchaus auf der Höhe. Während so das Buch dem Schüler und auch dem vorgebildeten Lehrer zahlreiche Anregungen bietet und auch im Unterricht sicher entsprechende Erfolge zeitigt, ist andererseits die Ausdrucksweise besonders in den ersten beiden Bänden, welche die Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper behandeln, nicht immer korrekt und einwandsfrei. Ich erwähne nur folgende Stellen: Bd. I S. 73: Beim Hebel wird kinetische Energie in potentielle Energie verwandelt. Dasselbe wird S. 85 von der Rolle ausgesagt. Bd. II S. 16: Einen Körper kann man sich aus unendlich vielen Linien bestehend denken. Bd. II S. 75:

$$1 - \frac{1{,}293\ \frac{\text{kg}}{\text{cbm}}}{10\,333\ \frac{\text{kg}}{\text{qm}}} = 0{,}99987487\ \frac{1}{\text{m}}.$$

Auch die folgenden Bände sind, obwohl viel sorgfältiger gearbeitet, von Irrtümern nicht frei. Wir lesen z. B. Bd. III S. 104: Ist das Auge senk-

Digitized by Google

recht über dem Gegenstande (unter Wasser), so sieht es denselben an der richtigen Stelle. Bd. IV S. 32 lautet eine Überschrift: „Ausdehnungs-Koeffizienten der Gase bei konstantem Volumen“. Wenn auch die Berichtigung: „Druckzunahme-Koeffizient“ unmittelbar darauf folgt, so sollte nach der Meinung des Referenten eine contradictio in adjecto in einem Lehrbuch jedenfalls vermieden werden.

Mehr noch als in den vorhergehenden Bänden stellt sich der Verfasser in dem letzten Bande (Magnetismus und Galvanismus) auf einen durchaus modernen Standpunkt. Er behandelt die Begriffe: Kraftlinien, Feldstärke, magnetische Permeabilität u. s. w. im *C-G-S*-System mit Zahlenbeispielen und Tabellen. Die elektrischen Meſsinstrumente sind durch sehr übersichtliche schematische Schaltungszeichnungen erläutert; dasselbe gilt auch von den verschiedenen Typen der Dynamomaschine, besonders von der sonst recht schwer verständlichen Trommelwickelung. Von den Erfindungen der neuesten Zeit erwähne ich nur die durch Zeichnung erläuterte Nernstlampe, den Wehnelt-Unterbrecher und die Abstimmung des Empfängers auf den Sender bei der Funkentelegraphie. Der Ausdruck ist im ganzen korrekt. Von Ungenauigkeiten fiel mir auf: S. 19: „Die Isogonen gehen durch beide geographische und magnetische Pole der Erde.“ S. 90: „Je höher man die Temperatur eines Leiters werden läfst, desto mehr Licht und desto weniger Wärme erhält man.“

Berlin. F. Bremer.

Carl Friedrich Gauſs. Werke. Achter Band. Herausgegeben von der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig 1900, B. G. Teubner. 458 S. Mk. 24.

„Der vorliegende achte Band von Gauſs' Werken giebt Ergänzungen zu den drei ersten Bänden und zum vierten Bande mit Ausnahme des geodätischen Teils. Er enthält unter den Abteilungen *Arithmetik*, *Analysis* und *Numerisches Rechnen* eine Reihe einzelner Notizen und Aufsätze, die sich nachträglich in Gauſs' Nachlaſs vorgefunden haben, aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* hauptsächlich eine Anzahl Belege über die Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate; aus der *Geometrie* Notizen und Briefe, die sich auf die Grundlagen der Geometrie, die geometria situs, Lehrsätze und Aufgaben aus der elementaren Geometrie, die Verwendung komplexer Gröſsen für die Geometrie und die Theorie der krummen Flächen beziehen“.

Der Band enthält eine Fülle des Interessanten! So findet sich eine aus dem Jahre 1800 stammende Notiz über die Inversion des elliptischen Integrals erster Gattung, welche zu den interessantesten Untersuchungen gehört, welche Gauſs im Gebiet der elliptischen Funktionen angestellt hat. Nachdem Gauſs in einem vorher abgedruckten Brief an Bessel die Bedeutung der *ganzen* transcendenten Funktionen betont hat, wird hier die Funktion $f(\varphi)$, welche später von Jacobi mit $\sin\mathrm{am}\,\varphi$ bezeichnet wurde, als Quotient zweier Funktionen dargestellt, die Gauſs unzweifelhaft in ihrer Eigenschaft als *ganze* transcendente Funktionen erkannt hat. Wie früh der Gedanke der Inversion, welcher für die spätere Entwicklung der Theorie der elliptischen Funktionen so bedeutungsvoll geworden ist, bei Gauſs Wurzel gefafst hatte, dafür spricht das wichtige Ergebnis, dafs ihm bereits in den

Digitized by Google

neunziger Jahren des achtzehnten Jahrhunderts die Reihenentwicklungen für die Nullwerte der drei geraden Thetafunktionen bekannt gewesen sind.

Die Lektüre von Möbius' barycentrischem Calcul bringt Gaufs gleichzeitig mit Grafsmann auf einen Gedanken, den er wie folgt einkleidet: „Der barycentrische Calcul findet sein Gegenstück in einem andern (wesentlich noch umfassendern) Calcul, den man den Resultantencalcul nennen könnte. Sowie der erste sich mit Punkten beschäftigt, in denen man schwere Massen voraussetzt, so würde letzterer zum Gegenstande haben Linien, in welchen Kräfte wirken. Sind a, b, c, d u. s. w. solche Linien, in denen, in jeder in bestimmtem Sinn, Kräfte wirken, die den Zahlen α, β, γ, δ u. s. w. proportional sind, so würde die Gleichung

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d + \text{u. s. w.} = 0$$

bedeuten, dafs diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten". Diese Linien sind bekanntlich nichts anderes als das, was Grafsmann *Linienteile* nennt.

Überraschende Aufschlüsse bieten die Fragmente unter der Überschrift: Mutationen des Raumes. Gaufs hat sich bereits, wie später Riemann, die komplexe Variable $z = x + iy$ auf der Kugel ausgebreitet gedacht und hat gewufst, dafs sich die Drehungen der Kugel um ihren Mittelpunkt durch linear gebrochene Substitutionen von z darstellen. Er hat ferner, wie er sich ausdrückt, die „Mutationen des Raumes" d. h. die Drehungen des Raumes um den Koordinatenanfangspunkt, verbunden mit einer allgemeinen Ähnlichkeitstransformation bereits 1819 durch die vier Eulerschen Parameter ausgedrückt. Den Komplex dieser Parameter nennt Gaufs „Mutationsskala". Und er stellt auch die Formeln für die Komposition zweier Mutationsskalen auf, also für die Zusammensetzung zweier endlichen Drehungen und bemerkt ausdrücklich, dafs diese Operation nicht etwa kommutativ sei!

Berlin. E. Jahnke.

Karl Friedrich Gaufs. General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825. The Princeton University library 1902. 126 S.

Der Band bringt an erster Stelle eine englische Übersetzung der Gaufsschen Abhandlung: Disquisitiones generales circa superficies curvas aus dem Jahre 1827 sowie der Gaufsschen Selbstanzeige in den Göttinger Nachrichten. Es folgen dann eine Reihe von Anmerkungen, die zum Teil der von Herrn A. Wangerin besorgten Ausgabe in Ostwalds Klassikern entlehnt sind. Weiter enthält der Band die nachgelassene Gaufssche Arbeit aus dem Jahre 1825, welche vor kurzem im achten Bande der Gaufsschen Werke zum ersten Male veröffentlicht worden ist. Den Beschlufs bildet eine recht vollständige Bibliographie der allgemeinen Flächentheorie.

Berlin. E. Jahnke.

Felix Müller. Mathematisches Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch. 2 Teile. Leipzig 1900, 1901, B. G. Teubner. 314 S. geb. Mk. 20.

Die mathematische Welt weifs dem Herausgeber dieser mühevollen Arbeit besonderen Dank. Hatte doch die Zahl der Kunstausdrücke in unserer

Digitized by Google

Wissenschaft seit Sylvesters Vorgehen eine bedrohliche Höhe erreicht, so dafs sich der Mangel eines mathematischen Wörterbuchs mehr und mehr fühlbar machte. Der Herausgeber hatte ursprünglich ein solches geplant. Er hat es aber vorgezogen, seiner Sammlung zunächst das vorliegende zweisprachige Vokabularium zu entnehmen.

Was die Einrichtung des Buches betrifft, so bringt es nicht blos die Vokabel mit ihrer Übersetzung, sondern auch alle zusammengesetzten Kunstausdrücke, also vollständige mathematische Begriffe nebst den entsprechenden fremdsprachlichen Ausdrücken. „Dem Kunstworte sind zunächst in Klammern die den Begriff genauer bestimmenden Merkmale beigefügt. Ferner ist durch Angabe der Disziplinen, in welche die Kunstausdrücke gehören, dem Leser gleichsam schon eine vorläufige litterarische Orientierung über den ihm vielleicht gänzlich fremden Begriff gegeben; er weifs aus der bezüglichen Notiz, dafs er in einem die angegebene Disziplin behandelnden Kompendium oder Lehrbuch etwas höheres über den fraglichen Begriff zu finden erwarten darf.“ Der Wert des Werkes wird noch erhöht durch kurze historische Angaben über den Ursprung des Kunstausdruckes, nämlich über den Schöpfer des betreffenden Begriffes und die Zeit der Entstehung.

Dafs ein so umfangreiches Werk mancherlei Lücken aufweisen wird, ist selbstverständlich. Und es dürfte dem Herausgeber nur erwünscht sein, wenn recht viele Mathematiker, jeder in seinem Spezialfach, das Vokabularium auf seine Vollständigkeit hin prüfen möchten. In diesem Sinne erlaubt sich auch Referent auf einige der Kunstausdrücke hinzuweisen, welche er in dem Werk vergeblich gesucht hat, bezw. deren Identität nicht klar genug hervorgehoben ist:

Linienteil (Grafsmann 1844) = linienflüchtiger Vektor (Budde) = Stab (H. Grafsmann d. J.) = Punktvektor (Hyde) = segment;
Flächenteil (Grafsmann) = Blatt (Grafsmann d. J.) = parallélogramme;
Plangröfse (Grafsmann) = Feld (Grafsmann d. J.) = Bivektor = bivecteur;
Spat (Grafsmann) = Trivektor = trivecteur;
Ergänzung eines Vektors (Grafsmann) = complément ou index d'un vecteur;
Grafsmannsche Methode = méthode grassmannienne;
äufseres Produkt (Grafsmann) = produit extérieur ou vectoriel;
inneres „ („) = „ intérieur ou scalaire = geometrisches Produkt = produit géométrique (Resal, Somoff);
progressive Multiplikation (Grafsmann) = multiplication progressive;
regressive „ („) = „ régressive;
äufsere „ („) = „ extérieure;
innere „ („) = „ intérieure;
Bezugsdreieck = triangle de réference; Bezugstetraeder = tétraèdre de réference.

Berlin. E. Jahnke.

Francesco Brioschi. Opere matematiche. Tomo primo. Milano 1901, U. Hoepli. 416 S.

Erst drei Jahre sind seit dem Hingang Francesco Brioschis verstrichen, und schon liegt der erste Band seiner gesammelten Werke vor uns.

Digitized by Google

Diese Rührigkeit der Italiener ist für das Vaterland eines Kummer recht beschämend. Ein solches Unternehmen kann mit Sicherheit auf den Dank der mathematischen Welt rechnen, sind doch die Arbeiten des grofsen Italieners in zahlreiche Zeitschriften zerstreut.

Der vorliegende Band, der mit dem Bildnis Brioschis geschmückt ist, enthält die Arbeiten aus den Jahren 1851—1858, welche in den Annali di Scienze Matematiche e Fisiche und den Annali di Matematica pura ed applicata, der Fortsetzung der erstgenannten Zeitschrift, erschienen sind.

Berlin. E. Jahnke.

Meyer, W. Franz. Differential- und Integralrechnung, erster Band: Differentialrechnung. (Bd. X der „Sammlung Schubert"). XVIII u. 395 S. Leipzig (Göschen) 1901.

In diesem seinen neuesten Werke ist es dem hochgeachteten Verfasser gelungen, das vielbehandelte Gebiet der Elemente der höheren Mathematik in eigenartiger Weise zur Darstellung zu bringen. Dies gilt sowohl in Anbetracht der Auswahl des Stoffes, als auch der Darstellung im einzelnen. Der Geist, welcher in dem ersten vom Verfasser herausgegebenen Bande der Encyklopädie herrscht, tritt uns auch hier entgegen. Man kann ja die Differentialrechnung je nach dem Grade der Ausbildung des Lesers oder nach den Zwecken, denen die Lektüre dienen soll, in sehr verschiedener Art darstellen. Der Herr Verfasser hätte am liebsten *fünf* verschiedene Differentialrechnungen in seinem Werke dargestellt, was man bei seiner vielseitigen wissenschaftlichen Interessennahme verstehen wird. Leider aber unterblieb dieser interessante Plan, vornehmlich wohl mit Rücksicht auf buchhändlerische Interessen. So wählte der Verfasser denjenigen Eingang, welcher seinen jetzt erreichten Anschauungen am meisten entsprach: Entwicklung der Grundbegriffe auf analytischer Basis unter Zurückdrängung der geometrischen Anschauung, exakte Grundlagen und schöne Ausführungen über Grenzbegriff und Stetigkeit, kein Eingehen auf arithmetische Grundbegriffe.

Zur Charakteristik der Stoffauswahl mögen noch folgende Bemerkungen dienen. Am Anfang des Buches steht ein langes Kapitel, in dem einerseits Gegenstände der algebraischen Analysis entwickelt werden (wohl mit Rücksicht auf den Umstand, dafs der Band der „Sammlung Schubert" über algebraische Analysis noch nicht vorliegt), sowie andererseits „elementar" durchführbare Quadraturen dargestellt sind. Vielleicht werden auch diese Ausführungen bei einer späteren Neuauflage der algebraischen Analysis zugewiesen. An sich ist es ja verlockend zu zeigen, was für schöne Aufgaben man schon lösen kann, *ehe* man sich den eigentlichen Differentialalgorithmus aneignet. Aber schliefslich kommen auch bei jenen Aufgaben Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung zur Geltung, wenn auch nur in verkappter Form. Und gerade letzterer Umstand giebt der Behandlung jener Aufgaben etwas Künstliches, welches den Durchschnittsleser an dieser Stelle doch nicht zur Selbständigkeit führt. Auch die Entgegnung liegt ja nahe, dafs wenigstens dies elementar Erreichbare geleistet werden solle, da die späteren Differentiationssätze nur zu häufig bei dem Schüler allein eine mechanische und äufserliche Einübung finden. Möchte dieser Pessimismus unberechtigt sein! Möchten wir uns vielmehr zu Perrys Meinung bekennen

Digitized by Google

dafs selbst der Ingenieur (der auch heute noch leider recht häufig seine Mathematik als ein notwendiges Übel ansieht) die *Prinzipien* der höheren Analysis, und zwar diese *recht gut*, kennen soll!

Ein wenig auffällig berührt das Fehlen der geometrischen Anwendungen der Differentialrechnung auf den Verlauf der Kurven und Flächen. Diese Ausführungen gehören doch nun einmal seit lange zum eisernen Bestand der Differentialrechnung, und sie bieten zumal in Büchern, die, wie das vorliegende, stark nach der abstrakten Seite entwickelt sind, eine besonders willkommene und anregende Abwechslung. Da der Verfasser sich diese Gegenstände für den zweiten, die Integralrechnung behandelnden Band vorbehält, so liegt die Vermutung nahe, dafs hier buchhändlerische Erwägungen über Umfang und Handelswert des Bandes mitgesprochen haben. Leider hat es sich ja nun hier nicht so getroffen, dafs die Differentialrechnung da erschöpfend behandelt ist, wo der 25. Bogen des Buches zu Ende ist; und vielleicht hätten neben den eben angedeuteten kaufmännischen Erwägungen, wenn anders dieselben wirklich bestanden haben, doch auch wissenschaftliche Überlegungen zur Geltung kommen sollen.

Ein ganz besonders auszeichnender Charakter unseres Buches ist darin zu sehen, dafs dasselbe in ausführlichster Weise auf *Fehlerbetrachtungen* eingeht. Wenn in dieser Hinsicht auch hie und da des Guten etwas zu viel geschieht und der Verfasser in Gefahr erscheint, dem „Fehlerfanatismus" anheim zu fallen, so wird sich dies schon von selbst bei einer Neuauflage ausgleichen. Auch kommt das gar nicht in Betracht, wenn man bedenkt, in welch' geringem Umfange die Lehrbücher der Differentialrechnung sonst auf Fehlerbetrachtungen eingehen. Auch die Kriterien der Konvergenz der unendlichen Reihen und Produkte behandelt der Verfasser besonders reichhaltig und tiefdringend, in diesen Entwicklungen liegt sogar ein hervorragender Wert des vorliegenden Buches.

Anwendungen auf Naturwissenschaft und Technik hat der Verfasser nicht beabsichtigt, nachdem neuerdings in anderen Büchern über höhere Analysis diese Richtung besonders kultiviert ist. Für technische Hochschulen ist das Buch des Herrn Verfassers auch schon deshalb weniger geeignet, weil die Methodik desselben unter Zurückdrängung der geometrischen Anschauung mehr nach der abstrakten Seite entwickelt ist. Natürlich würde auch der Studierende der Technik aus unserem Buche vieles lernen können. Indessen stellt das Studium der Technik schon gerade Anforderungen genug; und die unentbehrliche Mathematik mufs demnach dem jungen Techniker so übermittelt werden, wie er sie unmittelbar für seine weitergehenden Zwecke gebrauchen kann.

Um so mehr erscheint Herrn F. Meyers Werk für die Studierenden der Mathematik im engeren Sinne geeignet. Es ist dem Verfasser gelungen, eine für diesen Zweck wertvolle und durch zahlreiche eigenartige Züge ausgezeichnete Darstellung der Differentialrechnung zu liefern.

Braunschweig. R. Fricke.

Digitized by Google

Forsyth, Theory of differential equations. Part II. Ordinary equations, not linear. Vol. II. Cambridge 1900. XI u. 344 S. Vol. III. Cambridge 1900. X u. 391 S.

Das vorliegende Werk ist die Fortsetzung des unter gleichem Haupttitel 1890 erschienenen Part I, Exact Equations and Pfaff's Problem (s. das Referat in der Zeitschr. f. Math. u. Phys. Bd. 36. 1891. Hist.-lit. Abt. S. 190 ff.)

Der Titel charakterisiert schon in sehr zutreffender Weise den Inhalt des gediegenen und umfangreichen Werkes. Es handelt sich um *gewöhnliche,* nicht um partielle Differentialgleichungen; von den gewöhnlichen sind aber wiederum die linearen noch für einen späteren besonderen Teil zurückbehalten. Es handelt sich um die *Theorie* der Differentialgleichungen, nicht um die einzelnen Integrationsmethoden in speziellen Fällen, freilich auch nicht um ihre Zusammenfassung nach Lie. Den Gegenstand bildet also die funktionentheoretische Untersuchung der gewöhnlichen Differentialgleichungen und Differentialgleichungssysteme mit Rücksicht auf die verschiedenen Arten von nicht regulären Stellen und das Verhalten der Integrale daselbst, wie sie durch die Folge der Namen Cauchy, Briot und Bouquet, Fuchs, Poincaré, Picard, Painlevé gekennzeichnet wird, denen wir den Namen von Forsyth selbst hinzufügen dürfen. Auf einige Theorien, die mit Rücksicht auf den Umfang des Werkes innerhalb dieses Rahmens noch fehlen, weist der Verfasser in einer Schlufsbemerkung von Bd. III selbst hin. Abgesehen davon wird der Gegenstand in den angegebenen Grenzen mit grofser Gründlichkeit und Vollständigkeit behandelt, unter Verwertung der bis in die neueste Zeit verfolgten und vom Verfasser selbst vielfach ergänzten Forschung. Die Darstellung ist klar und fafslich, und eine grofse Zahl charakteristischer Beispiele erleichtert in höchst dankenswerter Weise das Verständnis der zum Teil sehr schwierigen Fragen. Sehr zu billigen ist es endlich vom pädagogischen Standpunkt und im Interesse eines jeden Lesers, dafs Probleme, die sich auf mehr als eine abhängige Variable beziehen, stets nur an dem Falle *zweier* Variablen durchgeführt werden, wenn der ganz allgemeine Fall keine neuen prinzipiellen Schwierigkeiten birgt.

Band II beschränkt sich auf Betrachtung *einer* Differentialgleichung *erster* Ordnung, Band III behandelt *Systeme* von Differentialgleichungen *erster* Ordnung und Differentialgleichungen *höherer als erster* Ordnung. Der Inhalt im einzelnen möge nachstehend in titularischer Kürze angegeben werden.

Band II: *Normalformen* von Differentialgleichungen und Systemen. — *Existenz der Integrale.* — Klassen „nicht ordinärer" Punkte, die mit der Form der *Differentialgleichung erster Ordnung und* (in der Ableitung) *ersten Grades* verknüpft sind: aufserwesentliche (accidental) und wesentliche (essential) Singularitäten, deren erstere wieder in zwei Arten zerfallen; — Einflufs der verschiedenartigen singulären Stellen auf die Integrale. — *Differentialgleichungen erster Ordnung und beliebigen Grades:* Verzweigungspunkte, die durch die Differentialgleichung selbst bestimmt sind (feste); — singuläre Lösungen; — Differentialgleichungen, deren Integrale keine verschiebbaren (parametric) Verzweigungspunkte haben; Resultate von Fuchs, Poincaré, Picard, Wallenberg; — Differentialgleichungen mit eindeutigen und solche mit algebraischen Integralen.

Digitized by Google

Band III: *Differentialgleichungssysteme erster Ordnung*, vorzugsweise mit zwei abhängigen Variabeln, wo die *Ableitungen eindeutige Funktionen der Variabeln* sind. — Reduzierte Formen solcher Systeme; — singuläre Wertsysteme der Variabeln; — Integrale der reduzierten Formen. — Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung, wo die *Ableitungen mehrdeutige Funktionen der Variabeln* sind. — Singuläre Lösungen. — Differentialgleichungen *zweiter Ordnung* und *ersten Grades*. — Differentialgleichungen *zweiter* Ordnung und *beliebigen* Grades. — Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit scheinbar eindeutigen (sub-uniform) Integralen.

Das besonders ausführliche und viel Originelles enthaltende *Schlufskapitel* endlich stellt — von dem übrigen Inhalt des Werkes etwas isoliert — eine Art von Anhang dar. Gewissermafsen zum Ersatz dafür, dafs bei Differentialgleichungen höherer Ordnung oder Differentialgleichungssystemen die Frage nach den algebraischen Integralen nicht allgemein behandelt wurde, und zugleich als schöne Anwendung der Differentialgleichungstheorie wird hier das n-Körper-Problem entwickelt und in dem Brunsschen Theorem ein glücklicher Abschlufs des Ganzen gefunden.

Bonn, Juli 1901. L. Heffter.

Ernesto Cesàro. Vorlesungen über Natürliche Geometrie[1]) (Lezioni di geometria intrinseca). Autorisierte deutsche Ausgabe von Gerhard Kowalewski. 48 Fig. 341 Seiten. 8°. Leipzig, B. G. Teubner. 1901. Geb. Mk. 12.

Die deutsche Sprache besitzt keinen Ausdruck, der den Inhalt des italienischen „intrinseco" vollständig wiederzugeben vermag. Die in Lexiken angegebene Verdeutschung „innerlich" ist für die hier in Frage kommende Verbindung „Geometria intrinseca" nicht anwendbar und wäre treffend höchstens durch einen umständlichen Passus, etwa „auf das innere Wesen der Sache gehend", zu umschreiben. Die vom Herausgeber (wie auch von Herrn Lukat in der Übersetzung von Bianchis „Lezioni di geometria differenziale") gebrauchte Bezeichnung „natürlich" ist ein Notbehelf, wird aber dem Sinne im grofsen und ganzen gerecht. Ich weifs jedenfalls nichts Besseres anzugeben, möchte aber gleich zu Anfang bemerken, dafs der von Herrn Cesàro betretene Weg geometrischer Untersuchungen durchaus nicht der für den Anfänger empfehlenswerte „natürliche" ist. Der Leser des vorliegenden Werkes wird vielmehr gründliche Kenntnisse der Kurven- und Flächentheorie mitbringen müssen, wenn er in das Verständnis desselben erfolgreich eindringen will.

1) *Kapitelübersicht:* I. Natürliche Diskussion der ebenen Kurven. — II. Fundamentalformeln für die nat. Analysis der ebenen Kurven. — III. Bemerkenswerte ebene Kurven. — IV. Berührung und Oskulation. — V. Die Rollkurven — VI. Die Schwerpunkte. — VII. Barycentrische Analysis. — VIII. Scharen ebener Kurven. — IX. Gewundene Kurven und Regelflächen. — X. Bemerkenswerte gewundene Kurven. — XI. Allgemeine Theorie der Flächen. — XII. Übungen über die Flächen. — XIII. Infinitesimale Deformation der Flächen. — XIV. Die Kongruenzen. — XV. Die dreidimensionalen Räume. — XVI. Kurven in Überräumen. — XVII. Überräume. — XVIII. Verschiedene Bemerkungen (Über die Anwendung der Grafsmannschen Zahlen. — Über das Gleichgewicht biegsamer und unausdehnbarer Fäden. — Über die Elastizitätsgleichungen in Überräumen.).

Digitized by Google

„Das Wesen dieser Geometrie", sagt der Herausgeber in seinem Vorwort, „kurz und erschöpfend zu charakterisieren ist schwer. Negativ läfst sich darüber sagen, dafs diese Geometrie fremdartige Elemente, wie sie in der gewöhnlichen analytischen Geometrie die Wahl eines bestimmten Coordinatensystems in die Untersuchung hereinbringt, zu vermeiden sucht."

Mit Recht wird *nicht* behauptet, dafs das „natürliche" Verfahren im Sinne Cesàros diese fremdartigen Elemente wirklich vermiede. Vielmehr erfährt deren Anwendung nur eine prinzipielle Einschränkung. Um diese besser darstellen zu können, wollen wir die „natürliche Methode" mit den klassischen der Differentialgeometrie vergleichen, wobei wir unter Übergehung der ebenen sogleich die räumlichen Formen betrachten. Welche Modifikationen für die Ebene eintreten, dürfte ohne weiteres zu übersehen sein, so dafs ich speziell auszuführende Beispiele der ebenen Geometrie entnehmen kann.

Bei dem klassischen Verfahren denkt man sich einen Punkt P durch seine Koordinaten x, y, z inbezug auf ein festes orthogonales Cartesisches Koordinatensystem dargestellt; in P befinde sich der Scheitel eines orthogonalen Trieders mit den Richtungskosinus X_i, Y_i, Z_i $(i = 1, 2, 3)$. Bei einer infinitesimalen Bewegung des Trieders verschiebt sich P um $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, gleichzeitig führt das Trieder drei Rotationen $\varrho_{ix} = X_i \cdot dX_x + Y_i \cdot dY_x + Z_i \cdot dZ_x$ um seine Achsen aus. (Es ist $\varrho_{ix} = -\varrho_{xi}$, $\varrho_{ii} = 0$.) *Diese Ausdrücke ds und ϱ_{ix} sind von der Lage des festen räumlichen Koordinatensystems unabhängig.* Der Übergang von den ϱ_{ix} zu den X_i vollzieht sich durch Integration des Systems

$$(1) \qquad dX_x = \sum_i \varrho_{ix} X_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

welches sich in bekannter Weise auf eine einzige totale Riccatische Differentialgleichung reduzieren läfst.[1]) Infolge der in der Kurventheorie und Flächentheorie üblichen Spezialisierungen des Trieders ergeben sich in beiden Disziplinen die x, y, z nach Ermittlung der X_i durch Quadraturen.

Bei Betrachtung einer Kurve läfst man das Trieder sich so bewegen, dafs seine Achsen Tangente, Bi- und Hauptnormale der Kurve sind. Dadurch werden die Rotationen beziehlich gleich 0, $\varkappa ds$ und τds, wo $\varkappa$ die Krümmung, τ die Torsion ist. Die Formeln (1) sind dann die sogenannten Frenetschen Formeln.

Bei Betrachtung einer Fläche wählt man als Achse mit den Cosinus X_3, Y_3, Z_3 die Flächennormale. Die beiden andern Achsen des Trieders beschreiben dann zwei orthogonale Kurvensysteme auf der Fläche, die man häufig durch die Krümmungslinien ersetzt. Während die französischen Mathematiker hauptsächlich mit den Rotationen des Trieders arbeiten, wird von Deutschen und Italienern die „zweite Fundamentalform" $dx dX_3 + dy dY_3 + dz dZ_3$ bevorzugt, wodurch die Integrabilitätsbedingungen von (1) die bekannte Codazzische Form annehmen.[2])

Unsere bisher üblichen Methoden gehen also zwar von einem festen räumlichen Koordinatensystem aus, sind aber mit ihren wesentlichen Hilfs-

1) Vgl. Darboux: Leçons de géométrie différentielle, Bd. I. Kap. I—VIII.

2) Der Zusammenhang beider Methoden ist sehr einfach, aber m. E. von den zur Zeit am meisten gelesenen Lehrbüchern nicht hinreichend betont. D. Ref.

Digitized by Google

mitteln gedanklich und formal von demselben unabhängig. Herr Cesàro nun erreicht durch seine Methoden eine *völlige Ausschaltung der festen Koordinaten* von Anfang an. Dagegen bleibt auf den Kurven als *natürliche* Koordinate die von einem *willkürlichen* Punkt aus gerechnete Bogenlänge, auf den Flächen ein *willkürliches*, zur Orientierung dienendes *orthogonales* Kurvensystem. Längs der Kurve bewegt sich auch bei Herrn Cesàro das erwähnte Fundamentaltrieder, ebenso längs der Fläche das aus der Flächennormale und den Tangenten der Koordinatenlinien gebildete Trieder.

Der charakteristische Gedanke der „natürlichen Geometrie" besteht nun darin, dafs die Punkte des Raumes durch cartesische Koordinaten x, y, z auf das bewegliche Trieder bezogen werden. Es sind daher diese x, y, z keine Konstanten, *sondern Funktionen der Orientierungskoordinaten auf dem betrachteten Gebilde.* Die Bedingungen dafür, dafs ein Punkt x, y, z eine feste Lage zu dem betrachteten Gebilde besitze, werden als *Fundamentalformeln* der natürlichen Analysis dieses Gebildes bezeichnet. Als spezielles Beispiel wollen wir die Fundamentalformeln für die *Analysis der ebenen Kurven* ableiten.

Wird ein Koordinatensystem in Richtung der x- bezw. y-Koordinate um die Strecken a, bezw. b verschoben und um den Winkel α gedreht (in demjenigen Sinne, der die X- in die Y-Achse überführt), so sind die Koordinaten x', y' des Punktes x, y inbezug auf die neue Lage der Achsen: $x' = (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha$; $y' = -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha$.

Besteht das Koordinatensystem aus Tangente (X-Achse) und Normale einer Kurve, so ist bei infinitesimaler Verschiebung: $a = ds$, $b = 0$, $\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = \frac{ds}{\varrho}$, wo ϱ der Krümmungsradius; daher wird

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\varrho} - 1, \quad \frac{dy}{ds} = -\frac{x}{\varrho}. \tag{2}$$

Dies sind die gewünschten Formeln. Analog werden die Raumkurven behandelt. Indem man deren Fundamentalformeln erweitert für den Fall, dafs zwei beliebige, zu einander senkrechte Normalen an Stelle der Haupt- und Binormale treten, erhält man fast unmittelbar die Fundamentalformeln der Flächentheorie durch Nebeneinandersetzen derer für die Koordinatenlinien. Bezüglich der Gestalt der Fundamentalformeln ist zu bemerken, dafs, wie in (2), die Ableitungen der x, y, z nach den Bogenlängen der Koordinatenlinien lineare Funktionen der x, y, z selbst sind. Die Koeffizienten dieser Funktionen sind im wesentlichen bei den Raumkurven Krümmung und Torsion, bei den Flächen Normalkrümmung, geodätische Krümmung und geodätische Torsion der Koordinatenlinien. Bei den flächentheoretischen Formeln ergeben sich noch 3 Integrabilitätsbedingungen, analog den Codazzischen; sie werden auch als „Codazzische" bezeichnet. Ich mufs sie unten mit den eigentlichen „Codazzischen" vergleichen und werde sie dann „Cesàro-Codazzische" Formeln nennen.

Analog gebildete „Unverschieblichkeitsbedingungen" werden noch benutzt beim Studium orthogonaler Systeme in der Ebene und in dreidimensionalen Räumen, bei geradlinigen Kongruenzen und Kurven in Überräumen.

In der Theorie der Kurven tritt noch ein zweiter Gedanke in den Vordergrund, der zwar nicht neu, aber doch mit solcher Konsequenz und

Digitized by Google

in solchem Umfange noch nicht angewandt worden ist. Man kann bekanntlich Torsion τ und Flexion $\varkappa$ einer Kurve beliebig als Funktionen der Bogenlänge vorschreiben. Dadurch ist die Kurve ihrer Gestalt und Gröfse nach eindeutig bestimmt. Herr Cesàro nennt daher die Gleichungen $\varkappa = \varkappa(s)$, $\tau = \tau(s)$ oder zwei mit diesen äquivalente $f(\varkappa, \tau, s) = 0$, $g(\varkappa, \tau, s) = 0$ die „natürlichen Gleichungen" der Kurve und zeigt, wie dieselben mit den Methoden der natürlichen Geometrie, d. h. ohne festes Koordinatensystem direkt entwickelt werden können.

Ich greife das einfachste Beispiel heraus: Gesucht die natürliche Gleichung des geometrischen Ortes aller Punkte, die von einem festen Punkt M den Abstand a haben.

Sind x, y die Koordinaten von M, so ist $x^2 + y^2 = a^2$. Eliminiert man hieraus und aus den Gleichungen (2) x und y, so folgt $\varrho = a$. (Ist umgekehrt $\varrho = \text{const}$, so zeigen die Unverschieblichkeitsbedingungen, dafs der Punkt $x = 0$, $y = \varrho$ eine feste Lage hat.)

Ein weiteres, sehr einfaches Beispiel mag einen speziellen Vorzug der natürlichen Gleichung veranschaulichen:

Wenn man aus der natürlichen Gleichung der Cykloide $(\varrho^2 + s^2 = a^2)$ nach den Methoden des Verfassers die ihrer Evolute bildet, so erhält man wieder dieselbe Gleichung. Bei der üblichen Darstellung in unseren Lehrbüchern ist der Nachweis, dafs die Evolute der Cykloide eine kongruente Cykloide ist, an eine Koordinatentransformation gebunden, die, so einfach und naheliegend sie ist, doch den Charakter eines Kunstgriffs trägt. Dafür liefert sie allerdings den nötigen Aufschlufs über die Lage der Evolute, die in der natürlichen Geometrie eine gesonderte Betrachtung beansprucht.

Zu beachten ist noch, dafs zu einer Kurve unendlich viele natürliche Gleichungen gehören, da man die Bogenlänge von einem beliebigen Punkt aus rechnen kann. Es wäre daher noch „natürlicher", die Kurve durch ein Gleichungssystem $ds = f(\varkappa)d\varkappa$, $g(\varkappa, \tau) = 0$ oder $\varkappa = \varkappa(t)$, $\tau = \tau(t)$, $ds = \sigma(t)dt$ zu charakterisieren.

Ferner ist bemerkenswert, dafs die natürlichen Gleichungen dem Charakter der Kurven oft wenig gerecht werden. Die der Kegelschnitte enthalten elliptische Integrale[1]), dagegen läfst die oben angeführte Gleichung der Cykloide den periodischen Charakter der Kurve nicht erkennen, weil sie über die Spitze hinaus nur analytisch fortgesetzt werden kann, indem die Bogenlänge das Zeichen wechselt. Die Behandlung dieser und ähnlicher Fragen läfst an Gründlichkeit zu wünschen übrig.

In der Flächentheorie gibt es kein Analogon zu den natürlichen Gleichungen. Denn die in den Fundamentalformeln auftretenden Krümmungen sind nicht, wie bei den Kurven, willkürliche, sondern durch die Cesàro-Codazzischen Formeln miteinander verknüpfte Funktionen. Sieht man von diesem Hindernis ab, so bleibt die weitgehende Willkür des Koordinatensystems: die erwähnten Krümmungen bestimmen zwar die Fläche der Gestalt nach eindeutig; der Verfasser gibt aber kein Kriterium an, um zu entscheiden, ob zwei Flächen geometrisch oder nur formal verschieden sind. Es bleibt infolgedessen unklar, wie eine Fläche mit den Hülfsmitteln der natürlichen Geometrie analytisch dargestellt werden soll, und daraus ergiebt sich natur-

1) Ausgenommen selbstverständlich die der Parabel.

Digitized by Google

gemäfs der Mangel eines Prinzips, um geometrische Probleme rechnerisch zu formulieren. Als Beispiel eines solchen Problems sei erwähnt die Bestimmung aller Flächen, die auf eine gegebene abwickelbar sind.[1])

In den Übungen zur Flächentheorie macht der Verfasser den Versuch, in speziellen Fällen zu analytischen Darstellungen durchzudringen. Dies liegt z. B. bei den Rotationsflächen nahe. Aber die auf S. 228 ausgesprochene Behauptung, es genüge, die natürliche Gleichung des Meridians zu bestimmen, ist nicht einwandfrei, da man auch die Rotationsachse kennen mufs. Dementsprechend mufs der auf S. 236 gegebene Beweis für die Abwickelbarkeit der Wendelfläche auf das Katenoid ergänzt werden. Über die allgemeine Schraubenfläche ist übrigens nichts angegeben. Es mag wohl seinen Grund darin haben, dafs man, um die Methoden des Verfassers anwenden zu können, erst zwei orthogonale Kurvenscharen haben mufs. Dagegen sind die Weingartenschen Flächen relativ ausführlich behandelt.

Die vorstehenden Ausführungen lassen erkennen, dafs den Methoden der „natürlichen Geometrie" auf flächentheoretischem Gebiete weitgehende Schranken gesetzt sind; wenn daher der Übersetzer in seinem Vorwort sagt: „Es würde ganz unmöglich sein, eine derartige Fülle geometrischer Thatsachen, wie sie hier geboten wird, in so eleganter Weise unter Benutzung anderer Methoden zu gewinnen", so kann ich dieser Ansicht nur energisch widersprechen, ganz abgesehen davon, dafs kategorische Behauptungen über einen so subjektiven Begriff, wie „Eleganz", leicht zu bestreiten und schwer zu verfechten sind.

Es kommt zu den Unzulänglichkeiten der Methode noch ein anderer, die Lektüre des Werkes erschwerender Umstand hinzu: das ist die übertriebene Kürze der Schreibweise. Sie ist wohl der Absicht entsprungen, die Einfachheit der Methode ins rechte Licht zu rücken, hat aber zu dem Fehler geführt, dafs die leitenden Ideen und Formalismen[2]) nicht mit der genügenden Betonung herausgearbeitet sind. Stellenweise mangelt sogar die Präzision, wofür ich als Belegstelle die Erläuterung der Fundamentalformeln auf S. 169 nennen will. Endlich ist nirgends der Zusammenhang mit den klassischen Methoden berührt, der für die Übersichtlichkeit von grofsem Vorteil wäre, da der Leser mit diesen Methoden ohnehin vertraut sein mufs. Es bedarf kaum eines Hinweises darauf, dafs eine organische Durchdringung beider Methoden über die soeben berührten Schranken auf flächentheoretischem Gebiete am einfachsten hinweghelfen würde. Sehr bezeichnend ist hierfür die Benennung der oben erwähnten Cesàro-Codazzischen Formeln ohne irgend einen Nachweis ihres Zusammenhangs mit den eigentlichen Codazzischen Bedingungen. Auch ist nicht ohne weiteres zu ersehen, ob und wie die Bestimmung aller Biegungen einer Fläche auf die Integration der Cesàro-Codazzischen Formeln (analog wie auf die der gewöhnlichen Codazzischen) hinausläuft.

Ich habe auf die Mängel des Buches hingewiesen, um nicht durch einseitige Betonung seiner Vorzüge zu unberechtigten Erwartungen und daraus folgenden Enttäuschungen Veranlassung zu geben. Vor Überschätzung der

1) Als Kriterium der Abwickelbarkeit verwendet der Verfasser die Übereinstimmung der Linienelemente, ohne aber anzugeben, wie man bei verschiedenen Koordinatensystemen die Äquivalenz der Linienelemente konstatiert.

2) Beispielsweise die Operations-Identitäten S. 199, 210.

Digitized by Google

Tragweite seiner Ideen warnt übrigens der Verfasser selbst in vornehmer Weise durch sein Motto: „Mon verre n'est pas grand, mais je bois dans mon verre."

Allen seinen Mängeln zum Trotz nimmt das Werk in der zeitgenössischen Litteratur eine besondere Stellung ein durch die Eigenart seiner Methoden und Gesichtspunkte, die Kürze der Rechnungen und die Fülle von Anregungen, die es, besonders in den 10 ersten Kapiteln, bietet. Es kann daher allen, die sich eingehend mit Differentialgeometrie beschäftigen und genügende Vorkenntnisse besitzen, um die Schwierigkeiten der Lektüre nicht zu scheuen, nur warm empfohlen werden.

Charlottenburg, April 1902. GERHARD HESSENBERG.

G. Veronese. Nozioni elementari di Geometria intuitiva ad uso dei ginnasi inferiori. Verona — Fratelli Drucker — Padova 1901.

Veronese hat bekanntlich ein Lehrbuch der Geometrie (Elementi di Geometria) verfafst, das sowohl den Bedürfnissen der Schule als auch den Anforderungen an wissenschaftliche Strenge in hohem Mafse zu genügen sucht. (Vgl. die ausführliche Inhaltsangabe von Thieme in seiner Programmabhandlung: „Die Umgestaltung der Elementargeometrie", Posen 1900). Dieses Lehrbuch ist für das Obergymnasium bestimmt. Für das Untergymnasium schreiben die italienischen Lehrpläne einen auf drei Klassen verteilten propädeutischen Kursus vor, in welchem zu behandeln sind 1) die wichtigsten geometrischen Gebilde (Punkt, Gerade, Ebene, Kreis, Polygon, Polyeder, Cylinder, Kegel und Kugel) in anschaulicher, elementarer Darstellung, 2) Messung der Linien, Winkel und Körper, 3) die einfachsten geometrischen Konstruktionen. Der vorliegende Leitfaden schliefst sich diesem Lehrplan durchaus an und behandelt dabei den Stoff in einer Weise, die auf das ersterwähnte Lehrbuch vortrefflich vorbereitet, indem er die empirisch gefundenen Eigenschaften der geometrischen Gebilde in derselben Art und Form darstellt, wie sie nachher in streng logischen Definitionen und Beweisen entwickelt werden.

Berlin. C. FAERBER.

Vivanti, Giulio. Teoria delle funzioni analitiche. Ulrico Hoepli (Manuali Hoepli. Serie scientifica 312—313) Milano, 1901. VIII u. 427 S. 3 Lire.

Die Theorie der analytischen Funktionen ist aus der Entwickelung der Differential- u. Integralrechnung im Gebiet der komplexen Gröfsen entstanden, aber durch die Untersuchungen von Weierstrafs zu einer Fortsetzung der Arithmetik und Algebra geworden, und in elementarer Weise läfst sie sich unabhängig von der Infinitesimalrechnung entwickeln. Nach dieser Methode von Weierstrafs ist das vorliegende Werk bearbeitet.

Ein einleitender erster Teil behandelt die Lehre von den Punktmengen und den transfiniten Zahlen, wie sie besonders von Herrn G. Cantor entwickelt ist. Der zweite Teil führt uns in die eigentliche Funktionentheorie ein, mit den Definitionen der oberen Grenze und des Maximums beginnend.

Digitized by Google

Die Eigenschaften der Potenzreihen und ihrer abgeleiteten werden aufgesucht, und die Lehre der analytischen Funktionen wird darauf gegründet, indem zunächst die analytische Fortsetzung einer Funktion besprochen und der Laurentsche Satz nachgewiesen wird. Nachdem im besonderen die rationalen Funktionen als analytische Funktionen betrachtet worden sind, werden die letzteren nach der Art ihrer Singularitäten (unwesentliche und wesentliche) eingeteilt und besonders eingehend die Funktionen mit dem Charakter einer ganzen Funktion behandelt.

Da die Theorie derselben bis heute noch in manchen Punkten unvollständig ist, andere sich nicht in elementarer Weise entwickeln lassen, fügt der Herr Verfasser einen dritten Teil an, den er Komplemente der Theorie der analytischen Funktionen nennt, und in den er die Resultate der neueren Untersuchungen aufgenommen hat, die freilich vielfach ohne Beweis angegeben sind. Poincaré ist es, der durch seine Arbeiten in den Jahren 1882 und 1883 einen neuen Weg geöffnet hat, auf dem zahlreiche Probleme zu lösen sind, die die Theorie der ganzen Funktionen darbietet. Die hauptsächlichsten hierher gehörigen Sätze von Poincaré, Hadamard u. a. werden angegeben, sodann folgen die bedeutendsten Ergebnisse über die arithmetische Darstellung der analytischen Funktionen, Funktionen mit beschränktem Konvergenzbereich, Erweiterung der analytischen Fortsetzung, Beziehungen zwischen den Singularitäten zweier analytischen Funktionen und Betrachtungen über die Verteilung der Singularitäten einer Potenzreihe auf der Peripherie des Konvergenzkreises. Teilweise sind die Sätze durch Beispiele näher erläutert. — Diese Sätze geben dem Leser „einen Ausblick darauf, was noch zu thun ist, wie viel neue und fruchtbare Felder geöffnet sind der Bethätigung der jüngeren Analytiker", und sind somit eine wertvolle Ergänzung des Buches; für die methodische Entwickelung kommen sie nicht in Betracht. Diese ist in den beiden ersten Kapiteln enthalten, und inbetreff derselben darf behauptet werden, dafs der behandelte Stoff in streng methodischer Weise bei klarer Darstellung entwickelt ist, und dafs daher das Buch recht geeignet ist, in die elementare Theorie der analytischen Funktionen einzuführen.

Als eine wertvolle Ergänzung ist es anzusehen, dafs die zitierten Schriften (etwa 200) in übersichtlicher alphabetischer Reihenfolge dem Buche angefügt sind.

Chemnitz. H. Willgrod.

Lorey, Wilhelm. Über das geometrische Mittel, insbesondere über eine dadurch bewirkte Annäherung kubischer Irrationalitäten. Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Realgymnasiums i. E. mit Realschule in Remscheid. 4°. 27 S.

Unter den unendlichen Prozessen der Mittelbildung ist das arithmetisch-geometrische Mittel von Gaufs am bekanntesten. Das hier vorliegende Schriftchen beschäftigt sich mit der fortgesetzten Bildung des geometrischen Mittels allein. Sind a_1 und a_2 zwei positive reelle Gröfsen, so wird gesetzt $a_3 = \sqrt{a_2 a_1}$, $a_4 = \sqrt{a_3 a_2}$, $\cdots$, $a_x = \sqrt{a_{x-1} a_{x-2}}$. Als Grenzwert wird durch Differenzengleichungen, von denen das zum Verständnis Notwendige abgeleitet wird, gefunden: $\lim_{x=\infty} a_x = \sqrt[3]{a_1 a_2^2}$, es wird also „durch diesen Prozess des

Digitized by Google

geometrischen Mittels eine kubische Irrationalität angenähert durch eine Kette quadratischer Irrationalitäten". Vorher wird als Beispiel einer Anwendung der Theorie der Differenzengleichungen das arithmetische Mittel benutzt und die aus Markoffs Differenzenrechnung bekannte Formel $\lim_{x=\infty} y_x = \frac{y_1 + 2y_2}{3}$ hergeleitet, hier aber einfacher als dort. Als ein weiterer Fall der Annäherung kubischer Irrationalitäten durch quadratische ergiebt sich das delische Problem der Würfelverdoppelung, und dann wird der allgemeine Fall des geometrischen Mittels aus n positiven reellen Gröfsen $a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n a_{n-1} \cdots a_1}$ und allgemein $a_x = \sqrt[n]{a_{x-1} a_{x-2} \cdots a_{x-n}}$ untersucht. Hier ist $\lim_{x=\infty} a_x = \prod_{\lambda=1}^{n} a_\lambda^{\frac{2\lambda}{n(n+1)}}$, es wird also durch den Prozess der Bildung einer Kette $n$ter Wurzeln die $\frac{n(n+1)}{2}$te Wurzel angenähert. Den Schlufs bildet die Beantwortung der Frage: Kann durch den Prozess des geometrischen Mittels jede zwischen a_1 und a_2 liegende Zahl als Grenzwert dargestellt werden, wenn man das geometrische Mittel zwischen dem letzten Näherungswerte und irgend einer der vorher berechneten Zahlen nimmt? Mit Hülfe der Mengenlehre stellt sich heraus, dafs dieses nicht der Fall ist.

Chemnitz. H. Willgrod.

Gaspard Monge. Darstellende Geometrie (1798). Übersetzt und herausgegeben von R. Haufsner. Leipzig 1900, W. Engelmann. 217 S. (Ostwald's Klassiker Nr. 117.)

Bei der Bedeutung, welche die darstellende Geometrie für weite Berufskreise hat und bei der erhöhten Aufmerksamkeit, die ihr neuerdings auch an unsern Universitäten zu Teil wird, wird man dem Herausgeber für die erste deutsche Ausgabe von Monges Vorlesungen grofsen Dank wissen. Bildet doch die géométrie descriptive noch heute die wissenschaftliche Grundlage der darstellenden Geometrie und bietet sie auch heute noch dem Lehrer dieses Wissenszweiges ein Vorbild, das an Eleganz, Klarheit und Formvollendung unerreicht dasteht. Für die vorliegende Übersetzung ist die Ausgabe von 1798/9 benutzt, weil diese einerseits als von Monge selbst redigiert zu betrachten und andererseits die erste selbständige Buchausgabe ist. Von den Supplementen, welche den späteren Ausgaben angehängt sind, ist keines, auch nicht das von Brisson verfasste aufgenommen worden.

In einem Anhang giebt der Herausgeber eine Reihe von Textanmerkungen, welche manchem Studierenden recht willkommen sein werden.

Berlin. E. Jahnke.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

62. Dem bekannten Satze für die Kurven II. Klasse: „Werden durch einen Brennpunkt F einer Kurve II. Klasse k^2 die beiden Strahlen nach den Berührungspunkten zweier Tangenten von k^2 gelegt, so hälftet der Strahl, welcher F mit dem Schnittpunkte dieser Tangenten verbindet, einen Winkel jener beiden Strahlen", steht ein leicht zu beweisender, analoger Satz für die Flächen II. Klasse zur Seite. Er lautet: „Werden durch eine Tangente f einer Fokalkurve einer Fläche II. Klasse K^2 die beiden Tangentialebenen an einen Kegelschnitt von K^2 gelegt, so hälftet die Ebene, welche f mit dem Mittelpunkte des K^2 längs diesem Kegelschnitte umschriebenen Strahlenkegels verbindet, einen Winkel jener beiden Tangentialebenen.

Beide Sätze sind Sonderfälle zweier allgemeineren Sätze. Wie lauten die einfachen Beweise aller drei?

Berlin. STANISLAUS JOLLES.

63. Nach einer von Maurice Leblanc und Galileo Ferraris aufgestellten Theorie kann man sich von dem Verhalten des *asynchronen Einphasenmotors* Rechenschaft geben, wenn man sich ihn durch zwei halb so grofse mechanisch gekuppelte asynchrone Mehrphasenmotoren ersetzt denkt, die so hinter einander geschaltet sind, dafs ihre Drehfelder entgegengesetzten Drehungssinn haben. Zeichnet man nun für *jeden* dieser beiden Mehrphasenmotoren das heute in der Elektrotechnik allgemein benutzte Diagramm der magnetischen Felder (d. h. der Induktionslinienzahlen $\int \mathfrak{B}_N \cdot dQ$), so kommt man auf folgende *geometrische Aufgabe*:

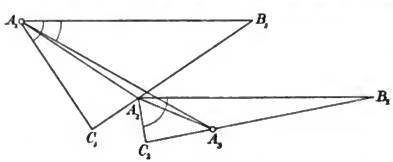
In dem rechtwinkeligen Dreieck $A_1 B_1 C_1$ ist die eine Kathete $C_1 B_1$ durch den Punkt A_2 im Verhältnis $\tau : 1$ geteilt. Es wird darauf $A_2 B_2$ parallel und gleich $A_1 B_1$ gezogen. Über $A_2 B_2$ als Hypotenuse wird ein rechtwinkeliges Dreieck $A_2 B_2 C_2$ so gezeichnet, dafs

$$\operatorname{tg} B_1 A_1 C_1 + \operatorname{tg} B_2 A_2 C_2 = 2 \cdot \operatorname{tg} \vartheta = \text{const}$$

ist. Die Kathete $C_2 B_2$ dieses neuen rechtwinkeligen Dreiecks werde durch den Punkt A_3 auch im Verhältnis $\tau : 1$ geteilt. Welches sind dann die geometrischen Örter für die Punkte A_2, C_1, B_1, C_2, B_2, wenn die Punkte A_1 und A_3 als festliegend, die Strecke $A_1 A_3$ also als konstant betrachtet wird?

Digitized by Google

Die physikalische Bedeutung der Figur ist dann im wesentlichen diese: Die Strecke A_1A_3 ist ein Mafs für die konstante Netzspannung $K = \int \mathfrak{E}_l \cdot dl$, die Strecke A_1B_1 ein Mafs für den Strom $i = \int \mathfrak{C}_N \cdot dQ$, den der Motor dem Leitungsnetz der Wechselstromzentrale entnimmt, der Sinus des Winkels $B_1A_1A_3$ ist *gleich* dem Leistungsfaktor $\cos\varphi$ des Motors, der Tangens des Winkels $B_1A_1C_1$ ist ein Mafs für die Schlüpfung s des Sekundäranker im Drehfelde.[1])



Die Aufstellung und physikalische Begründung dieses Diagrammes findet sich in meiner kleinen Schrift über die *Arbeitsweise der Wechselstrommaschinen* (Berlin 1902).

Berlin. F. Emde.

---

64. Trouver, sous forme irrationnelle, l'enveloppe de la droite qui joint les centres de courbure correspondant à deux points conjugués d'une ellipse — et en déduire le degré de l'enveloppe.

Constantinople. E. N. Barisien.

---

65. Trouver le lieu des points M tels qu'en abaissant sur une ellipse de centre O les quatre normales ayant leurs pieds en A, B, C, D on ait

1^0 $$OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD = \text{constante},$$

2^0 $$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2 = \text{constante},$$

3^0 $$\Sigma(\overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2) = \text{constante},$$

4^0 $$\Sigma(\overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2 \cdot \overline{OC}^2) = \text{constante}.$$

Constantinople. E. N. Barisien.

---

66. On considère une ellipse E et une diagonale D du rectangle des axes. D'un point M de D on mène les tangentes à E, dont les points de contact sont P et Q. Etudier quelle est la région de D pour laquelle le

---

1) Ein Drehfeld, das bei konstanter Frequenz des zugeführten Stromes relativ zum Primäranker mit konstanter Geschwindigkeit rotiert, entsteht nämlich auch im einphasigen Asynchronmotor, sobald sich der sekundäre Stromkreis relativ zum primären bewegt. Im Gegensatz zum Mehrphasenmotor ist es aber nur dann ein vollkommenes Drehfeld, wenn der Sekundäranker nicht schlüpft, und auch hierbei nur in einem nicht ausführbaren Grenzfall der Konstruktion.

Digitized by Google

cercle circonscrit au triangle MPQ rencontre l'ellipse E en deux autres points réels. Voir en particulier la position du point M pour lequel ce cercle est tangent à E.

Constantinople. E. N. Barisien.

67. Die Kurve $a^2y^2 = bx^3 - x^4$ und ihr Rotationskörper um die x-Achse (beide homogen vorausgesetzt) sind bezüglich ihrer mechanischen Eigenschaften zu untersuchen: Schwerpunkte von Flächen- und Körperstücken, Trägheitsmomente der Fläche und des Körpers bezüglich verschiedener Achsen, Gleichgewichtslagen des auf horizontaler Ebene ruhenden Körpers (stabil?), Anziehung des Körpers nach dem Newtonschen Gesetze auf den Pol, Maximum der Anziehung (Verhältnis von $b : a$ in diesem Falle), Pendel mit der Fläche oder dem Körper, Ausfluß von Flüssigkeiten aus dem Hohlkörper bei verschiedenen Lagen, u. s. w.

Berlin. E. Lampe.

B. Lösungen.

Zu **3.** (Bd. I, S. 206) (E. Lemoine). Posons

$$AA' = l; \quad BB' = m; \quad CC' = n; \quad CA' = x; \quad AB' = y; \quad BC' = z$$

et proposons-nous de trouver la relation qui lie l, m, n aux côtés du triangle, on aura:

$$l^2 = b^2 + x^2 - 2bx\cos C; \quad m^2 = c^2 + y^2 - 2cy\cos A; \quad n^2 = a^2 + z^2 - 2az\cos B$$

et

$$xyz = (a - x)(b + y)(c - z).$$

En éliminant x, y, z entre les quatre équations on aura la relation cherchée. En effectuant les calculs on trouvera

$$(1) \qquad (P^2 - 4Q - 4V)^2 = 16U\{\Sigma(b^2 - c^2)(a^2l^2 + m^2n^2)\}^2,$$

où l'on a posé, S désignant la surface de ABC,

$$Q = \Sigma(l^2 - b^2)(l^2 - c^2)(b^2m^2 - 4S^2)(c^2n^2 - 4S^2),$$

$$T = (l^2 - b^2)(m^2 - c^2)(n^2 - a^2) + (l^2 - c^2)(m^2 - a^2)(n^2 - b^2),$$

$$U = (a^2l^2 - 4S^2)(b^2m^2 - 4S^2)(c^2n^2 - 4S^2),$$

$$V = (l^2 - bc\cos A)(m^2 - ca\cos B)(n^2 - ab\cos C),$$

$$P = 2V - T.$$

Revenons à la question; si $l = m = n$, le second membre de (1) s'annule et il reste

$$P^2 - 4Q - 4V = 0$$

ou, tous calculs faits:

$$16S^2(l^2 - a^2)(l^2 - b^2)(l^2 - c^2)(l^2 - 16R^2\cos A\cos B\cos C) = 0,$$

R étant le rayon du cercle circonscrit à ABC.

Digitized by Google

En laissant de côté les valeurs $l = a$, $l = b$, $l = c$ qui ne peuvent donner une véritable réponse, il reste

$$l^2 = 16\,R^2 \cos A \cos B \cos C.$$

Or si h_a représente la hauteur du triangle, partant de h_a on trouve facilement

$$l^2 = h_a^2 - 4\,R^2 \cos^2 B \cos^2 C\,(\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C - 2)^2;$$

l est donc plus petit que la hauteur et il n'y a pas de point A, sur BC, se trouvant à la distance l de A. C. q. f. d.

Poitiers. Cᵈˡ Moreau.

Zu **20.** (Bd. I, S. 370) (E. Lemoine). On a

$$X^2 = \frac{a^2c^2\,(y^2 + z^2 + 2\,yz\cos A)}{(ax + by + cz)^2}.$$

Donc l'équation du lieu est:

$$(1) \qquad x^2b^2\,(y^2 + z^2 + 2\,yz\cos A) - y^2a^2\,(z^2 + x^2 + 2\,xz\cos B) = 0.$$

Cète question est tèlement facile à résoudre qu'il n'y aurait pas lieu de la poser si èle ne présentait pas la particularité suivante.

L'équation (1) répresente une courbe du 4ième degré, mais si l'on remarque que pour tout point du cercle circonscrit au triangle ABC on a $Xx = Yy = Zz$, on voit que ce cercle doit apartenir au lieu demandé; l'équation (1) se décompose en éfet en deus facteurs

$$ayz + bzx + cxy = 0, \quad acyz - bczx + (a^2 - b^2)\,xy = 0,$$

et le second représente l'iperbole équilatère circonscrite remarquable, qui a pour centre le milieu de AB, iperbole que j'ai désignée par Γ_c dans les nombreuses ocasions où je l'ai rencontrée en travaillant la géométrie du triangle. Le triple des iperboles Γ_a, Γ_b, Γ_c est parmi les plus importants des triples de coniques qde l'on a à observer dans cète étude.

Paris. E. Lemoine.

---

2. Anfragen.

7. Wo findet man eine möglichst vollständige Litteraturangabe zu der Theorie der Liouvilleschen Flächen, insbesondere eine Zusammenstellung von neueren Arbeiten, in welchen Kriterien dafür gegeben werden, ob eine irgendwie vorgegebene Fläche zur Liouvilleschen Klasse gehört?

Windsbach. A. Wendler.

---

8. In den Nouv. Ann. (3) **18** (1899) hat der jüngst verstorbene F. Caspary folgende Konstruktion für die algebraische Summe $\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \cdots + \varepsilon_n p_n$ $(\varepsilon_1 \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1)$ der Vektoren $p_1, p_2, \ldots, p_n$ mitgeteilt: Durch einen beliebigen Pol O ziehe man die Parallelen von gleicher Länge

Digitized by Google

wie $p_1, p_2, \ldots, p_n$ und von gleichem bezw. entgegengesetztem Richtungssinn, je nachdem $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ positiv oder negativ sind. Die Endpunkte seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dann zeichne man den Mittelpunkt M dieser Punkte, d. h. den Punkt $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$, und verbinde ihn mit O, so stellt das n-fache des Vektors $M - O$ jene Vektorensumme dar.

Ich möchte wissen, ob diese (natürlich sehr einfach zu beweisende) Konstruktion neu ist.

Berlin. E. Jahnke.

3. Kleinere Notizen.

Über einen Satz von Hermite in (3) 1, 25.

In dieser Arbeit hat Hermite u. a. gezeigt, dafs wenn $x < \frac{\pi}{2}$, $\sin x$ der Ungleichung genügt: $x > \sin x > \frac{2x}{\pi}$.

Dies läfst sich auf einfache Weise auch wie folgt beweisen. Entwickelt man arc sin y nach Potenzen von y, etwa arc sin $y = \sum_h a_h y^h$ $(h = 1, 2, \cdots)$, wo die a_h sämtlich $\geqq 0$ und $a_1 = 1$, und setzt $y = \sin x$, also $x = \text{arc sin } y$, so wird:

$$x = \sum_h a_h \sin^h x. \tag{1}$$

Da $a_1 = 1$, so geht schon hieraus hervor, dafs $x > \sin x$. Es ist daher noch zu beweisen, dafs $\sin x > \frac{2x}{\pi}$.

Setzt man nun in (1) $x = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\frac{\pi}{2} = \sum_h a_h. \tag{2}$$

Durch Division von (1) durch (2) erhält man

$$\frac{2x}{\pi} = \frac{\sum_h a_h \cdot \sin^h x}{\sum_h a_h}.$$

Es ist also zu zeigen, dafs $\sin x > \frac{\sum_h a_h \sin^h x}{\sum_h a_h}$ oder $\sin x \sum_h a_h > \sum_h a_h \sin^h x$ oder $\sum_h a_h \sin x > \sum_h a_h \sin^h x$ oder $\sum_h a_h (\sin x - \sin^h x) > 0$.

Da nun $\sin x$ ein echter positiver Bruch ist, so hat man $(\sin x - \sin^h x) > 0$, und da ebenso $a_h \geqq 0$, so wird jedes Glied der Summe positiv oder 0 und also auch die ganze Summe.

Darmstadt, Mitte Juni 1902. Paul Wolfskehl.

Digitized by Google

Bemerkung zu der Abhandlung „Vereinfachte Lösung der Eulerschen Aufgabe: $x^3+y^3+z^3+v^3=0$ in (3) 2, 280.

Ersetzt man in den von Herrn Schwering gegebenen Ausdrücken

$$x = m\alpha - n^2, \quad y = -m\beta + n^2, \quad z = -n\alpha + m^2, \quad v = n\beta - m^2$$

die Größen α, β, m, n durch drei Größen p, q, r vermittelst der Gleichungen

$$\alpha = 3pr, \quad \beta = 3qr, \quad m = p^2 + pq + q^2, \quad n = 3r^2,$$

so wird die Bedingungsgleichung $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 3mn = 0$ identisch erfüllt.

Zu jedem System p, q, r gehört also ein brauchbares System α, β, m, n. Umgekehrt läßt sich aus jedem System α, β, m, n ein System p, q, r finden. Denn durch Hinzufügung eines gemeinsamen Faktors zu den Zahlen α, β, m, n kann man $\frac{n}{3}$ stets zu einem Quadrat machen. Dessen Wurzel ist dann r. Weiter ergeben sich einfach

$$p = \frac{\alpha}{3r}, \qquad q = \frac{\beta}{3r}.$$

Somit gehört zu jeder Lösung x, y, z, v der Eulerschen Gleichung $x^3+y^3+z^3+v^3=0$ ein Wertsystem p, q, r.

Umgekehrt aber gilt nach Ausführung der Substitution der wichtige Satz:

Die Ausdrücke:

$$x = 3(p^2+pq+q^2)pr - 9r^4, \quad y = -3(p^2+pq+q^2)qr + 9r^4$$

$$z = -9pr^2 + (p^2+pq+q^2)^2, \quad v = 9qr^3 - (p^2+pq+q^2)^2$$

erfüllen für willkürliche p, q, r die Gleichung $x^3+y^3+z^3+v^3=0$ identisch.

Als Beispiel sei $p = \frac{4}{3}$, $q = -\frac{5}{3}$, $r = \frac{1}{3}$, so wird

$$x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5, \quad v = -6.$$

Dortmund, 10. Juli 1902. H. Kühne.

Bemerkung zu meinem Aufsatz: „Neue Lehrsätze über die Wurzeln algebraischer Gleichungen“ (8, 257—260).

Wie mir erst jetzt bekannt wird, hat Liouville (Journal de Math. (1) 6, 345—411) ein allgemeines Theorem über die Invarianz des Schwerpunktes für die gemeinsamen Schnittpunkte zweier beliebigen algebraischen Kurven mit gemeinsamen Asymptoten ausgesprochen. Hierzu scheinen die von mir mitgeteilten Resultate in enger Beziehung zu stehen. Ich behalte mir vor, auf diesen Gegenstand bei nächster Gelegenheit zurückzukommen.

Trier, 15. September 1902. C. Isenkrahe.

Digitized by Google

Antwort auf eine Frage des Herrn E. N. Barisien im Intermédiaire des Mathématiciens 2270 (1902).

1. *Toroïde.* — Une courbe parallèle à la courbe P est décrite par le point $Q = P + miT$, étant s l'arc de la courbe, $T = \frac{dP}{ds}$, et m un nombre réel et constant. La condition nécessaire pour l'existence d'un point de rebroussement est (*Formulaire de Mathématiques*) $\frac{dQ}{ds} = \left(1 - \frac{m}{\varrho}\right)T = 0$, étant ϱ le rayon de courbure au point P. Donc, pour avoir un rebroussement au point P, il est nécessaire que $\varrho = m$.

Pour l'ellipse $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$ on a

$$\varrho = \frac{1}{ab}\left(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}},$$

et, par conséquent, *les coordonnées cherchées sont celles du centre de courbure au point P, pour les valeurs de φ qui satisfont à la condition*

$$\left(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}} = mab.$$

2. *Courbe de Talbot.* — Le point

$$P = O + a\cos\varphi I + b\sin\varphi iI, \tag{a}$$

φ variant de 0 à 2π, décrit l'ellipse dont O est le centre, a, b $(a > b)$ les demi-axes, φ l'angle excentrique, et I un vecteur unitaire parallèle au grand axe.

Si nous dérivons, par rapport à φ, nous avons

$$\begin{cases} P' = -a\sin\varphi I + b\cos\varphi iI, \\ P'' = -a\cos\varphi I - b\sin\varphi iI. \end{cases} \tag{b}$$

La courbe de Talbot est décrite par le point

$$Q = P + zi(P - O)$$

où z est un nombre, fonction de φ, et tel que

$$Q'i(P - O) = P'i(P - O) + zP'(P - O) = 0.$$

On a aisément par les (a), (b)

$$z = -\frac{(a^2 - b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{ab}$$

et par conséquent

$$Q = O + a\cos\varphi\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right)I + b\sin\varphi\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2}\cos^2\varphi\right)iI. \tag{c}$$

Les coordonnées x, y du point Q sont donc

$$x = a\cos\varphi\left(1 + \frac{a^2 - b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right), \qquad y = b\sin\varphi\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{b^2}\cos^2\varphi\right). \tag{d}$$

Digitized by Google

Pour avoir un rebroussement au point Q, il est nécessaire que $Q' = 0$, c'est-à-dire $x' = y' = 0$; mais

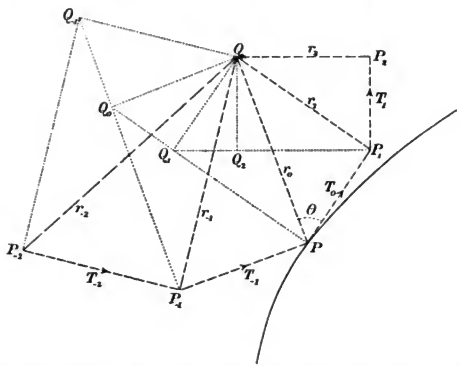
$$x' = -\frac{\sin\varphi}{a}\{2a^2 - b^2 - 3(a^2 - b^2)\cos^2\varphi\},$$

$$y' = -\frac{\cos\varphi}{b}\{a^2 - 2b^2 - 3(a^2 - b^2)\sin^2\varphi\}.$$

Donc, si $a > b\sqrt{2}$ on a un point de rebroussement par

$$\cos^2\varphi = \frac{2a^2 - b^2}{3(a^2 - b^2)}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{a^2 - 2b^2}{3(a^2 - b^2)},$$

et *les coordonnées de ce point sont obtenues par les* (d). Pour $a \gtreqless b\sqrt{2}$ la courbe Q n'a pas de points de rebroussement, mais pour $a = b\sqrt{2}$, elle a un contact d'ordre élevé aux points $O \pm aI$ avec la tangente. Pour $a = 2b$ la courbe de Talbot coupe le grand-axe aux foyers de l'ellipse.



La question proposée par M. Barisien est ainsi résolue; mais je crois important de l'examiner aussi à un point de vue plus général.

Le point P décrit une courbe dont s est l'arc, ρ le rayon de courbure et $T = \frac{dP}{ds}$ le vecteur unitaire parallèle à la tangente au point P. Les points $P_1, P_2, \ldots$ décrivent la première, la deuxième, ... *podaire* de la courbe, par rapport au point O. Les points $P_{-1}, P_{-2}, \ldots$ décrivent la première, la deuxième, ... anti-podaire de la courbe. En posant $P_0 = P$, on peut considérer le point P_n, où n est un entier relatif.

Il est bien connu que la normale au point P_n est la diagonale P_nQ_n du rectangle $OP_nP_{n-1}Q_n$. En conséquence l'angle θ que le vecteur $O - P_n$

Digitized by Google

fait avec le vecteur T_n ne dépend point du nombre n. Étant r_n la distance du point O au point P_n, on a

$$O - P_n = r_n e^{i\theta} T_n, \quad r_n = r_0 \sin^n \theta. \tag{1}$$

En nous souvenant (Frenet) que $\frac{dT_n}{ds_n} = \frac{1}{\varrho_n} i T_n$, on a par (1)

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds_n} = \frac{1}{r_n} \sin\theta - \frac{1}{\varrho_n}, \\ \frac{dr_n}{ds_n} = -\cos\theta. \end{cases} \tag{2}$$

Si P_{n+1} est la position de la forme géométrique

$$P_n T_n \cdot O i T_n = P_n O i T_n \cdot T_n + O T_n i T_n \cdot P_n,$$

on a par (1)

$$P_{n+1} = P_n + r_n \cos\theta \, T_n, \tag{3}$$

comme on l'obtient, aussi, aisément par la figure.

Les formules (2), (3) donnent

$$\frac{dP_{n+1}}{ds_n} = \frac{r_n}{\varrho_n} e^{-i\theta} i T_n \tag{4}$$

et par conséquent

$$\begin{cases} \frac{ds_{n+1}}{ds_n} = \frac{r_n}{\varrho_n}, \\ T_{n+1} = e^{-i\theta} i T_n, \quad T_n = -e^{i\theta} i T_{n+1}. \end{cases} \tag{5}$$

Au moyen des formules (2), (5) on a facilement

$$\frac{dT_{n+1}}{ds_{n+1}} = \frac{1}{r_n^2} \{ 2r_n - \varrho_n \sin\theta \} i T_{n+1}$$

et par conséquent

$$\varrho_{n+1} = \frac{r_n^2}{2r_n - \varrho_n \sin\theta} = \frac{r_{n-1} r_n}{2r_{n-1} - \varrho_n}, \quad \varrho_n = 2r_{n-1} - \frac{r_{n-1} r_n}{\varrho_{n+1}}. \tag{6}$$

De ces formules on déduit une simple construction géométrique du centre de courbure $C_n = P_n + \varrho_n i T_n$, étant connu le centre C_{n+1} ou C_{n-1}.

Pour avoir un rebroussement au point P_{n-1}, il est nécessaire (mais non suffisant en général) que $\varrho_{n-1} = 0$ ou $\varrho_{n-1} = \infty$; et par (6), il est nécessaire que

$$\varrho_n = \frac{r_{n-1}}{2} \quad \text{ou} \quad \varrho_n = 0. \tag{7}$$

Revenons au cas particulier de la courbe de Talbot. Si nous posons

$$h = \operatorname{mod} \frac{dP}{d\varphi} = (a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}},$$

Digitized by Google

on a par les (3), (5)

$$Q = P_{-1} = P - r_{-1}\cos\theta\, T_{-1} = P + \frac{r}{h}\cot\theta\, e^{i\theta} i \frac{dP}{d\varphi}.$$

Mais dans le cas particulier que nous considérons

$$\sin\theta = \frac{P'(O-P)}{rh} = \frac{ab}{rh}, \quad \cos\theta = \frac{P' i(O-P)}{rh} = \frac{(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{rh},$$

et la formule précédente donne l'expression (c).

Pour le point de rebroussement de $Q = P_{-1}$ la première condition (7) (la deuxième n'étant pas possible pour l'ellipse) donne

$$2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \tag{8}$$

qui fournit la solution déjà trouvée.

Pour le point $O + aI$ de l'ellipse on a $r_{-2} = r_{-1} = a$, $\varrho = b^2/a$, et par conséquence $\varrho_{-1} = \frac{a}{b^2}(2b^2 - a^2)$, et on a $\varrho_{-1} = 0$ pour $a = b\sqrt{2}$. Pour le point $O + biI$, $r_{-2} = r_{-1} = b$, $\varrho = a^2/b$ et $\varrho_{-1} = \frac{b}{a^2}(2a^2 - b^2)$.

La condition (8) exprime que $r = h\sqrt{2}$, c'est-à-dire: *si P_{-1} est point de rebroussement, le diamètre de l'ellipse qui passe par P est égal au diamètre conjugué multiplié par $\sqrt{2}$.*

Il faut bien remarquer qu'il est inutile de déterminer les coordonnées du point de rebroussement pour le construire. En effet: étant donné P_n on obtient graphiquement P_{n+1} et P_{n-1}; la condition (8) donne la construction de φ et, par conséquence, ayant obtenu P on peut construire $P_{-1} = Q$.

Turin. C. Burali-Forti.

Solution d'un problème de probabilités;

Par M. C. Moreau à Poitiers.

A joue contre B; à chaque partie, les probabilités qu'ils ont respectivement de gagner sont p et q $(p + q = 1)$ et le perdant donne 1 fr. au gagnant. En entrant au jeu, les joueurs possèdent respectivement a et b francs. On demande la probabilité que A ruinera B avant le coup de rang r.[1])

Soit $\Pi = f(a, b, r)$ la probabilité demandée, on a évidemment l'équation

$$f(a, b, r) = pf(a+1, b-1, r-1) + qf(a-1, b+1, r-1).$$

La somme des deux variables a et b restant constante, on peut supprimer une d'elles en imposant à l'autre la condition de ne pas dépasser $a + b$; supprimons alors b, désignons par n la différence $r - b$ et posons

$$\Pi = f(a, b, r) = p^b y_{a,n}, \tag{1}$$

il viendra

$$y_{a,n} = y_{a+1,n} + pq\, y_{a-1,n-2}$$

1) Cette question a été posée dans l'Intermédiaire des Math. 1894 et 1898.

Digitized by Google

ou, en diminuant a d'une unité,

$$y_{a,n} - y_{a-1,n} + pqy_{a-2,n-2} = 0$$

avec les conditions limites

$$y_{a+b,n} = 1, \quad y_{0,n} = 0, \quad y_{a,0} = 0. \tag{2}$$

Considérons maintenant une fonction $\varphi(u, v)$ telle que, dans son développement suivant les puissances de u et de v, le coefficient de $u^a v^n$ soit précisément $y_{a,n}$, cette fonction comprendra les $a + b$ lignes suivantes

$$\varphi = \begin{cases} y_{1,1}uv + y_{1,2}uv^2 + \cdots + y_{1,n}uv^n + \cdots, \\ y_{2,1}u^2v + y_{2,2}u^2v^2 + \cdots + y_{2,n}u^2v^n + \cdots, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ y_{a,1}u^av + y_{a,2}u^av^2 + \cdots + y_{a,n}u^av^n + \cdots, \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ y_{a+b,1}u^{a+b}v + y_{a+b,2}u^{a+b}v^2 + \cdots + y_{a+b,n}u^{a+b}v^n + \cdots \end{cases}$$

et il est facile de voir, d'après l'équation (2) et les conditions limites indiquées, que, si on la multiplie par l'expression

$$1 - u + pqv^2u^2,$$

le produit ne se composera que de la première ligne de φ, que nous désignerons par $uF(v)$, et de termes divisibles par u^{a+b+1}, termes qui peuvent être négligés sans inconvénient puisqu'on n'aura jamais recours aux puissances de u supérieures à la $(a + b)^e$. On peut donc écrire, l'égalité étant limitée à la partie utile du second membre,

$$\varphi = \frac{uF(v)}{1 - u + pqv^2u^2}$$

ou, en développant $\frac{1}{1 - u + pqv^2u^2}$ suivant les puissances de u et posant

$$\frac{1}{1 - u + pqv^2u^2} = 1 + c_1u + c_2u^2 + \cdots, \tag{3}$$

$$\varphi = uF(v) + u^2c_1F(v) + \cdots + u^ac_{a-1}F(v) + \cdots + u^{a+b}c_{a+b-1}F(v).$$

Or, puisque les $y_{a+b,n}$ sont tous égaux à l'unité, la dernière ligne de la fonction φ a pour valeur $\frac{u^{a+b}v}{1-v}$, on a donc

$$F(v) = \frac{v}{(1-v)c_{a+b-1}},$$

et l'expression de φ devient

$$\varphi = \frac{uv}{(1-v)c_{a+b-1}} + \frac{u^2vc_1}{(1-v)c_{a+b-1}} + \cdots + \frac{u^avc_{a-1}}{(1-v)c_{a+b-1}} + \cdots + \frac{u^{a+b}v}{1-v}.$$

Digitized by Google

On voit ainsi que la quantité cherchée $y_{a,n}$ est égale au coefficient de ν^n dans le développement suivant les puissances de ν de

$$\frac{\nu c_{a-1}}{(1-\nu)c_{a+b-1}}.$$

Mais, d'après leur définition (3), les quantités $c_1, c_2, \cdots$ sont des fonctions de $pq\nu^2$, il en est évidemment de même du quotient de deux quelconques d'entre elles et on peut écrire

$$\frac{c_{a-1}}{c_{a+b-1}} = 1 + D_1 pq\nu^2 + D_2 p^2 q^2 \nu^4 + \cdots,$$

où $D_1, D_2, \cdots$ sont des coefficients ne dépendant que de a et de b.

On conclut enfin de là, à cause du facteur $\frac{\nu}{1-\nu} = \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^n + \cdots$,

$$(4) \qquad y_{a,n} = 1 + D_1 pq + D_2 p^2 q^2 + \cdots + D_{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (pq)^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Si l'on examine cette dernière expression et la façon dont elle a été obtenue, on reconnaît que l'on serait parvenu au même résultat si on avait remplacé ν par 1 dans la relation (3) et si on avait pris simplement

$$y_{a,n} = \frac{c_{a-1}}{c_{a+b-1}},$$

mais à la condition de développer ce quotient, sous quelque forme qu'il se présente, suivant les puissances de pq et d'arrêter le développement à la puissance de pq d'exposant $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

1ère Solution. — En faisant, d'après ce qui vient d'être dit, $\nu = 1$ dans la fonction

$$\frac{1}{1-u+pq\nu^2u^2},$$

elle devient

$$\frac{1}{1-u+pqu^2} = \frac{1}{(1-pu)(1-qu)} = (1+pu+p^2u^2+\cdots)(1+qu+q^2u^2+\cdots);$$

on a donc

$$c_{a-1} = p^{a-1} + p^{a-2}q + \cdots + q^{a-1} = \frac{p^a - q^a}{p-q},$$

$$c_{a+b-1} = p^{a+b-1} + p^{a+b-2}q + \cdots + q^{a+b-1} = \frac{p^{a+b} - q^{a+b}}{p-q}$$

et, par suite,

$$\frac{c_{a-1}}{c_{a+b-1}} = \frac{p^a - q^a}{p^{a+b} - q^{a+b}}.$$

Lorsque p est plus grand que q, on met cette valeur sous la forme

$$\frac{p^a - q^a}{p^{a+b} - q^{a+b}} = \left(\frac{1}{p}\right)^b \left(1 - \frac{q^a}{p^a}\right)\left(1 + \frac{q^{a+b}}{p^{a+b}} + \frac{q^{2a+2b}}{p^{2a+2b}} + \cdots\right),$$

Digitized by Google

et on en conclut en effectuant le calcul

$$(5)\quad \frac{c_{a-1}}{c_{a+b-1}} = \left(\frac{1}{p}\right)^b - (pq)^a\left(\frac{1}{p}\right)^{2a+b} + (pq)^{a+b}\left(\frac{1}{p}\right)^{2a+2b} - (pq)^{2a+b}\left(\frac{1}{p}\right)^{4a+3b} + \cdots.$$

Si, au contraire, on avait $q > p$, on écrirait

$$\frac{c_{a-1}}{c_{a+b-1}} = \frac{q^a - p^a}{q^{a+b} - p^{a+b}}$$

et on trouverait

$$(5\,\text{bis})\quad \frac{c_{a-b}}{c_{a+b-1}} = \left(\frac{1}{q}\right)^b - (pq)^a\left(\frac{1}{q}\right)^{2a+b} + (pq)^{a+b}\left(\frac{1}{q}\right)^{2a+3b} - \cdots.$$

Cela posé, en traitant par la formule de Lagrange l'équation

$$(6)\qquad z = 1 + pqz^2,$$

on obtient

$$z^m = 1 + mpq + \frac{m(m+3)}{1\cdot 2}p^2q^2 + \frac{m(m+4)(m+5)}{1\cdot 2\cdot 3}p^3q^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{m(m+k+1)\cdots(m+2k-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}p^kq^k + \cdots$$

cette valeur de z^m s'appliquant à la plus petite des racines de l'équation (6); or les deux racines de cette équation sont $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$, on aura donc

$$1 + mpq + \frac{m(m+3)}{1\cdot 2}p^2q^2 + \frac{m(m+4)(m+5)}{1\cdot 2\cdot 3}p^3q^3 + \cdots = \begin{cases}\left(\frac{1}{p}\right)^m, \text{ si } p > q,\\ \left(\frac{1}{q}\right)^m, \text{ si } q > p,\end{cases}$$

et l'on voit que, dans les deux cas, on peut exprimer par le même développement en fonction de pq les puissances de $\frac{1}{p}$ ou de $\frac{1}{q}$ qui figurent dans les relations (5) ou (5 bis).

On arrive ainsi à la formule générale suivante: $\Pi = p^b y_{a,n}$

$$= p^b\begin{cases}\left\{1 + bpq + \frac{b(b+3)}{1\cdot 2}p^2q^2 + \frac{b(b+4)(b+5)}{1\cdot 2\cdot 3}p^3q^3 + \cdots\right.\\ -(p'q)^a\left\{1 + (2a+b)pq + \frac{(2a+b)(2a+b+3)}{1\cdot 2}p^2q^2 + \cdots\right.\\ +(pq)^{a+}\left\{1 + (2a+3b)pq + \frac{(2a+3b)(2a+3b+3)}{1\cdot 2}p^2q^2 + \cdots\right.\\ -(pq)^{2a+b}\left\{1 + (4a+3b)pq + \frac{(4a+3b)(4a+3b+3)}{1\cdot 2}p^2q^2 + \cdots\right.\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

Chacun des développements qui entrent dans cette formule est multiplié par une puissance de pq dont l'exposant augmente alternativement de a et de b à partir du premier qui est zéro.

Digitized by Google

Si l'on appelle h l'un quelconque de ces exposants, le coefficient du terme en pq dans le développement correspondant est égal à $2h+b$ et ce développement doit être arrêté au terme en $(pq)^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)-h}$.

La formule elle-même se termine lorsqu'on est arrivé à une valeur de h telle que la valeur suivante serait plus grande que $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

La formule qui vient d'être obtenue est identique, sauf quelques différences d'écriture, à celle que Mr. Delannoy a donnée en 1889 (Congrès de Paris) et qu'il avait déduite de la considération de l'échiquier hexagonal.

2ième Solution. — Si, tout en faisant $\nu = 1$ dans la relation (3), on ne modifie pas la forme de la fonction à développer, on trouve facilement

$$c_{a-1} = 1 - (a-2)\,pq + \frac{(a-3)(a-4)}{1\cdot 2}\,p^2q^2 - \frac{(a-4)(a-5)(a-6)}{1\cdot 2\cdot 3}\,p^3q^3 + \cdots,$$

$$c_{a+b-1} = 1 - (a+b-2)\,pq + \frac{(a+b-3)(a+b-4)}{1\cdot 2}\,p^2q^2 \cdots$$

et par suite

$$y_{a,n} = \frac{1 - (a-2)\,pq + \frac{(a-3)(a-4)}{1\cdot 2}\,p^2q^2 \cdots}{1 - (a+b-2)\,pq + \frac{(a+b-3)(a+b-4)}{1\cdot 2}\,p^2q^2 \cdots}$$

les quantités $(a-2)$, $(a-3)$, $(a-4)$, $\cdots$, $(a+b-2)$, $(a+b-3)$, $(a+b-4)$, $\cdots$ devant être considérées comme nulles lorsqu'elles sont négatives.

1. Si l'on ne veut qu'une valeur numérique, ce système semble assez commode.

Soit, par exemple,

$$a = 3, \quad b = 4, \quad r = 16,$$

ce qui donne

$$a+b = 7, \quad n = r - b = 12, \quad E\left(\frac{n-1}{2}\right) = 5;$$

on a

$$c_{a-1} = 1 - pq, \quad c_{a+b-1} = 1 - 5\,pq + 6\,p^2q^2 - p^5q^5,$$

et on obtient rapidement par une simple division

$$y_{a,n} = 1 + 4\,pq + 14\,p^2q^2 + 47\,p^3q^3 + 155\,p^4q^4 + 507\,p^5q^5,$$

quantité qui, multipliée par p^4, est la probabilité demandée.

2. Si, au contraire, on voulait avoir un résultat général, il faudrait déterminer les expressions des coefficients D_1, D_2, D_3, $\cdots$ qui entrent dans l'équation (4) et cette détermination ne paraît pouvoir se faire que sous la forme de déterminants.

En posant, pour abréger l'écriture,

$$a-2 = A_1, \quad \frac{(a-3)(a-4)}{1\cdot 2} = A_2, \quad \frac{(a-4)(a-5)(a-6)}{1\cdot 2\cdot 3} = A_3, \cdots,$$

$$a+b-2 = B_1, \quad \frac{(a+b-3)(a+b-4)}{1\cdot 2} = B_2, \cdots,$$

Digitized by Google

on a

$$\frac{c_{a-1}}{c_{a+b-1}} = \frac{1 - A_1 pq + A_2 p^2q^2 - \cdots}{1 - B_1 pq + B_2 p^2q^2 - \cdots}$$

et on trouve sans difficulté

$$D_1 = B_1 - A_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} +1 & +(B_1 - A_1) \\ -B_1 & -(B_2 - A_2) \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} +1 & 0 & +(B_1 - A_1) \\ -B_1 & +1 & -(B_2 - A_2) \\ +B_2 & -B_1 & +(B_3 - A_3) \end{vmatrix},$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 & +(B_1 - A_1) \\ -B_1 & +1 & 0 & -(B_2 - A_2) \\ +B_2 & -B_1 & +1 & +(B_3 - A_3) \\ -B_3 & +B_2 & -B_1 & -(B_4 - A_4) \end{vmatrix}, \quad D_5 = \begin{vmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & +(B_1 - A_1) \\ -B_1 & +1 & 0 & 0 & -(B_2 - A_2) \\ +B_2 & -B_1 & +1 & 0 & +(B_3 - A_3) \\ -B_3 & +B_2 & -B_1 & +1 & -(B_4 - A_4) \\ +B_4 & -B_3 & +B_2 & -B_1 & +(B_5 - A_5) \end{vmatrix}$$

. . . . . .

(Dans le calcul des différences $(B_1 - A_1)$, $(B_2 - A_2)$, $\cdots$ il faut avoir égard à la remarque faite précédemment au sujet des quantités $(a-2)$, $(a-3)$, $\cdots$ $(a+b-2)$, $(a+b-3)$, $\cdots$ et les considérer comme nulles lorsqu'elles sont négatives.)

On obtient de cette manière la formule

$$\Pi = p^b \left[1 + (B_1 - A_1) pq + \{ B_1 (B_1 - A_1) - (B_2 - A_2) \} p^2q^2 + \cdots + D_{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (pq)^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \right].$$

Poitiers, 10 Juin 1901.

---

4. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu I E. Differenzenrechnung.

I. S. 920, zu Fufsnote 6. Hier könnten noch meine „Gleichungen zwischen den Anfangsgliedern von Differenzreihen etc." (Journ. f. Mathem. Bd. **123**, 1901, S. 210) erwähnt werden.

I. S. 923, zu Gleichung 17. Die Funktion $f(x)$ mufs nebst ihren n ersten Ableitungen auf der Strecke vom kleinsten bis zum gröfsten der Argumente a, $a+h$, $\cdots$, $a+nh$, x *stetig* sein.

I. S. 935. Zu Fufsnote 29 ist noch hinzuzufügen: Über Differenzengleichungen, welche sich auf die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe zurückführen lassen, siehe Wold. Heymann: „Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differenzengleichungen", Leipzig 1891. Auch gelingt darin dem Verfasser die Herstellung des Integrals der Riccatischen Differenzengleichung als Quotient zweier

Digitized by Google

hypergeometrischen Reihen (vergl. darüber noch des Verfassers Aufsatz im J. f. Math., Bd. **122**, 1900, S. 164). Weiterhin bespricht der Verfasser nicht-homogene lineare Differenzengleichungen (mit Benutzung von Supplementintegralen) und Systeme simultaner Gleichungen und giebt Sätze über die Determinante der Integrale linearer Differenzengleichungen.

Königsberg i. Pr. L. Saalschütz.

I. S. 112, Anm. 298. Die *Arithmetica infinitorum* des Wallis erschien 1655 (nicht 1659).

I. S. 228, Anm. 1. An der fraglichen Stelle der *Acta Eruditorum* (statt p. 306 lies p. 316) wendet Leibniz das Wort „Funktion" in einer wesentlich anderen Bedeutung an (vergl. II, S. 3).

I. S. 230, Anm. 16. Die Worte: „unvollst. schon Lond. Trans. 1718" beziehen sich auf die Abhandlung *Methodus differentialis Neutoniana illustrata*, die 1719 (nicht 1718) in den *Philos. Trans.* erschien.

I. S. 231, Z. 2—3. Die betreffende Methode rührt nicht von Stirling, sondern von Newton her (vergl. I, S. 809).

I. S. 500, Anm. 63. Die *Algebra* des R. Bombelli erschien 1572; einige Exemplare haben auf dem Titelblatt die Jahreszahl 1579 (vergl. *Biblioth. Mathem.* 1_3, 1900, S. 277).

I. S. 503, Z. 5. C. Malagola hat 1878 nachgewiesen, dafs Scipione del Ferro nicht 1525, sondern 1526 starb.

I. S. 579, Z. 21. Es ist ein wenig uneigentlich Ibn Albannâ als Zeitgenosse von Fibonacci zu bezeichnen, da dieser 1202—1228 litterarisch thätig war und dann aus der Geschichte verschwindet, während jener um 1258 geboren wurde und um 1340 starb.

I. S. 920, Anm. 7. Dafs der Satz $\Delta^3(x^3) = 6$ lange Zeit vor Leibniz bekannt war, geht aus Faulhabers *Academia algebrae* (Augsburg 1631) hervor. Hier giebt Faulhaber (Blatt D_3^v) an, dafs $\Delta^{30}(x^{30})$ konstant ist, und bemerkt, dafs Matthias Bernegger in seinem *Manuale mathematicum* (Strafsburg 1619) den Satz $\Delta^3(x^3) =$ konstant ausgesprochen hat (vergl. Kästner, *Geschichte der Mathem.* III, 145).

Stockholm. G. Eneström.

---

5. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Andoyer, H., Théorie de la lune. Scientia 17. Paris 1902, C. Naud.

Astronomischer Kalender für 1901. Wien, C. Gerold's Sohn. Abhandlungen: G. v. Niessl, Über die Rolle der Atmosphäre im Meteorphänomen. — J. Rheden, Über die Rotationszeit des Planeten Venus. — F. Bischof, Über die Sonnenfinsternis vom 11. Nov. 1901. M. 2.40.

Astronomischer Kalender für 1902. Wien, C. Gerold. Abhandlungen: J. Holetschek, Über die Nova Persei vom Februar 1901. — C. Hillebrand, Über eine Eigentümlichkeit der beiden diesjährigen Mondfinsternisse. — E. Weifs, Neue Planeten und Kometen. M. 2.40.

Astronomisches Lexikon. Auf Grundlage der neuesten Forschungen, besonders der Spektral-Analyse und der Himmels-Photographie, bearbeitet von August Krisch. 20 Lieferungen je 0,50 M. Wien 1902, A. Hartleben.

Digitized by Google

Bachmann, P., Niedere Zahlentheorie. Erster Teil. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 14.

Beau, O., Die Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse. Sorau 1901, E. Zeidler.

Bénard, H., Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide propageant de la chaleur par convection, en régime permanent. Thèse prés. à la Fac. des Sc. de Paris. Gauthier-Villars 1901, Paris.

Bock und Poske, Hauptsätze der Arithmetik. Berlin 1902, M. Rockenstein.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Dritter Band. Zweite Auflage. Dritte Abteilung. (1725—1758). Leipzig 1901, B. G. Teubner. M. 12.40.

Doehlemann, K., Geometrische Transformationen I. (Sammlung Schubert.) Leipzig 1902, Göschen. M. 10.

Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Aus dem Gebiete der Mechanik sind bis jetzt erschienen:

IV_1. Die Prinzipien der rationellen Mechanik. Von A. Voss.	Band IV. 1. Heft 1.	M. 3.40.
IV_2. Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Von E. Timerding.		
IV_3. Kinematik. Von A. Schoenflies und M. Grübler.	Band IV. 1. Heft 2.	M. 4.60.
IV_{14}. Geometrische Grundbegriffe der Mechanik der deformierbaren Körper. Von M. Abraham.		
IV_{15}. Physikalische Grundlegung der Hydrodynamik. Von H. Love.	Band IV. 2. Heft 1.	M. 3.80.
IV_{16}. Theoretische Ausführungen. Von H. Love.		

Exner, F. und Haschek, E., Wellenlängen-Tabellen für spektral-analytische Untersuchungen auf Grund der ultravioletten Funkenspektren der Elemente. Leipzig 1902, F. Deuticke. M. 16.

Flor, O., Lösung des Problems: Die Quadratur des Kreises. Berichtigung der Zahl π. 2. Ausg. Riga 1901, Jonck u. Poliewsky. M. 2.

Fortschritte der Physik im Jahre 1899, dargestellt von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft. 55. Jahrgang. Braunschweig 1900, Vieweg und Sohn. M. 80.

Geissler, K., Die Grundsätze und das Wesen des Unendlichen in der Mathematik und Philosophie. Leipzig 1902, B. G. Teubner.

Goursat, E., Cours d'analyse mathématique I. Paris 1902, Gauthier-Villars. VI + 620 S.

Godefroy, M., Théorie élémentaire des séries. Paris 1903, Gauthier-Villars.

Greve, E., Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Glogau 1901, C. Flemming.

Günther, S., Astronomische Geographie. Sammlung Göschen. Leipzig 1902, Göschen. M. 0.80.

Gutsche, O., Grundrifs der analytischen Geometrie der Ebene. Progr. d. Ob.-Realsch. Breslau 1901.

Hagen, G., Synopsis der höheren Mathematik. $III_{1,2}$ Differential- und Integralrechnung. Berlin 1900, L. Dames. à M. 5.

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Leipzig und Berlin 1902, B. G. Teubner. M. 1.

Hamel, G., Über die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind. Diss. Göttingen 1901.

Hassert, K., Die Polarforschung. Geschichte der Entdeckungsreisen zum Nord- und Südpol von den ältesten Zeiten bis zur Gegenwart. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 1.25.

Hentschel, O., Ausführung einiger konformen Abbildungen der Parabel auf den Kreis und unendlich lange Parallelstreifen. Leipzig 1900, G. Fock. M. 1.20.

Hertzer, H., Zehn Aufgaben für Parallelperspektive und parallelperspektivische Schattenkonstruktion. Berlin 1902, A. Seydel. M. 0.75.

Heun, K., Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik. Leipzig 1902, Göschen. M. 3.50.

Digitized by Google

Hippauf, H., Die Rectification und Quadratur des Kreises. Breslau 1902, G. Korn. M. 1.50.

Huntington, V., Über die Grundoperationen an absoluten und komplexen Gröfsen in geometrischer Behandlung. Braunschweig, 1901, Vieweg u. Sohn. M. 1.50.

Kinkelin, H., Quadraturen. Progr. d. Ob.-Realsch. Basel 1902.

Kitt, M., Grundlinien der politischen Arithmetik. I. Teil: Zinseszins- und Rentenrechnung. Leipzig, 1901, B. G. Teubner. M. 3.

Laisant, C., A. et Bull, Ad., Annuaire des Mathématiciens 1901—1902. Paris 1901, C. Naud.

Langenscheidt, G., Mafse, Gewichte und Münzen. Sonderabdruck aus dem deutsch-englischen Wörterbuche von Muret-Sanders. Berlin 1901, Langenscheidt.

Launer, A., Naturlehre. Wien 1902, J. Roth. M. 4.50.

Loria, G., Spezielle und algebraische ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Übers. von Fr. Schütte. Zweite Hälfte. Leipzig 1902, B. G. Teubner.

Müller und Hufe, Die Mathematik auf den Gymnasien und Realschulen. B. II Oberstufe. Abteilung 2. Leipzig und Berlin 1902, B. G. Teubner. M. 2.40.

Musmacher, C., Kurze Biographien berühmter Physiker. Freiburg i. B. 1902, Herder. M. 1.80.

Ocagne, M. d', Über die Nomographie. Eine Einführung in dieses Gebiet von F. Schilling. Leipzig 1900, B. G. Teubner. M. 2.

Rapports présentés au Congrès international de Physique. Tomes I, II, III. Paris 1900, Gauthier-Villars.

Richarz, F., Neuere Fortschritte auf dem Gebiete der Elektrizität. 2. Aufl. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 1.50.

Rohrbach, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln. Gotha 1902, Thienemann. M. 0.80.

Sapolsky, L., Über die Theorie der relativ-Abelschen kubischen Zahlkörper. 2 Teile. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 6.

Schlömilch, O., Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Teil. Vierte Auflage von R. Henke. Leipzig 1900, B. G. Teubner. M. 9.

Schubert, H., Niedere Analysis I. (Sammlung Schubert.) Leipzig 1902, Göschen. M. 3.60.

Schubert, H., Neuer ewiger Kalender zur Bestimmung des Wochentags für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt. Leipzig 1902, Göschen. M. 0.50.

Tannery, J. et Molk, J., Eléments de la Théorie des fonctions elliptiques IV. Paris 1902, Gauthier-Villars.

Torka, J., Grundlage der Getriebelehre. Berlin 1900, R. Mewes.

Vanderen, P., Etude géométrique des lignes et des surfaces en un point ordinaire. Bruxelles 1902, J. Lebègue.

Verhandlungen der 46. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner in Strafsburg 1901. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 6.

Very, F. V., The Solar Constant. Washington 1901, Weather Bureau.

Zepf, K., Die Hauptwirkungen des elektrischen Stromes. Freiburg i. B. 1902, Selbstverlag. M. 0.50.

Zindler, K., Liniengeometrie mit Anwendung I. (Sammlung Schubert.) Leipzig 1902, Göschen. M. 12.

Zühlke, P., Über die geodätischen Linien und Dreiecke auf den Flächen konstanten Krümmungsmafses und ihre Beziehungen zur sogenannten Nicht-Euklidischen Geometrie. Rostock. Dissert. Berlin 1902, R. Kühn.

Digitized by Google

Theorie der reellen quadratischen Irrationalzahlen.

Von H. Weber in Strafsburg.

§ 1. Die Formen der quadratischen Irrationalzahlen.

Jede reelle quadratische Irrationalzahl ω ist in dem Ausdruck enthalten

$$\omega = \frac{a + b\sqrt{d}}{c}, \tag{1}$$

worin a, b, c, d *ganze Zahlen* sind, d *positiv und keine Quadratzahl*. Wir können annehmen, dafs die Zahl d keinen quadratischen Teiler hat. Wenn wir dann $\sqrt{d}$ positiv annehmen, und a, b, c ohne gemeinschaftlichen Teiler voraussetzen, so sind die Zahlen a, b, c bis auf eine gemeinsame Vorzeichenänderung durch ω selbst eindeutig bestimmt. Um auch das Vorzeichen zu bestimmen, wollen wir noch b als positiv voraussetzen.

Jede Zahl ω lässt sich auf *unendlich viele Arten* in die *Normalform setzen*, wenn wir unter *Normalform einer quadratischen Irrationalzahl* den Ausdruck verstehen

$$\omega = \frac{\sqrt{D} + y}{2z}, \tag{2}$$

worin y, z ganze Zahlen, D eine positive ganze Zahl, die kein Quadrat ist und der Bedingung genügt:

$$D \equiv y^2 \pmod{4z}, \tag{3}$$

und $\sqrt{D}$ positiv genommen ist.

Nach (3) können wir eine ganze Zahl x bestimmen, so dafs

$$D = y^2 + 4xz \tag{4}$$

wird, und erhalten aus (2) noch

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\sqrt{D} - y}{2x}, \tag{5}$$

also gleichzeitig eine Normalform für $1/\omega$.

Digitized by Google

Um nun aber eine gegebene Zahl ω in die Normalform zu bringen, erweitern wir den Bruch (1) durch einen ganzzahligen positiven Faktor t, den wir den Kongruenzen

$$\begin{aligned} ct &\equiv 0 \pmod 2, \\ t(b^2d - a^2) &\equiv 0 \pmod{2c} \end{aligned} \tag{6}$$

gemäfs bestimmen, und dann setzen wir

$$y = at, \quad 2z = ct, \quad \sqrt{D} = tb\sqrt{d}, \tag{7}$$

$$2cx = t(b^2d - a^2), \tag{8}$$

wodurch x, y, z als ganze Zahlen bestimmt sind.

Die Kongruenzen (6) können immer durch unendlich viele positive Zahlen t befriedigt werden. Unter diesen wird eine, die wir mit t_0 bezeichnen, die kleinste sein, und die übrigen sind die Vielfachen dieser kleinsten:

$$t = mt_0,$$

worin m eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Bezeichnen wir mit x_0, y_0, z_0, D_0 die Werte, die sich aus (7) und (8) für x, y, z, D ergeben, wenn $t = t_0$ gesetzt wird, so erhalten wir allgemein:

$$x = mx_0, \quad y = my_0, \quad z = mz_0, \tag{9}$$

$$D = m^2D_0. \tag{10}$$

Wir können leicht beweisen, *daſs x_0, y_0, z_0 ohne gemeinschaftlichen Teiler sind.* Denn aus (7), (8) ergiebt sich:

$$y_0 = at_0, \tag{11}$$

$$2z_0 = ct_0, \tag{12}$$

$$2cx_0 = (b^2d - a^2)t_0. \tag{13}$$

Nehmen wir nun an, dafs x_0, y_0, z_0 durch eine Primzahl q teilbar seien, so ist t_0 nicht durch q teilbar, weil sonst nach (12) und (13) die Zahl $t = t_0/q$ den Kongruenzen (6) genügen würde, und dies widerspricht der Annahme, dafs t_0 die kleinste positive Lösung dieser Kongruenzen sei. Folglich sind a und c durch q teilbar (nach (11) und (12)), und nach (13) ist $b^2d - a^2$ durch q^2 teilbar. Mithin ist auch b^2d durch q^2 teilbar. Da aber d durch kein Quadrat teilbar ist, so mufs auch b durch q teilbar sein. Es widerspricht dies aber der Annahme, dafs a, b, c keinen gemeinschaftlichen Teiler haben sollten.

Wir wollen den Ausdruck (2) eine *Normalform* oder auch eine *Form der quadratischen Irrationalzahl* ω und D *die Diskriminante,*

Digitized by Google

m den *Teiler* dieser Form nennen.[1]) Unter diesen Formen ist eine, deren Teiler gleich 1 ist, und diese nennen wir die *primitive Form von* ω. Die Diskriminante D_0 dieser Form heifst auch die *Diskriminante der Zahl* ω.

Die Diskriminanten der verschiedenen Formen der Zahl ω stehen in quadratischem Verhältnis zu einander.

Diskriminante kann, wie die Gleichung (4) zeigt, nicht jede beliebige Zahl sein, sondern sie mufs entweder durch 4 teilbar sein, wenn y gerade ist, oder, durch 4 geteilt, den Rest 1 lassen, wenn y ungerade ist, also

$$D \equiv 0 \quad \text{oder} \equiv 1 \pmod 4, \tag{14}$$

Dies gilt auch von der Diskriminante D_0 der Zahl ω selbst, und wir unterscheiden

Zahlen erster Art $\quad D_0 \equiv 0$,

Zahlen zweiter Art $\quad D_0 \equiv 1 \pmod 4$.

Bei den Zahlen der ersten Art sind alle Diskriminanten durch 4 teilbar, bei den Zahlen der zweiten Art nur die, deren Teiler gerade ist.

Wir setzen, um die Abhängigkeit der Form von den Zahlen x, y, z anzudeuten

$$\omega = \{x, y, z\}. \tag{15}$$

Wir haben bis jetzt gesehen, dafs jede quadratische Irrationalzahl unendlich viele Formen und also auch unendlich viele Diskriminanten hat. Tiefer liegt die umgekehrte Frage, mit der wir uns jetzt zu beschäftigen haben, ob es zu jeder Diskriminante, d. h. zu jeder der Bedingung (14) genügenden Zahl D quadratische Irrationalzahlen giebt, und in welcher Beziehung diese zu einander stehen.

§ 2. Reduzierte Zahlen.

Man erhält zu jeder quadratischen Irrationalzahl ω die konjugierte Zahl ω', wenn man der Quadratwurzel das entgegengesetzte Zeichen giebt. Es ist also nach § 1 (2), (5)

$$\omega = \frac{\sqrt{D} + y}{2z}, \quad \omega' = \frac{\sqrt{D} - y}{-2z}, \quad -\frac{1}{\omega'} = \frac{\sqrt{D} + y}{2x}, \tag{1}$$

1) Diese Ausdrucksweise wird wohl kein Bedenken erregen. Sie wäre etwa dem Ausdruck zu vergleichen: $^4/_6$, $^6/_9$, $^8/_{12}$, ... sind Formen des Bruches $^2/_3$ und $^2/_3$ ist die primitive Form dieser Zahl. Der Anklang an die *„quadratischen Formen"* nach Gaufs ist hier eher als ein Vorzug zu betrachten. In der That ist $(x, y, -z)$ oder $(-x, -y, z)$ eine *quadratische Form*, deren Wurzel ω ist, wenn man

$$z\omega^2 - y\omega - x = 0$$

setzt.

Digitized by Google

und wenn wir daher

$$\omega = \{x, y, z\}$$

setzen, so ist

$$\omega' = \{-x, -y, -z\}, \quad -\frac{1}{\omega'} = \{z, y, x\}. \tag{2}$$

Das Produkt $\omega\omega'$ heifst die *Norm der Zahl* ω und wird mit $N(\omega)$ bezeichnet.

Die Zahl ω heifst reduziert, wenn sie selbst positiv und gröfser als 1, die konjugierte Zahl ω' dagegen negativ und dem absoluten Werte nach kleiner als 1 ist, wenn also

$$\omega > 1, \quad 0 > \omega' > -1. \tag{3}$$

Wenn ω reduziert ist, so ist ω' nicht, dagegen $-1/\omega'$ reduziert. *Die Norm einer reduzierten Zahl ist stets negativ.*

Nach (3) ergiebt sich aus (1) die Bedingung für die *reduzierte* Zahl ω:

$$\frac{\sqrt{D}+y}{2z} > 1 > \frac{\sqrt{D}-y}{2z} > 0,$$

und daraus folgt zunächst, dafs y und z gleiche Vorzeichen haben müssen, und sodann, da $(\sqrt{D}-y)/2z$ positiv sein soll, dafs y und z positiv sein müssen. Demnach ist:

$$0 < \sqrt{D} - y < 2z < \sqrt{D} + y \tag{4}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für eine reduzierte Zahl ω. Man kann aber dieser Bedingung auch die Form geben

$$0 < \sqrt{D} - y < 2x < \sqrt{D} + y. \tag{5}$$

Aus (4) folgt (5) und umgekehrt; denn multipliziert man die Ungleichung $2z < \sqrt{D} + y$ mit dem positiven Faktor $\sqrt{D} - y$, so folgt $2z(\sqrt{D}-y) < D - y^2 = 4xz$, also $\sqrt{D} - y < 2x$, und multipliziert man $\sqrt{D} - y < 2z$ mit $\sqrt{D} + y$, so ergiebt sich $2x < \sqrt{D} + y$. Die Bedingungen (4), (5) sind unabhängig von der besonderen Form von ω, die wir zu Grunde legen, und wenn also eine Zahl ω reduziert ist, sind auch alle ihre *Formen reduziert*, wobei unter einer reduzierten Form $\{x, y, z\}$ eine solche verstanden ist, in der die Zahlen x, y, z der Bedingung (4) oder (5) genügen.

Wir beweisen den Satz:

1. *Zu jeder Diskriminante D giebt es nur eine endliche Anzahl reduzierter Formen, um so mehr also auch nur eine endliche Anzahl reduzierter Zahlen.*

Digitized by Google

Zu jeder positiven Diskriminante D giebt es eine bestimmte ganze positive Zahl λ, die durch die Forderungen

$$\lambda \equiv D \pmod 2, \quad \lambda < \sqrt{D} < \lambda + 2 \tag{6}$$

bestimmt ist. Es ist nämlich λ die gröfste in $\sqrt{D}$ enthaltene gerade oder ungerade Zahl, je nachdem D gerade oder ungerade ist.

Da für eine reduzierte Form $\sqrt{D} - y$ positiv sein mufs, so kann y nur einen der folgenden Werte haben:

$$\begin{cases} y = 2, 4, 6, \ldots \lambda, & D \equiv 0 \pmod 4, \\ y = 1, 3, 5, \ldots \lambda, & D \equiv 1 \pmod 4, \end{cases} \tag{7}$$

deren Anzahl $\frac{1}{2}\lambda$ oder $\frac{1}{2}(\lambda + 1)$ beträgt. Für jedes der hiernach zulässigen y zerlegt man $\frac{1}{4}(D - y^2)$ auf alle mögliche Arten in zwei Faktoren und behält von allen diesen Zerlegungen nur solche bei, deren beide Faktoren zwischen den Grenzen (einschliefslich)

$$\frac{\lambda - y}{2} + 1, \quad \frac{\lambda + y}{2} \tag{8}$$

gelegen sind. Sind diese beiden Faktoren von einander verschieden, so kann man jeden von ihnen für x, den andern für z setzen.

Unter den so bestimmten reduzierten Formen führen nur die, deren Zahlen x, y, z keinen gemeinschaftlichen Teiler haben, zu *Irrationalzahlen* mit der Diskriminante D.

Haben die Zahlen x, y, z den gröfsten gemeinschaftlichen Teiler m, so erhält man *Formen* mit der Diskriminante D und dem Teiler m, und die entsprechenden Irrationalzahlen haben die Diskriminante D / m^2.

Zu jeder positiven Diskriminante D giebt es mindestens eine reduzierte Zahl, nämlich

$$\left\{\frac{D - \lambda^2}{4}, \lambda, 1\right\} = \frac{\lambda + \sqrt{D}}{2}. \tag{9}$$

Dafs diese Zahl reduziert ist, ergiebt sich aus (6), wonach

$$\sqrt{D} - \lambda < 2 < \sqrt{D} + \lambda,$$

da λ mindestens $= 1$ und $\sqrt{D} > 1$ ist.

Nehmen wir beispielsweise die Diskriminante

$$D = 756 = 4 \cdot 9 \cdot 21.$$

Digitized by Google

Es ist $\lambda = 26$, und die verschiedenen reduzierten Formen entnimmt man aus folgender Tabelle:

y	$\frac{1}{4}(D - y^2)$	Grenzen für x, z.		x. z
2	188	13	14	
4	185	12	15	
6	180	11	16	12. 15
8	173	10	17	
10	164	9	18	
12	153	8	19	9. 17
14	140	7	20	7. 20, 10. 14
16	125	6	21	
18	108	5	22	6. 18, 9. 12
20	89	4	23	
22	68	3	24	4. 17
24	45	2	25	3. 15, 5. 9
26	20	1	26	1. 20, 2. 10, 4. 5.

Wir erhalten also die primitiven reduzierten Formen:

$$\{9, 12, 17\}, \quad \{17, 12, 9\},$$
$$\{7, 14, 20\}, \quad \{20, 14, 7\},$$
$$\{4, 22, 17\}, \quad \{17, 22, 4\},$$
$$\{5, 24, 9\}, \quad \{9, 24, 5\},$$
$$\{1, 26, 20\}, \quad \{20, 26, 1\},$$
$$\{4, 26, 5\}, \quad \{5, 26, 4\};$$

die Formen mit dem Teiler 2:

$$\{10, 14, 14\}, \quad \{14, 14, 10\} = \{5, 7, 7\}, \quad \{7, 7, 5\},$$
$$\{2, 26, 10\}, \quad \{10, 26, 2\} = \{1, 13, 5\}, \quad \{5, 13, 1\};$$

die Formen mit dem Teiler 3:

$$\{12, 6, 15\}, \quad \{15, 6, 12\} = \{4, 2, 5\}, \quad \{5, 2, 4\},$$
$$\{9, 18, 12\}, \quad \{12, 18, 9\} = \{3, 6, 4\}, \quad \{4, 6, 3\},$$
$$\{3, 24, 15\}, \quad \{15, 24, 3\} = \{1, 8, 5\}, \quad \{5, 8, 1\}$$

und endlich die Formen mit dem Teiler 6:

$$\{6, 18, 18\}, \quad \{18, 18, 6\} = \{1, 3, 3\}, \quad \{3, 3, 1\},$$

wobei zu den nicht primitiven Formen immer noch die entsprechenden primitiven Formen der niedrigeren Diskriminante angegeben sind.

Digitized by Google

§ 3. Die Perioden der reduzierten Zahlen.

Es sei jetzt ω eine *reduzierte* quadratische Irrationalzahl mit der Diskriminante $D = y^2 + 4xz$ und der primitiven Form $\{x, y, z\}$, und a sei eine ganze Zahl. Dann ist

$$\omega_1 = \frac{1}{\omega - a} \tag{1}$$

ebenfalls eine quadratische Irrationalzahl mit der Diskriminante D. Denn ist

$$\omega = \frac{y + \sqrt{D}}{2z}, \tag{2}$$

so folgt

$$\omega_1 = \frac{2z}{y - 2az + \sqrt{D}} = \frac{2az - y + \sqrt{D}}{2(x + ay - a^2z)}, \tag{3}$$

und folglich

$$\omega_1 = \{x_1, y_1, z_1\}, \qquad D = y_1^2 + 4x_1z_1, \tag{4}$$

wenn

$$\begin{cases} x_1 = z, \\ y_1 = 2az - y, \\ z_1 = x + ay - a^2z. \end{cases} \tag{5}$$

Und wenn also x, y, z ohne gemeinsamen Teiler sind, so sind es auch x_1, y_1, z_1.

Nun ist, weil ω reduziert ist, ω_1 dann und nur dann gröfser als 1, wenn

$$a < \omega < a + 1 \tag{6}$$

ist, und dann ist auch

$$-\frac{1}{\omega_1'} = a - \omega' \tag{7}$$

gröfser als 1, also ω_1 gleichfalls reduziert. *Wenn also ω_1 reduziert sein soll, so mufs a die gröfste in ω enthaltene ganze Zahl sein, und sie ist dann auch nach* (7) *die in $-\frac{1}{\omega_1'}$ enthaltene gröfste ganze Zahl*, und die reduzierte Zahl $\omega_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ ist aufser durch die Diskriminante D vollständig durch die beiden Bedingungen

$$x_1 = z, \qquad y_1 + y \equiv 0 \pmod{2z} \tag{8}$$

bestimmt. Denn nehmen wir diese beiden Bedingungen als erfüllt an und setzen $y_1 + y = 2az$, so folgt

$$\omega = \frac{y + \sqrt{D}}{2z}, \qquad \omega_1 = \frac{2z}{\sqrt{D} - y_1} = \frac{1}{\omega - a}.$$

Digitized by Google

Und folglich mufs, wenn ω und ω_1 beide reduziert sein sollen, a die gröfste in ω enthaltene ganze Zahl sein.

Man nennt zwei reduzierte Zahlen derselben Diskriminante

$$\{x, y, x_1\}, \{x_1, y_1, x_2\},$$

in denen $y + y_1$ durch $2x_1$ teilbar ist, *benachbart*, und zwar ist die zweite von ihnen der ersten *nach rechts*, die erste der zweiten *nach links* benachbart, und wir haben also damit den Satz:

Jede reduzierte Zahl der Determinante D hat eine und nur eine nach rechts und eine und nur eine nach links benachbarte reduzierte Zahl.

Da die Anzahl der reduzierten Zahlen der Diskriminante D endlich ist, so lassen sich diese Zahlen in *Perioden*

$$\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1} \tag{9}$$

anordnen, die man dadurch erhält, dafs man eine beliebige dieser Zahlen herausgreift, die nach rechts benachbarte für ω_1 nimmt, hierauf die zu ω_1 nach rechts benachbarte für ω_2 nimmt, und damit fortfährt, bis man nach ω_{n-1} zu einer schon dagewesenen Zahl gelangt. Da aber jede dieser Zahlen auch die vorausgegangene bestimmt, so kann die zuerst wiederkehrende nur ω selbst sein, und dann wiederholen sich die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ in derselben Reihenfolge.

Sind durch eine solche Periode noch nicht alle reduzierten Zahlen der Diskriminante D erschöpft, so bildet man auf dem gleichen Wege eine zweite Periode und fährt damit fort, bis alle diese Zahlen in den Perioden untergebracht sind.

Wir wollen die Periode (9) in der Form annehmen:

$$\{x, y, x_1\}\{x_1, y_1, x_2\}\{x_2, y_2, x_3\}\ldots\{x_{n-1}, y_{n-1}, x\} \tag{10}$$

und

$$y + y_1 = 2ax_1, \quad y_1 + y_2 = 2a_1x_2, \ldots$$

setzen; dann wiederholen sich die Zahlen

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \tag{11}$$

gleichfalls periodisch und geben die Entwicklung der Zahl ω in einen *periodischen Kettenbruch*

$$\omega = [a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}]. \tag{12}$$

Die Kettenbruchentwicklungen für $\omega_1, \omega_2, \ldots$ haben dieselbe Periode, nur mit verschobenem Anfang.

Digitized by Google

In unserem Beispiel $D = 756$ erhalten wir die Perioden

$$(13)\quad \begin{cases} \{9,\ 12,\ 17\},\ \{17,\ 22,\ 4\},\ \{4,\ 26,\ 5\ \},\ \{5,\ 24,\ 9\ \}, \\ \{17,\ 12,\ 9\ \},\ \{9,\ 24,\ 5\},\ \{5,\ 26,\ 4\ \},\ \{4,\ 22,\ 17\}, \\ \{7,\ 14,\ 20\},\ \{20,\ 26,\ 1\},\ \{1,\ 26,\ 20\},\ \{20,\ 14,\ 7\ \}, \end{cases}$$

und daraus für die Zahl a die Perioden

$$[1,\ 6,\ 5,\ 2],$$
$$[2,\ 5,\ 6,\ 1],$$
$$[1,\ 26,\ 1,\ 2],$$

woraus man die periodischen Kettenbrüche für die Zahlen

$$\frac{6+3\sqrt{21}}{17},\qquad \frac{6+3\sqrt{21}}{9},\qquad \frac{7+3\sqrt{21}}{20}$$

erhält. Für die Diskriminante $D = 21$ erhält man nur die eine Periode

$$\{3,\ 3,\ 1\},\ \{1, 3, 3\},$$

also den Kettenbruch

$$[3,\ 1]$$

für die Zahl

$$\frac{3+\sqrt{21}}{2}.$$

§ 4. Die Einheiten.

Unter einer *Einheit* der Diskriminante D verstehen wir eine Zahl von der Form

$$(1)\qquad \vartheta = \frac{t+u\sqrt{D}}{2},$$

in der t und u ganze Zahlen sind, deren Norm entweder $= +1$ oder $= -1$ ist, also

$$(2)\qquad \frac{t^2-u^2D}{4} = \pm 1.$$

Hiernach ist

$$(3)\qquad \frac{t-u\sqrt{D}}{2} = \pm\,\vartheta^{-1},$$

vom Zeichen abgesehen, der reziproke Wert von ϑ, und nach dem Satze, daſs die Norm eines Produktes gleich dem Produkt der Normen der Faktoren ist, ist das *Produkt zweier Einheiten derselben Diskriminante wieder eine Einheit dieser Diskriminante.* Jede Potenz einer Einheit mit positivem oder negativem Exponenten ist daher auch wieder eine Einheit.

Digitized by Google

Unter diesen Einheiten sind die Zahlen ± 1 enthalten. Die übrigen gehören zu je vieren zusammen; nämlich

$$\vartheta,\ -\vartheta,\ \vartheta^{-1},\ -\vartheta^{-1}, \tag{4}$$

die aus der ersten durch die Zeichenänderungen in den Zahlen t, u hervorgehen. Unter diesen vieren ist immer eine, die positiv und gröfser als 1 ist, und dies ist ϑ selbst, wenn wir t und u positiv annehmen.

Unter den Einheiten, die gröfser als 1 sind, giebt es eine,

$$\theta = \frac{T + U\sqrt{D}}{2}, \tag{5}$$

die unter allen die kleinste ist, und diese entspricht den *kleinsten positiven* Werten $t = T$, $u = U$, die einer der Bedingungen (2) genügen.

Setzen wir nämlich

$$\vartheta = \frac{t + u\sqrt{D}}{2}, \qquad \vartheta_1 = \frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2}$$

mit positiven t, u, t_1, u_1, und nehmen an, es sei $\vartheta_1 > \vartheta$, so mufs (mit einer Ausnahme) $t_1 > t$, $u_1 > u$ sein. Denn die gestellte Forderung verlangt

$$(t_1 - t) + (u_1 - u)\sqrt{D} > 0, \tag{6}$$

und es können also gewifs nicht beide Differenzen $t_1 - t$ und $u_1 - u$ negativ sein. Ferner mufs nach (2) die Differenz

$$t_1^2 - t^2 - (u_1^2 - u^2)D \tag{7}$$

einen der Werte 0, $+8$, -8 haben.

Da D eine Diskriminante, also $\equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist, so ist D mindestens $= 5$. Die Differenzen $t_1^2 - t^2$ und $u_1^2 - u^2$ sind entweder gleich Null oder, dem absoluten Werte nach, $\geqq 3$. Denn es ist $t_1^2 - t^2 = (t_1 - t)(t_1 + t)$, und da t und t_1 von Null verschieden sind, so sind $t_1 - t$ und $t_1 + t$ nicht einander gleich. Sie sind also entweder beide gerade oder beide ungerade ganze Zahlen, und folglich ist 3 der kleinste Wert, den ihr Produkt haben kann. Ebenso ist es mit $u_1^2 - u^2$.

Ist nun $u_1 \gtrless u$, so mufs wegen (6) und (7) $t_1^2 - t^2$ positiv und $\leqq 8$ sein. Es bleiben also die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{cases} t_1^2 - t^2 = 8, & u_1 = u, \\ t_1^2 - t^2 = 3,\ 5, & (u^2 - u_1^2)D = 5,\ 3, \end{cases} \tag{8}$$

von denen aber noch die beiden letzten wegfallen, da $(u^2 - u_1^2)D$,

Digitized by Google

wenn es nicht verschwindet, mindestens gleich 15 sein müfste. Es bleibt also nur

$$t_1 - t = 2, \qquad t_1 + t = 4, \qquad u_1 = u,$$
$$t_1^2 - u^2 D = +4, \qquad t^2 - u^2 D = -4,$$

woraus sich $t = 1$, $u = 1$, $t_1 = 3$, $D = 5$ ergiebt.

Dies ist die oben erwähnte Ausnahme, bei der $u_1 = u$ ist:

$$\vartheta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \vartheta_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}. \tag{9}$$

Es mufs also, von diesem Falle abgesehen, $u_1 > u$ und folglich $(u_1^2 - u^2)D$ mindestens gleich 15 sein, und dann ergiebt sich aus (7), dafs auch $t_1^2 - t^2$ positiv sein mufs. Wir haben also:

Wenn ϑ wächst, so müssen (abgesehen von dem einen Ausnahmefall, in dem u konstant bleibt und t allein wächst) die Zahlen t und u gleichzeitig wachsen.

Die Einheit θ, die unter allen denen, die gröfser als 1 sind, die kleinste ist, heifst die *Fundamental-Einheit der Diskriminante D.* Wir beweisen den Satz:

Alle Einheiten der Diskriminante D sind Potenzen der Fundamental-Einheit, multipliziert mit $+1$ oder mit -1.

Wenn nämlich ϑ irgend eine positive Zahl ist, so giebt es, da $\theta > 1$ ist, immer zwei aufeinander folgende ganze Zahlen n und $n+1$ von der Beschaffenheit, dafs

$$\theta^n \leqq \vartheta < \theta^{n+1},$$

oder was dasselbe ist

$$1 \leqq \vartheta\theta^{-n} < \theta. \tag{10}$$

Ist aber $\vartheta > 1$ eine Einheit der Diskriminante D, so ist auch $\vartheta\theta^{-n} = \theta_1$ eine Einheit, die nach (10) kleiner als θ wäre. Nach der Definition von θ kann sie aber nicht gröfser als 1 sein und mufs daher $= 1$ sein, also $\vartheta = \theta^n$, w. z. b. w.

Die Diskriminanten D zeigen ein verschiedenes Verhalten, nach dem man sie in vier Kategorien einteilen kann.

1) Es kann T *gerade* oder *ungerade* sein.

Ist T gerade, so mufs auch D oder U (oder beide) gerade sein.

2) Ist T ungerade, so ist D und U ungerade, und es folgt aus $T^2 - DU^2 = \pm 4$, dafs $D \equiv 5 \pmod 8$ sein mufs. Es ist aber nicht umgekehrt, wenn diese Bedingung erfüllt ist, T immer ungerade.

Diese beiden Fälle kombinieren sich mit den beiden anderen, dafs die Norm von θ, d. h. $T^2 - DU^2$ positiv oder negativ ist.

Digitized by Google

Wenn $D = ab$ das Produkt zweier relativen Primzahlen ab ist, so kann man in manchen Fällen

$$\theta = (x\sqrt{a} + y\sqrt{b})^2 \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{a} + y\sqrt{b})^2$$

$$\text{oder} = \left(\frac{x\sqrt{a} + y\sqrt{b}}{2}\right)^2$$

setzen, worin x, y ganze Zahlen sind, die dann wesentlich kleiner als T und U ausfallen. Eine solche Reduktion ist aber nur in manchen Fällen möglich, über die Legendre einige Sätze von etwas allgemeinerem Charakter aufgestellt hat. Ein allgemein giltiges Kennzeichen läfst sich dafür nicht angeben. Wir wollen hier nur einige Beispiele für die besprochenen vier Fälle und für diese Zerlegung anführen.

I. T gerade. $N(\theta) = +1$.

$$5 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2, \qquad D = 4.6.$$

$$151 + 20\sqrt{57} = (5\sqrt{3} + 2\sqrt{19})^2, \qquad D = 57.$$

$$50 + 7\sqrt{51} \text{ (keine Zerlegung)}, \qquad D = 4.51.$$

$$28 + 3\sqrt{87} = \tfrac{1}{2}(3\sqrt{3} + \sqrt{29})^2, \qquad D = 4.87.$$

II. T gerade. $N\theta = -1$.

$$\theta = 1 + \sqrt{2}, \qquad D = 4.2.$$

$$\theta = 6 + \sqrt{37}, \qquad D = 37.$$

$$\theta = 99 + 13\sqrt{58} \qquad D = 4.58.$$

$$\theta = 8 + \sqrt{65}, \qquad D = 65.$$

$$\theta = 5604 + 569\sqrt{97}, \qquad D = 97.$$

$$\theta = 99 \quad + 10\ \sqrt{98}, \qquad D = 4.98.$$

III. T ungerade. $N(\theta) = +1$.

$$\theta = \frac{5 + \sqrt{21}}{2}, \qquad D = 21.$$

$$\theta = \frac{25 + 3\sqrt{69}}{2} = \tfrac{1}{4}(3\sqrt{3} + \sqrt{23})^2, \qquad D = 69.$$

$$\theta = \frac{9 + \sqrt{77}}{2} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{7} + \sqrt{11})^2, \qquad D = 77.$$

Digitized by Google

IV. T ungerade. $N\theta = -1$.

$$\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad D = 5.$$

$$\theta = \frac{7+\sqrt{53}}{2}, \qquad D = 53.$$

$$\theta = \frac{9+\sqrt{85}}{2}, \qquad D = 85.^{1})$$

§ 5. Berechnung der Einheiten aus den Kettenbruchentwicklungen.

Man kann bekanntlich die Einheiten der Diskriminante D aus den Kettenbruchentwicklungen der reduzierten Zahlen ableiten. Wenn nämlich

$$\omega = \frac{y+\sqrt{D}}{2z} \tag{1}$$

eine reduzierte Zahl der Diskriminante D ist, wenn also $D = y^2 - 4xz$ und x, y, z ohne gemeinsamen Teiler sind, so läfst sich, wie wir gesehen haben, diese Zahl durch einen periodischen Kettenbruch

$$\omega = [a, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}] \tag{2}$$

darstellen. Die Zahl n wollen wir die *Länge der Periode* nennen. Jedes Vielfache m von n ist dann gleichfalls die Länge einer Periode, und es ist also, wenn P_r, Q_r Zähler und Nenner der Näherungsbrüche sind, nach den bekannten Sätzen über Kettenbrüche:

$$\begin{aligned}\omega &= a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{\omega}}}} \\ &= \frac{P_m\omega + P_{m-1}}{Q_m\omega + Q_{m-1}}.\end{aligned} \tag{3}$$

Hierin sind P_m, Q_m, P_{m-1}, Q_{m-1} *positive ganze Zahlen*, die der Gleichung

$$P_mQ_{m-1} - Q_mP_{m-1} = (-1)^m \tag{4}$$

genügen.

1) Reiches Material zu Beispielen findet man in Legendres Zahlentheorie (Deutsch von Maser, Leipzig 1886); Degen, Canon Pellianus (Kopenhagen 1827); Cayley, Journ. für Math. **58.**

Digitized by Google

Aus (3) erhält man die quadratische Gleichung für ω:

$$\omega^2 Q_m - (P_m - Q_{m-1})\omega - P_{m-1} = 0 \tag{5}$$

und dann durch Auflösung:

$$\omega = \frac{P_m - Q_{m-1} + \sqrt{(P_m - Q_{m-1})^2 + 4 P_{m-1} Q_m}}{2 Q_m} \tag{6}$$

$$= \frac{P_m - Q_{m-1} + \sqrt{(P_m + Q_{m-1})^2 - (-1)^m 4}}{2 Q_m}.$$

Hierin ist die Quadratwurzel positiv zu nehmen, weil der irrationale Teil einer reduzierten Zahl positiv ist.

Dieser Ausdruck mufs also mit dem Ausdruck (1) übereinstimmen, und wenn wir mit einem noch unbestimmten Faktor u erweitern, so folgt

$$u\sqrt{D} = \sqrt{(P_m - Q_{m-1})^2 + 4 P_{m-1} Q_m}, \tag{7}$$

$$uy = P_m - Q_{m-1}, \tag{8}$$

$$uz = Q_m, \tag{9}$$

woraus, wenn man $u^2(D - y^2)$ bildet,

$$ux = P_{m-1}. \tag{10}$$

Da x, y, z ohne gemeinschaftlichen Teiler sind, so folgt noch, dafs u eine *positive ganze Zahl ist.*

Setzt man ferner

$$t = P_m + Q_{m-1}, \tag{11}$$

worin t ebenfalls eine positive ganze Zahl ist, so ergiebt sich aus (7) und (11) mit Rücksicht auf (4)

$$t^2 - Du^2 = (-1)^m 4, \tag{12}$$

und folglich ist

$$\vartheta = \frac{t + u\sqrt{D}}{2}$$

eine zur Diskriminante D gehörige Einheit.

Da m ein beliebiges Vielfaches von n sein kann, so erhält man auf diesem Wege unendlich viele Einheiten. Ist n eine gerade Zahl, so haben alle diese Zahlen *positive Norm.* Ist aber n ungerade, so haben sie *abwechselnd positive und negative Norm.*

Es gilt aber auch der Satz, dessen einfachen Beweis wir hier nicht ausführen wollen[1]), dafs man aus der Kettenbruchentwicklung irgend

1) Vgl. Weber, Lehrbuch der Algebra. 2. Aufl. Bd. I, § 135.

Digitized by Google

einer reduzierten Zahl der Diskriminante D *alle Einheiten* dieser Diskriminante erhält, und dafs man also die *Fundamentaleinheit* findet, wenn man in den Formeln (5) bis (10) m gleich der Periodenlänge n annimmt.

Wenn diese Periodenlänge also gerade ist, so giebt es keine Einheiten mit negativer Norm; ist sie ungerade, so giebt es solche Einheiten.

Da die Existenz von Einheiten mit negativer Norm aber nur von der Diskriminante D, nicht von der besonderen Wahl der reduzierten Zahl ω abhängen kann, so ist auch die Eigenschaft, eine gerade oder eine ungerade Periodenlänge zu haben, gleichfalls nur von D abhängig, und es folgt, dafs die verschiedenen Perioden für dieselbe Determinante *entweder alle eine gerade Länge oder alle eine ungerade Länge besitzen.*

§ 6. Äquivalente Zahlen.

Zwei Zahlen ω und ω_1 heifsen *äquivalent*, wenn sich vier *ganze Zahlen* α, β, γ, δ mit der Determinante

$$\varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \tag{1}$$

bestimmen lassen, so dafs

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \tag{2}$$

ist. Diese Beziehung von ω zu ω_1 ist gegenseitig, denn aus (2) folgt

$$\omega = \frac{\delta\omega_1 - \beta}{-\gamma\omega_1 + \alpha}. \tag{3}$$

I. *Alle rationalen Zahlen sind unter einander äquivalent.*

Denn setzen wir $\omega = m/n$, $\omega_1 = m_1/n_1$, worin m/n und m_1/n_1 reduzierte Brüche sein sollen, so können wir zunächst vier Zahlen α, β, γ, δ so bestimmen, dafs

$$\begin{cases} \alpha m + \beta n = m_1, \\ \gamma m + \delta n = n_1, \end{cases} \tag{4}$$

weil m und n ohne gemeinsamen Teiler sind.

Ist aber α_0, β_0, γ_0, δ_0 irgend eine Lösung von (4), so erhält man die allgemeinste Lösung, wenn x, y willkürliche ganze Zahlen sind, in der Form:

$$\alpha = \alpha_0 + xn, \quad \beta = \beta_0 - xm,$$
$$\gamma = \gamma_0 + yn, \quad \delta = \delta_0 - ym,$$

und daraus, wenn $\varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma$, $\varepsilon_0 = \alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0$ ist, nach (4)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + xn_1 - ym_1,$$

Digitized by Google

und da wieder m_1 und n_1 ohne gemeinsamen Teiler sind, so kann man hieraus x und y so bestimmen, daſs ε einen beliebig gegebenen Wert, also auch den Wert ± 1 erhält. Dann ist aber

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{\alpha \frac{m}{n} + \beta}{\gamma \frac{m}{n} + \delta},$$

also m/n und m_1/n_1 äquivalent.

II. *Aus der Zusammensetzung der linearen Substitutionen ergiebt sich, daſs zwei Zahlen, die mit einer dritten äquivalent sind, auch unter einander äquivalent sind, und man kann also alle unter einander äquivalenten Zahlen in eine Zahlklasse vereinigen. Jede solche Zahlklasse ist durch einen ihrer Repräsentanten eindeutig bestimmt.*

Eine *reelle irrationale Zahl* ω läſst sich auf eine Weise in einen regelmäſsigen *unendlichen* Kettenbruch entwickeln:

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{\nu-1} + \cfrac{1}{\omega_\nu}}}}$$

$$= (a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{\nu-1}, \omega_\nu),$$

wenn a_0 eine *positive* oder *negative* ganze Zahl, da $a_1, a_2, \ldots, a_{\nu-1}$ positive ganze Zahlen sind, und $\omega_\nu > 1$ ist. Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}$ heiſsen die Teilnenner, die Zahlen ω_ν die *Schluſszahlen* vom Rang ν, und diese Entwicklung läſst sich unbegrenzt fortsetzen, d. h. man kann ν beliebig groſs annehmen. Darum heiſsen diese Kettenbrüche *unendliche Kettenbrüche.* Die Schlufszahlen ω_ν sind alle mit ω und folglich auch unter einander äquivalent.

III. *Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier reeller irrationaler Zahlen ist die, daſs in ihren Kettenbruchentwicklungen die Schluſszahlen und folglich auch die Teilnenner von einem gewissen Range an mit einander übereinstimmen, oder daſs, wie wir uns auch ausdrücken können, die Kettenbruchentwicklungen denselben Endverlauf haben.*

Für den Beweis dieses Satzes verweise ich auf mein Lehrbuch der Algebra (Bd. I, § 129 der 2. Aufl.).

Diese Begriffe und Sätze wenden wir nun auf die quadratischen Irrationalzahlen an, und stellen den Satz an die Spitze dieser Betrachtungen:

IV. *Ist ω eine reelle quadratische Irrationalzahl, so ist jede mit ω äquivalente Zahl ω_1 ebenfalls eine reelle quadratische Irrationalzahl, und die Diskriminanten beider sind dieselben.*

Digitized by Google

Setzen wir nämlich in unserer früheren Bezeichnung

$$D = y^2 + 4xz, \tag{5}$$

$$\omega = \frac{y + \sqrt{D}}{2z}, \tag{6}$$

so wird nach (2)

$$\omega_1 = \frac{(\alpha y + 2\beta z) + \alpha\sqrt{D}}{(\gamma y + 2\delta z) + \gamma\sqrt{D}},$$

und wenn man den Nenner rational macht, so ergiebt eine einfache Rechnung:

$$\omega_1 = \frac{y_1 + \sqrt{D}}{2z_1}, \tag{7}$$

worin

$$\begin{cases} \varepsilon y_1 = -2\alpha\gamma x + (\alpha\delta + \beta\gamma)y + 2\beta\delta z, \\ \varepsilon z_1 = -\gamma^2 x + \gamma\delta y + \delta^2 z, \\ \varepsilon x_1 = \alpha^2 x - \alpha\beta y + \beta^2 x, \end{cases} \tag{8}$$

$$y_1^2 + 4x_1z_1 = y^2 + 4xz = D, \tag{9}$$

und man erhält durch Auflösung dieser Gleichungen (8):

$$\begin{cases} \varepsilon y = 2\gamma\delta x_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma)y_1 - 2\alpha\beta z_1, \\ \varepsilon z = -\gamma^2 x_1 - \alpha\gamma y_1 + \alpha^2 z_1, \\ \varepsilon x = \delta^2 x_1 + \delta\beta y_1 - \beta^2 z_1. \end{cases} \tag{10}$$

Daraus folgt, dafs ein gemeinschaftlicher Teiler von x_1, y_1, z_1 auch gemeinschaftlicher Teiler von x, y, z sein müfste und umgekehrt, und wenn also die Form $\{x, y, z\}$ *primitiv* ist, so ist auch $\{x_1, y_1, z_1\}$ primitiv.

Wenn man eine reduzierte Zahl in einen Kettenbruch entwickelt, so sind alle Schlufszahlen gleichfalls reduziert, und in der Kettenbruchentwicklung einer nicht reduzierten Zahl sind die Schlufszahlen von genügend hohem Rang reduzierte Zahlen (Algebra Bd. I, § 132, 1).

Wir haben also den Satz:

V. *Jede reelle quadratische Irrationalzahl ist einer reduzierten Zahl äquivalent. Die Kettenbruchentwicklung einer jeden reellen quadratischen Irrationalzahl hat einen periodischen Endverlauf.*

Die reduzierten Zahlen geben einen rein periodischen Kettenbruch, die nichtreduzierten haben noch Teilnenner, die dem Beginn der Periode vorhergehen.

VI. *Nimmt man dies mit dem Satze 4 zusammen, so folgt, dafs zwei reduzierte Zahlen dann und nur dann äquivalent sind, wenn sie in derselben Periode* (§ 3, (9)) *vorkommen.*

Digitized by Google

VII. *Die Anzahl der Klassen reeller quadratischer Irrationalzahlen für eine gegebene Determinante D ist also endlich und gleich der Anzahl der Perioden der reduzierten Zahlen.*

§ 7. Eigentliche und uneigentliche Äquivalenz.

Man kann auf zwei verschiedenen Wegen zu einer schärferen Klasseneinteilung der reellen quadratischen Irrationalzahlen gelangen:

A. *Die beiden äquivalenten Zahlen* ω, ω_1 (§ 6, (2)) *heifsen eigentlich äquivalent, wenn die Determinante* $\varepsilon = \alpha\delta - \beta\gamma = +1$ *ist, uneigentlich äquivalent, wenn* $\varepsilon = -1$ *ist.*

Da der Zusammensetzung zweier linearen Substitutionen die Multiplikation der Determinante entspricht, so haben wir die Sätze:

I. Zwei Zahlen, die mit einer dritten eigentlich äquivalent sind, sind unter einander eigentlich äquivalent.

II. Zwei Zahlen, die mit einer dritten uneigentlich äquivalent sind, sind unter einander eigentlich äquivalent.

III. Zwei Zahlen, von denen eine eigentlich, die andere uneigentlich mit einer dritten äquivalent ist, sind unter einander uneigentlich äquivalent.

IV. Zwei benachbarte Zahlen ω_1, ω_2 einer Kettenbruchentwicklung

$$\omega_1 = a + \frac{1}{\omega_2}$$

sind *uneigentlich äquivalent.* Jede quadratische Irrationalzahl ist daher mit reduzierten Zahlen sowohl eigentlich als uneigentlich äquivalent.

V. Eine mit sich selbst uneigentlich äquivalente Zahl ist notwendig eine reelle quadratische Irrationalzahl, und es giebt eine zu derselben Diskriminante gehörige Einheit mit negativer Norm (§ 5, (3) bis (12)).

VI. Wenn es also *Einheiten mit negativer Norm* giebt, wenn also die Periodenlänge der Diskriminante D ungerade ist, so sind zwei äquivalente Zahlen stets zugleich eigentlich und uneigentlich äquivalent, und man bekommt dieselbe Klasseneinteilung und Klassenzahl, wenn man auch nur die eigentlich äquivalenten Zahlen in eine Klasse vereinigt.

Wenn es aber *keine Einheit mit negativer Norm* giebt, die Periodenlänge der Diskriminante D also gerade ist, so sind niemals zwei Zahlen zugleich eigentlich und uneigentlich äquivalent.

---

1) Mathematische Annalen **48**, 456.

Digitized by Google

Vereinigt man also jetzt nur die eigentlich äquivalenten Zahlen der Diskriminante D in eine Klasse, so zerfällt jede der früheren Klassen in zwei Klassen, und die Klassenzahl verdoppelt sich.

§ 8. Ganz und halb äquivalente Zahlen.

Die weitere Zerfällung der Klassen äquivalenter quadratischer Irrationalzahlen kann noch nach einem anderen Prinzip geschehen, das auf der folgenden Definition beruht, die sich nicht wie die vorige auf beliebige Zahlen, sondern nur auf quadratische Irrationalzahlen bezieht.

B. *Zwei quadratische Irrationalzahlen* ω, ω_1 *der Diskriminante* D, *die zu einander in der Beziehung stehen*

$$\omega_1 = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \tag{1}$$

heißen ganz äquivalent, wenn die Norm $N(\gamma\omega + \delta)$ *positiv ist, halb äquivalent, wenn* $N(\gamma\omega + \delta)$ *negativ ist.*

Ist ω_2 eine dritte mit ω und ω_1 äquivalente Zahl und

$$\omega_2 = \frac{\alpha_1\omega_1 + \beta_1}{\gamma_1\omega_1 + \delta_1} = \frac{\alpha_2\omega + \beta_2}{\gamma_2\omega + \delta_2}, \tag{2}$$

so ergiebt sich leicht

$$N(\gamma\omega + \delta)\, N(\gamma_1\omega_1 + \delta_1) = N(\gamma_2\omega + \delta_2), \tag{3}$$

und daraus können wir ganz wie bei der eigentlichen und uneigentlichen Äquivalenz die Schlüsse ziehen:

I. Zwei Zahlen, die mit einer dritten ganz äquivalent sind, sind unter einander ganz äquivalent.

II. Zwei Zahlen, die mit einer dritten halb äquivalent sind, sind unter einander ganz äquivalent.

III. Zwei Zahlen, von denen die eine ganz, die andere halb mit einer dritten äquivalent ist, sind unter einander halb äquivalent.

IV. Eine Zahl, die *mit sich selbst halb äquivalent* ist, ist auch *mit sich selbst uneigentlich äquivalent*, und umgekehrt ist eine mit sich selbst uneigentlich äquivalente Zahl auch mit sich selbst halb äquivalent.

Denn setzen wir

$$\omega = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta},$$

so sind ω und ω' die beiden Wurzeln der Gleichung

$$\gamma\omega^2 - (\alpha - \delta)\,\omega - \beta = 0,$$

Digitized by Google

und folglich ist, wenn t eine unbestimmte Gröfse ist,

$$\gamma t^2 - (\alpha - \delta)\, t - \beta = \gamma (t - \omega)(t - \omega') = \gamma N(t - \omega);$$

setzen wir darin $t = -\delta/\gamma$, so folgt:

$$N(\gamma\omega + \delta) = \alpha\delta - \beta\gamma,$$

woraus der Satz IV folgt.

V. Zwei benachbarte Zahlen ω_1, ω_2:

$$\omega_1 = a + \frac{1}{\omega_2} \tag{4}$$

sind ganz oder halb äquivalent, je nachdem die Norm von ω_2 positiv oder negativ ist.

Da die Normen der reduzierten Zahlen alle negativ sind, so folgt, dafs zwei benachbarte Zahlen einer Periode immer halb äquivalent sind, und es ergiebt sich also daraus, dafs bei den *reduzierten Zahlen ganze und halbe Äquivalenz gleichbedeutend ist mit eigentlicher und uneigentlicher Äquivalenz.*

Dies gilt aber *nur* für reduzierte Zahlen allgemein. Sonst ist z. B., wenn die Norm von ω positiv ist, ω mit $1/\omega$ uneigentlich und zugleich ganz äquivalent, und wenn die Norm von ω negativ ist, ω mit $-1/\omega$ eigentlich und zugleich halb äquivalent.

Wenn wir nun die Zahlen der Diskriminante D in der Weise in Klassen einteilen, dafs wir nur die ganz äquivalenten vereinigen, so erhalten wir, falls es Einheiten mit negativer Norm giebt, keine weitere Zerfällung; dagegen verdoppelt sich die Zahl der Klassen, wenn es keine Einheit mit negativer Norm giebt. Die so gewonnenen Klassen *stimmen mit den nach eigentlicher Äquivalenz gebildeten in den reduzierten Zahlen überein. Nicht reduzierte Zahlen aber können nach der einen Einteilung in derselben, nach der anderen in verschiedenen Klassen vorkommen.*

Strafsburg, im Mai 1902.

Digitized by Google

Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle vermittelst successiver Annäherungen.

Von J. Horn in Clausthal.

Herr Fuchs hat in den Annali di Matematica[1]) vermittelst einer Methode successiver Annäherungen eine Reihenentwicklung der Integrale einer linearen Differentialgleichung hergestellt, welche für jeden nicht singulären Wert der Veränderlichen konvergent ist.[2]) Im Folgenden werde ich zeigen, dafs *eine passende Umgestaltung dieser Reihenentwicklung besonders geeignet ist, das Verhalten der Integrale bei der Annäherung der Veränderlichen an eine Unbestimmtheitsstelle zu untersuchen*, eine Aufgabe, welche von Herrn Poincaré vermittelst der Laplaceschen Transformierten erfolgreich in Angriff genommen wurde, und bei welcher die der Differentialgleichung formell genügenden divergenten Reihen eine Rolle spielen.[3])

Ich beschränke mich vorläufig auf eine Klasse von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, für welche sich das Verhalten der Integrale *in der ganzen Umgebung der Unbestimmtheitsstelle*, welche man

1) Fuchs: Annali di Matematica (2) **4** (1870). Vgl. Schlesingers Handbuch, Bd. I, S. 370—389. — Man sehe auch Burkhardt: Über einige mathematische Resultate neuerer astronomischer Forschungen, insbesondere über irreguläre Integrale linearer Differentialgleichungen (Congr. Math. Papers, vol. I, p. 13). Verwandt sind die méthodes d'approximations successives von Picard (Traité d'Analyse, Bd. III, S. 88 ff.)

2) Anwendung dieser Darstellung der Integrale von Günther: Crelles Journ. **106, 107.**

3) Poincaré: Amer. Journ. **7**, Act. math. **8**. Vgl. Picard: Traité d'Analyse Bd. III, Kap. 14. (Zur Einführung in dieses Gebiet dient auch das Buch von Schlesinger in der Sammlung Schubert.) An Poincaré schliefsen sich verschiedene Aufsätze des Verfassers an, von denen nur die auf lineare Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bezüglichen genannt seien: Crelles Journ. **118**; Math. Ann. **49, 50**; Jahresbericht der Mathematiker-Vereinigung **8**; Act. math. **23, 24**. Ferner sind Arbeiten von Herrn Kneser über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu nennen (Crelles Journ. **116, 117, 120**; Math. Ann. **49**). Herr Dini stellt (Annali di Matematica (3) **2, 3**) ebenfalls eine Reihenentwicklung auf, welche zur Untersuchung der Integrale für grofse Werte der Veränderlichen benutzt wird. Vgl. auch eine neue Arbeit von Herrn Jacobsthal (Math. Ann. **56**) über eine spezielle lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, welche an Herrn Weber (Math. Ann. **37**) anknüpft. Schliefslich sei an einen wichtigen älteren Aufsatz von Hankel über die Besselschen Funktionen (Math. Ann. **1**) erinnert.

Digitized by Google

zweckmäfsig ins Unendliche verlegt, am übersichtlichsten darstellt; ich betrachte die Differentialgleichung

$$(A) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

deren Koeffizienten

$$P = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots,$$

$$Q = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots$$

Funktionen von x sind, welche sich in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ in konvergente Potenzreihen entwickeln lassen. Es handelt sich hier mehr um die Darstellung der Methode als um neue Sätze. Indessen ist der am Schlufs der Arbeit hervorgehobene Hauptsatz bisher nur für den Fall, dafs P und Q *rationale* Funktionen von x sind, in derselben Vollständigkeit bewiesen[1]) und zwar im Anschlufs an Poincaré nach einer Methode, welche auf die jetzige allgemeinere Differentialgleichung, deren Koeffizienten nur in der Umgebung der Stelle $x = \infty$ den Charakter rationaler Funktionen zu haben brauchen, nicht mehr anwendbar ist.

Eine kurze Zusammenfassung der im Folgenden abgeleiteten Resultate findet sich in den Comptes rendus vom 17. Januar 1898.

1. Die lineare Differentialgleichung (A), deren linke Seite wir mit $D(y)$ bezeichnen, wird, *wenn die Wurzeln* α_1, α_2 *der charakteristischen Gleichung*

$$\alpha^2 + a_0\alpha + b_0 = 0$$

von einander verschieden sind, durch die Thoméschen Normalreihen

$$S_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1}\Big(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\Big),$$

$$S_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\varrho_2}\Big(1 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\Big),$$

welche im allgemeinen divergent sind, formell befriedigt.[2]) Wir setzen α_1 und α_2 reell und $\alpha_1 > \alpha_2$ voraus, was durch eine Substitution von der Form

$$y = e^{\alpha x} y_1, \quad x = bx_1$$

erreicht werden kann.

1) Math. Ann. **49**, **50**; Act. math. **23**. Gewisse weitergehende Untersuchungen, welche ich früher in speziellen Fällen geführt habe, bleiben hier bestehen (vgl. den zweiten Aufsatz im 49. Bd. der Math. Ann.).

2) Dabei ist $\varrho_i = -\dfrac{\alpha_i\alpha_i + b_1}{2\alpha_i + a_0}$ $(i = 1, 2)$.

Digitized by Google

Die Funktionen

$$\varphi_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1}, \quad \varphi_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\varrho_2}$$

genügen der Differentialgleichung

$$D_1(y) = 0,$$

wobei

$$D_1(y) = \frac{\begin{vmatrix} y & \varphi_1 & \varphi_2 \\ y' & \varphi_1' & \varphi_2' \\ y'' & \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}} = \frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + Q_1 y$$

ist. Man hat

$$-D(\varphi_i) = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i - 2} \mathfrak{P}_i\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (i=1, 2),$$

wo $\mathfrak{P}_i\left(\frac{1}{x}\right)$ eine bei $x = \infty$ reguläre Funktion darstellt. Setzt man

$$D(y) = D_1(y) - D_2(y),$$

so ist

$$D_2(\varphi_i) = -D(\varphi_i) = e^{\alpha_i x} x^{\varrho_i - 2} \mathfrak{P}_i\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wir verstehen nun unter u_0 ein Integral von $D_1(y) = 0$ (zuerst $u_0 = \varphi_1$, später $u_0 = \varphi_2$) und schreiben die Kette von Differentialgleichungen

$$D_1(u_m) = D_2(u_{m-1}) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

an, woraus wir nach einander die Funktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ berechnen, indem wir ein partikuläres Integral einer jeden Differentialgleichung passend fixieren.

Unter Anwendung der Bezeichnung[1])

$$D_2(u_{m-1}) = F_{m-1}(x)$$

haben wir zur Bestimmung von u_m die nicht homogene lineare Differentialgleichung

$$D_1(u_m) = F_{m-1}(x),$$

woraus wir erhalten:

$$\begin{aligned} u_m &= \sum_i \varphi_i \int^x F_{m-1}(x) \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)}\, dx \\ &= \sum_i \int^x \varphi_i(x) F_{m-1}(t) \frac{\Delta_i(t)}{\Delta(t)}\, dt \\ &= \int^x F_{m-1}(t) \frac{\Delta_1(t, x)}{\Delta(t)}\, dt, \end{aligned}$$

1) Vgl. Schlesingers Handbuch Bd. I, S. 370 ff.

Digitized by Google

während sich für

$$D_2(u_m) = F_m(x)$$

ergiebt:

$$F_m(x) = \sum_i D_2(\varphi_i) \int^x F_{m-1}(x) \frac{\Delta_i(x)}{\Delta(x)} dx$$

$$= \sum_i \int^x F_{m-1}(t) D_2(\varphi_i(x)) \frac{\Delta_i(t)}{\Delta(t)} dt$$

$$= \int^x F_{m-1}(t) \frac{\Delta(t, x)}{\Delta(t)} dt.$$

Dabei ist gesetzt:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t), & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t), & \varphi_2'(t) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1(t) = -\varphi_2(t), \quad \Delta_2(t) = \varphi_1(t),$$

$$\Delta_1(t, x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t), & \varphi_2(t) \\ \varphi_1(x), & \varphi_2(x) \end{vmatrix},$$

$$\Delta(t, x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t), & \varphi_2(t) \\ D_2(\varphi_1(x)), & D_2(\varphi_2(x)) \end{vmatrix}.$$

Die feste untere Integrationsgrenze und der in x endigende Integrationsweg l werden im nächsten Paragraphen in einer unseren Zwecken entsprechenden Weise gewählt. Sodann wird in Nr. **3.** gezeigt, dafs die Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

in einem gewissen Gebiet der x-Ebene unbedingt und gleichmäfsig konvergiert und der Differentialgleichung (A) genügt.

Der Bequemlichkeit halber setzen wir

$$y = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} z,$$

sowie

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha, \quad \varrho_1 - \varrho_2 = \varrho,$$

so dafs α eine reelle, positive Gröfse ist, und betrachten die Differentialgleichung für z. Mit anderen Worten, wir setzen in den bisherigen Formeln

$$\alpha_1 = 0, \ \varrho_1 = 0; \quad \alpha_2 = -\alpha, \ \varrho_2 = -\varrho$$

und

$$\varphi_1 = 1, \quad \varphi_2 = e^{-\alpha x} x^{-\varrho}.$$

Digitized by Google

Dann ist, wenn die Buchstaben $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{P}$ Potenzreihen der beigefügten Argumente bezeichnen,

$$\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} = \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{t}\right), \quad \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)} = \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$f(t,x) = x^2\,\frac{\Delta(t,x)}{\Delta(t)} = \mathfrak{P}'\left(\frac{1}{t},\frac{1}{x}\right) + e^{-\alpha(x-t)}t^{\varrho}x^{-\varrho}\mathfrak{P}''\left(\frac{1}{t},\frac{1}{x}\right),$$

$$f_1(t,x) = \frac{\Delta_1(t,x)}{\Delta(t)} = \mathfrak{P}\left(\frac{1}{t},\frac{1}{x}\right) + e^{-\alpha(x-t)}t^{\varrho}x^{-\varrho}\mathfrak{P}\left(\frac{1}{t},\frac{1}{x}\right).$$

Wir haben zur successiven Berechnung von $u_1, u_2, \ldots$ die Formeln

$$u_m = \int^x t^2 F_{m-1}(t)\cdot f_1(t,x)\cdot\frac{dt}{t^2},$$

$$x^2 F_m(x) = \int^x t^2 F_{m-1}(t)\cdot f(t,x)\cdot\frac{dt}{t^2},$$

wobei wir von

$$u_0 = \varphi_1(x) = 1,$$

$$F_0(x) = D_2(\varphi_1) = x^{-2}\mathfrak{P}_0\left(\frac{1}{x}\right)$$

ausgehen.

2. Abgesehen von der Unbestimmtheitsstelle $x=\infty$ sollen alle singulären Stellen der Differentialgleichung (A) innerhalb eines um den Nullpunkt mit dem Radius r beschriebenen Kreises liegen. Indem wir unter δ eine beliebig kleine positive Gröfse verstehen, beschränken wir uns auf Werte von x, deren absoluter Betrag gröfser als $R = \frac{r}{\sin\delta}$ ist, und deren Argument zwischen $-\frac{\pi}{2}+\delta$ und $\frac{5\pi}{2}-\delta$ liegt. Das so abgegrenzte Gebiet der x-Ebene heifse G.

Zunächst liege x in demjenigen Teil des Gebietes G, in welchem

$$\pi \geq \arg x > -\frac{\pi}{2}+\delta$$

ist. Falls $\pi \geqq \arg x \geqq 0$ ist, besteht der Integrationsweg, welchen wir der Einfachheit halber wählen und welcher durch einen äquivalenten Weg ersetzt werden kann, aus der reellen Achse von $-\infty$ bis $-|x|$ und aus dem die Punkte $-|x|$ und x verbindenden Kreisbogen vom Mittelpunkt O, welcher im Sinne abnehmender Argumente von x zu durchlaufen ist. Im Falle $0 > \arg x > -\frac{\pi}{2}+\delta$ nehmen wir einen Integrationsweg, bestehend aus der reellen Achse von $-\infty$ bis $-\xi$[1]), dem Kreisbogen vom Mittelpunkt O und vom Radius ξ, welcher von

1) Dabei ist $x = \xi - i\eta$ gesetzt, so dafs $\xi > 0$, $\eta > 0$ ist.

Digitized by Google

$-\xi$ bis $+\xi$ im Sinne abnehmender Argumente durchlaufen wird, und der Verbindungsgeraden der Punkte ξ und x. Ein Weg der ersten Art möge mit l', ein Weg der zweiten Art mit l'' bezeichnet werden.

Es ist

$$\int_{l'} \left|\frac{dt}{t^3}\right| = \int_{-\infty}^{-|x|} \frac{dt}{t^3} + \int_{\arg x}^{\pi} \frac{|x|\,d\vartheta}{|x|^3} = \frac{1}{|x|} + \frac{\pi - \arg x}{|x|} \leqq \frac{1+\pi}{|x|} < \frac{k}{|x|}\ ^{1}),$$

$$\int_{l''} \left|\frac{dt}{t^3}\right| < \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{dt}{t^3} + \int_{0}^{\pi} \frac{\xi\,d\vartheta}{\xi^3} + \int_{0}^{\eta} \frac{d\eta}{\xi^3}\ ^{2})$$

$$= \frac{1}{\xi} + \frac{\pi}{\xi} + \frac{\eta}{\xi^3} < \frac{1+\pi+\operatorname{cotg}\delta}{\xi}.\ ^{3})$$

Nun ist aber $\frac{\xi}{|x|} > \sin\delta$, also

$$\int_{l''} \left|\frac{dt}{t^3}\right| < \frac{(1+\pi+\operatorname{cotg}\delta)\operatorname{cosec}\delta}{|x|} < \frac{k}{|x|}.$$

Die in den Ausdrücken für $t^3 F_0(t)$, $f(t,x)$, $f_1(t,x)$ enthaltenen Potenzreihen von $\frac{1}{t}$ bezw. von $\frac{1}{t}$ und $\frac{1}{x}$ sind für $|t| > r$, $|x| > r$ konvergent; ihre absoluten Beträge liegen also für alle dem Gebiete G angehörenden Werte von x unter endlichen Grenzen.

Es ist noch zu zeigen, dafs auch der absolute Betrag von

$$\psi = e^{-\alpha(x-t)} t^{\varrho} x^{-\varrho}$$

für alle Punkte x des Gebietes G und für alle Punkte t des Integrationsweges l' oder l'' unter einer endlichen Grenze H liegt.

Für jeden Punkt t des Weges l' oder l'' ist der reelle Teil von $x - t$ positiv (oder gleich Null für $t = x$); also ist

$$|e^{-\alpha(x-t)}| \leqq 1.$$

Wenn unter s eine positive Gröfse verstanden wird, die wir gröfser als $\frac{1}{\sin\delta}$ annehmen, so ist für

$$\frac{1}{s} < \left|\frac{t}{x}\right| < s,$$

während x in dem angegebenen Gebiet und t auf einem der be-

1) Dabei ist k eine endliche positive Gröfse.

2) An Stelle des Nenners $|x|^3$ ist der kleinere Wert ξ^3 auf dem geradlinigen Teil von l'' gesetzt.

3) Im Gebiet G ist $\frac{\eta}{\xi} < \operatorname{cotg}\delta$.

Digitized by Google

schriebenen Integrationswege liegt (so daſs das Argument von $\frac{t}{x}$ zwischen endlichen Grenzen bleibt),

$$\left|\left(\frac{t}{x}\right)^{\varrho}\right| < H^{1}),$$

also auch

$$|\psi| < H.$$

Es kann nur dann

$$\left|\frac{t}{x}\right| > s$$

sein, wenn $t = -t'$, t' reell positiv und gröſser als $s|x|$ ist, d. h. wenn t am Anfang des aus dem Unendlichen kommenden Integrationsweges liegt. Wir setzen $\varrho = \varrho' + i\varrho''$. Im Falle $\varrho' < 0$ ist

$$\left|\left(\frac{t}{x}\right)^{\varrho}\right| = \left|\left(\frac{x}{t}\right)^{-\varrho}\right| = \left|\frac{x}{t}\right|^{-\varrho'} e^{\varrho'' \arg \frac{x}{t}} < cs^{\varrho'} < H^{2}),$$

also auch

$$|\psi| < H.$$

Im Fall $\varrho' > 0$ haben wir

$$|t^{\varrho}| = t'^{\varrho'},$$

$$|x^{-\varrho}| = |x|^{-\varrho'} e^{\varrho'' \arg x} < cR^{-\varrho'};$$

wegen $|x| < \frac{t'}{s}$ ist

$$|e^{-\alpha(x-t)}| \leqq e^{-\alpha t' + \alpha|x|} < e^{-\alpha\left(1-\frac{1}{s}\right)t'},$$

also

$$|\psi| < cR^{-\varrho'} \cdot e^{-\alpha\left(1-\frac{1}{s}\right)t'} t'^{\varrho'},$$

mithin liegt $|\psi|$ unter einer endlichen Gröſse H, wenn $t' \geqq sR$, also auch, wenn $t' > s|x|$ ist.

Die Ungleichung

$$\left|\frac{t}{x}\right| < \frac{1}{s}$$

kann nicht bestehen; auf einem Integrationsweg l' ist nämlich $|t| \geqq |x|$; auf einem Weg l'' ist der kleinste Wert von $|t|$ gleich dem reellen Teil ξ von x, und es ist

$$\frac{\xi}{|x|} > \sin\delta > \frac{1}{s}.$$

---

1) H ist eine endliche positive Gröſse, die so groſs zu nehmen ist, daſs auch die folgenden (H enthaltenden) Ungleichungen erfüllt sind.

2) Unter c verstehen wir eine endliche positive Gröſse.

Digitized by Google

Bisher war

$$\pi \geqq \arg x > -\frac{\pi}{2} + \delta$$

angenommen; ist

$$\pi \leq \arg x < \frac{5\pi}{2} - \delta,$$

so besteht der Integrationsweg aus einem Teil der negativen reellen Achse und einem Kreisbogen, welcher im Sinne wachsender Argumente durchlaufen wird, woran sich unter Umständen eine Gerade anschliefst. Die bisherige Schlufsweise erfährt keine wesentliche Änderung.

Es sind demnach *endliche positive Gröfsen* M, M_1, N *und* k *so vorhanden, dafs*

$$|f(t,x)| < M,\ |f_1(t,x)| < M_1,\ |t^2 F_0(t)| < N,$$

$$\int_l \left|\frac{dt}{t^2}\right| < \frac{k}{|x|}$$

ist, wenn x *der im Gebiete* G *liegende Endpunkt des gewählten Integrationsweges* l (l' *oder* l'') *und* t *ein beliebiger Punkt dieses Weges ist.* Die bisherige Schlufsweise braucht nicht geändert zu werden, wenn *unter* x *irgend ein Punkt von* l *und unter* t *irgend ein vorausgehender Punkt verstanden wird.*

3. Nunmehr können wir beweisen, dafs die in Nr. **1.** aufgestellte Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

für alle dem Gebiete G angehörigen Werte von x unbedingt und gleichmäfsig konvergiert, wenn alle Integrationen über den in Nr. **2.** beschriebenen Weg l erstreckt werden.

Zunächst ist

$$|x^2 F_0(x)| < N.$$

Aus den am Schlusse von Nr. **1.** angeschriebenen Formeln für u_m und $x^2 F_m(x)$ folgt für $m = 1$, wenn man

$$\int_l \left|\frac{dt}{t^2}\right| = L_x$$

setzt,

$$|u_1| < M_1 N L_x,$$

$$x^2 F_1(x)| < M N L_x.$$

Die letzte Ungleichung gilt nicht nur für die obere Grenze x, sondern für jeden Punkt des Weges l, d. h. es ist

$$|t^2 F_1(t)| < M N L_t.$$

Digitized by Google

Nun ergiebt sich aus den für $m = 2$ gültigen Formeln

$$|u_2| < \int_l MNL_t \cdot M_1 \cdot dL_t = MM_1N\int_l L_t dL_t$$

oder

$$|u_2| < \frac{MM_1NL_x^2}{2}$$

und ähnlich

$$|x^2F_2(x)| < \frac{M^2NL_x^2}{2}.$$

Weiter erhält man

$$|u_3| < \frac{M^2M_1NL_x^3}{3!}$$

und allgemein

$$|u_m| < \frac{M^{m-1}M_1NL_x^m}{m!}$$

oder, weil

$$L_x < \frac{k}{|x|}$$

ist,

$$|m_m| < \frac{M^{m-1}M_1Nk^m}{m!\,|x|^m} = \frac{M_1N}{M} \cdot \frac{\left(\frac{Mk}{|x|}\right)^m}{m!}.$$

Hiermit ist *die unbedingte und gleichmäßige Konvergenz der Reihe*

$$\eta = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

im Gebiete G bewiesen.

Die Ableitungen der Reihensumme η erhält man also durch gliedweise Differentiation. Nun ist

$$D_1(u_0 + u_1 + \cdots + u_m) = D_2(u_0 + u_2 + \cdots + u_{m-1}),$$

also für $\lim m = \infty$

$$D_1(\eta) = D_2(\eta)$$

oder

$$D(\eta) = 0.$$

Die Reihe η stellt also ein Integral der Differentialgleichung (A) dar, in welcher $\alpha_1 = 0$, $\varrho_1 = 0$ angenommen ist, oder mit anderen Worten, ein Integral derjenigen Differentialgleichung, welche aus der ursprünglichen Gleichung (*A*) durch die Substitution $y = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} z$ hervorgeht. Später betrachten wir die Reihe

$$\eta_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} \eta$$

als Integral der ursprünglichen Gleichung (*A*).

Digitized by Google

Auch *die Reihe*

$$x^n(u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots)$$

ist im Gebiet G gleichmäßig konvergent, denn es ist $(\nu = 1, 2, \cdots)$

$$|x^n u_{n+\nu}| < \frac{M^{n+\nu-1} M_1 N k^{n+\nu}}{(n+\nu)! \, |x|^\nu}.$$

4. Behufs Untersuchung der einzelnen Glieder der Reihe η schalten wir folgende Betrachtung ein.

Es sei

$$J = \int_l e^{\alpha x} x^\varrho \sum_{\nu=0}^{n} \frac{c_\nu}{x^\nu} dx;$$

α sei eine reelle positive Größe, die zu integrierende Reihe sei für hinreichend große Werte von $|x|$ konvergent und der Integrationsweg l habe die in Nr. **2.** beschriebene Gestalt oder sei dem dort betrachteten Wege äquivalent; er verlasse die Stelle $x = \infty$ mit $\arg x = \pi$ oder mit einem zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ gelegenen Argument und verlaufe im Gebiet

$$|x| \geqq r, \; -\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{5\pi}{2} - \delta,$$

welchem die obere Integrationsgrenze x angehört. Setzt man

$$J_\nu = \int_l e^{\alpha x} x^{\varrho-\nu} dx,$$

so erhält man durch partielle Integration

$$J_\nu = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} x^{\varrho-\nu} - \frac{\varrho-\nu}{\alpha} J_{\nu+1};$$

durch wiederholte Anwendung dieser Formel ergiebt sich eine Gleichung von der Form

$$c_0 J_0 + c_1 J_1 + \cdots + c_n J_n = e^{\alpha x} x^\varrho \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \cdots + \frac{C_n}{x^n}\right) + A J_{n+1}.$$

Wenn man

$$J = \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu = e^{\alpha x} x^\varrho \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n}\right)$$

setzt, so hat man

$$\varepsilon_n = e^{-\alpha x} x^{-\varrho+n} \int_l e^{\alpha x} x^{\varrho-n-1} \left(A + c_{n+1} + \frac{c_{n+2}}{x} + \cdots\right) dx$$

Digitized by Google

oder unter Einführung einer bequemeren Bezeichnung

$$\varepsilon_n = e^{-\alpha x} x^{-\varrho+n} \int_1^\infty e^{\alpha t} t^{\varrho-n-1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{g_\mu}{t^\mu}\, dt$$

oder, wenn man

$$t = x - u$$

setzt,

$$\varepsilon_n = \frac{1}{x} \int_0^\infty \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu x^{-\mu} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{\varrho-\mu-n-1} e^{-\alpha u}\, du.$$

War x ursprünglich reell negativ und verlief der Integrationsweg in der reellen t-Achse, so stellt jetzt die positive reelle u-Achse den Integrationsweg dar. Wenn sich x von der negativen reellen Achse ($\arg x = \pi$) aus bewegt, ohne die positive reelle Achse zu überschreiten — sonst würde die unter dem Integralzeichen stehende Potenz von $1 - \frac{u}{x}$ für einen Punkt u des Integrationsweges unstetig werden —, so stellt der letzte Integralausdruck die Fortsetzung von ε_n dar. Wir beschränken x auf das Gebiet

$$\frac{\delta}{2} < \arg x < 2\pi - \frac{\delta}{2}.$$

Wenn u reell positiv und $|x| = R$ ist, während $\arg x$ in dem angegebenen Gebiet liegt, so ist

$$\left|1 - \frac{u}{x}\right| \geqq \sqrt{1 + \frac{u^2}{R^2} - 2\frac{u}{R}\cos\frac{\delta}{2}} \geqq \sin\frac{\delta}{2}.$$

Nimmt man $|x| < r$, so ist

$$\left|x\left(1 - \frac{u}{x}\right)\right| > r \sin\frac{\delta}{2}$$

und bei hinreichend grofsem r

$$\left|\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu x^{-\mu} \left(1 - \frac{u}{x}\right)^{-\mu}\right| < g,$$

wo g eine endliche positive Gröfse ist. Ferner ist der reelle Teil von

$$(\varrho - n - 1) \log\left(1 - \frac{u}{x}\right)$$

von der Form

$$\pm a \log\left|1 - \frac{u}{x}\right| \pm b \arg\left(1 - \frac{u}{x}\right),$$

wo a und b positive Gröfsen sind. Da $\log\left|1 - \frac{u}{x}\right|$ mindestens gleich

Digitized by Google

$\log \sin \frac{\delta}{2}$ und kleiner als $\log\left(1+\frac{u}{r}\right)$ ist und der absolute Betrag von $b \arg\left(1-\frac{u}{x}\right)$ unter einer endlichen Größe h bleibt, so ist

$$\left|\left(1-\frac{u}{x}\right)^{\varrho-n-1}\right| \leqq r^{\varrho} e^{a \log\left(1+\frac{u}{r}\right) - a \log \sin \frac{\delta}{2} + h}.$$

Es ist demnach

$$|\varepsilon_n| \leqq \frac{1}{|x|} \cdot g e^{-a \log \sin \frac{\delta}{2} + h} \int_0^{\infty} e^{-au + a \log\left(1+\frac{u}{r}\right)} du,$$

d. h. ε_n nähert sich für $\lim x = \infty$ gleichmäßig der Grenze Null für die Werte von $\arg x$ zwischen $\frac{\delta}{2}$ und $2\pi - \frac{\delta}{2}$.

Nehmen wir x wieder reell negativ an, so ändert der Integralausdruck für ε_n seinen Wert nicht, wenn wir als Integrationsweg an Stelle der positiven reellen u-Achse eine vom Nullpunkt der u-Ebene mit $\arg u = \varphi$ ins Unendliche gehende Gerade setzen, wofern nur φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegt. Wir beschränken φ auf das Gebiet

$$-\frac{\pi-\delta}{2} < \varphi < \frac{\pi-\delta}{2}.$$

Setzt man

$$u = u' e^{i\varphi}, \; x = x' e^{i\varphi}$$

und

$$g'_{\mu} = g_{\mu} e^{-i\mu\varphi},$$

so ist

$$\varepsilon_n = \frac{1}{x'} \int_0^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} g'_{\mu} x'^{-\mu} \left(1-\frac{u'}{x'}\right)^{\varrho-\mu-n-1} e^{-a\cos\varphi \cdot u'} e^{-ia\sin\varphi \cdot u'} du',$$

wobei die positive reelle Achse der u'-Ebene den Integrationsweg bildet. Das Integral hat jetzt die vorhin untersuchte Form, da durch den Faktor $e^{-ia\sin\varphi \cdot u'}$ mit dem absoluten Betrage 1 nichts geändert wird. Der absolute Betrag von ε_n liegt unter einer Grenze, welche aus der vorhin angegebenen dadurch hervorgeht, daß man a durch $a \sin\frac{\delta}{2} < a\cos\varphi$ ersetzt. Daher nähert sich ε_n gleichmäßig der Grenze Null, wenn x' mit einem Argument zwischen $\frac{\delta}{2}$ und $2\pi - \frac{\delta}{2}$ oder, was dasselbe ist, wenn x mit einem Argument zwischen $\varphi + \frac{\delta}{2}$ und $\varphi + 2\pi - \frac{\delta}{2}$ ins Unendliche geht. Da nun φ zwischen $-\frac{\pi-\delta}{2}$ und $\frac{\pi-\delta}{2}$ variieren kann, so ist gezeigt, daß sich ε_n für alle Argumente von x zwischen $-\frac{\pi}{2}+\delta$ und $\frac{5\pi}{2}-\delta$ gleichmäßig der Null nähert.

Digitized by Google

Die Gleichung

$$J = e^{\alpha x} x^{\varrho} \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \cdots + \frac{C_n}{x^n} + \frac{\varepsilon_n}{x^n} \right)$$

mit dem angegebenen Wert von ε_n (für n kann jede ganze positive Zahl gesetzt werden) schreiben wir

$$J \sim e^{\alpha x} x^{\varrho} \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots \right)$$

und sagen, *das Integral J werde durch die Reihe*

$$e^{\alpha x} x^{\varrho} \left(C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots \right)$$

gleichmäfsig asymptotisch dargestellt für

$$-\frac{\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{5\pi}{2} - \delta ,$$

wo δ eine beliebig kleine positive Zahl ist.

Man sieht, dafs dieser Satz bestehen bleibt, wenn die zu integrierende Funktion *in dem angegebenen Gebiet von x durch die Reihe*

$$e^{\alpha x} x^{\varrho} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\nu}{x^\nu}$$

gleichmäfsig asymptotisch dargestellt wird, auch wenn diese Reihe nicht konvergiert.

5. Nun ergeben sich leicht asymptotische Ausdrücke für die Glieder u_m $(m = 1, 2, \ldots)$ der Reihe η.

Es war

$$u_0 = 1$$

und

$$D_2(u_0) = x^{-2} \mathfrak{P}_0 \left(\frac{1}{x} \right).$$

Man hat für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$u_m = \int_i D_2 (u_{m-1}) \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)} dx + e^{-\alpha x} x^{-\varrho} \int_i D_2 (u_{m-1}) \frac{\Delta_2(x)}{\Delta(x)} dx ,$$

wenn die in Nr. **1.** eingeführten Bezeichnungen beibehalten werden. Es ist also

$$u_1 = \int_i x^{-2} \mathfrak{P}_0 \left(\frac{1}{x} \right) \mathfrak{p}_1 \left(\frac{1}{x} \right) dx + e^{-\alpha x} x^{-\varrho} \int_i e^{\alpha x} x^{\varrho - 2} \mathfrak{P}_0 \left(\frac{1}{x} \right) \mathfrak{p}_2 \left(\frac{1}{x} \right) dx.$$

Das erste Integral erscheint als Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ ohne konstantes

Digitized by Google

Glied, das zweite wird durch eine mit $e^{\alpha x} x^{\varrho-2}$ multiplizierte Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ im Sinne von Nr. 4. asymptotisch dargestellt. Durch Multiplikation des zweiten Integrals mit $e^{-\alpha x} x^{-\varrho}$ entsteht also eine mit dem Faktor x^{-2} versehene asymptotische Potenzreihe von $\frac{1}{x}$. Man hat demnach eine asymptotische Gleichung von der Form

$$u_1 \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{A_{1\nu}}{x^\nu}.$$

Daraus folgt

$$D_2(u_1) \sim x^{-2}\, \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right).^1)$$

Weiter ist

$$u_2 \sim \int_i x^{-2}\, \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) \mathfrak{p}_1\left(\frac{1}{x}\right) dx + e^{-\alpha x} x^{-\varrho} \int_i e^{\alpha x} x^{\varrho-2}\, \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right) \mathfrak{p}_2\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Das erste Integral stellt sich bei formaler Berechnung als eine mit x^{-2} multiplizierte Potenzreihe von $\frac{1}{x}$, das zweite als eine mit $e^{\alpha x} x^{\varrho-2}$ multiplizierte Potenzreihe von $\frac{1}{x}$ dar, sodafs man die asymptotische Gleichung

$$u_2 \sim \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{A_{2\nu}}{x^\nu}$$

erhält. So fortfahrend, findet man

$$u_m \sim \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{A_{m\nu}}{x^\nu};$$

d. h. ist $n \geqq m$ eine beliebige ganze Zahl, und setzt man

$$u_m = \frac{A_{mm}}{x^m} + \frac{A_{m\,m+1}}{x^{m+1}} + \cdots + \frac{A_{mn}}{x^n} + \frac{\varepsilon_m}{x^n},$$

---

1) Wegen $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha$; $\varrho_1 = 0$, $\varrho_2 = -\varrho$ ist $a_0 = \alpha$, $b_0 = 0$; $a_1 = \varrho$, $b_1 = 0$, also

$$D(y) = y'' + \left(\alpha + \frac{\varrho}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\right) y' + \left(\frac{b_2}{x^2} + \cdots\right) y,$$

ferner

$$D_1(y) = y'' + \left(\alpha + \frac{\varrho}{x} + \frac{\varrho}{x^2\left(\alpha + \frac{\varrho}{x}\right)}\right) y',$$

somit

$$-D_2(y) = D(y) - D_1(y) = \left(\frac{a_2}{x^2} + \cdots - \frac{\varrho}{x^2\left(\alpha + \frac{\varrho}{x}\right)}\right) y' + \left(\frac{b_2}{x^2} + \cdots\right) y$$

Digitized by Google

so nähert sich, wenn x ins Unendliche geht, ε_m gleichmäfsig der Grenze Null für

$$-\frac{\pi}{2}+\delta<\arg x<\frac{5\pi}{2}-\delta,$$

wo δ eine beliebig kleine positive Gröfse ist. Ferner ist

$$u_\nu=\frac{\varepsilon_\nu}{x^n} \qquad (\nu>n),$$

wo ε_ν dieselbe Eigenschaft besitzt wie ε_m. Setzt man

$$A_\nu=A_{1\nu}+A_{2\nu}+\cdots+A_{n\nu} \qquad (\nu=1,2,\ldots)$$

und

$$\varepsilon=\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_\nu,$$

so ist

$$\eta=u_0+u_1+u_2+\cdots=1+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots+\frac{A_n}{x^n}+\frac{\varepsilon}{x^n}.$$

In dem in Nr. 2. bezeichneten Gebiet G ist die Reihe

$$x^n(u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots)$$

oder, was dasselbe ist, die Reihe

$$\varepsilon_{n+1}+\varepsilon_{n+2}+\cdots$$

gleichmäfsig konvergent.[1]) Ist γ eine beliebig kleine positive Gröfse, so kann man $p\geq n$ so grofs wählen, dafs im Gebiet G

$$\varepsilon_{p+1}+\varepsilon_{p+2}+\cdots<\frac{\gamma}{2}$$

ist, und R so grofs, dafs im Gebiet G für $|x|>R$

$$|\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_p|<\frac{\gamma}{2}$$

ist. Es ist also $|\varepsilon|<\gamma$, wenn sich x im Gebiet G befindet und $|x|>R$ ist; d. h. *die Funktion η wird bei der Annäherung an $x=\infty$ durch die Reihe*

$$1+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\cdots$$

gleichmäfsg asymptotisch dargestellt, welchen Wert im Intervall

$$-\frac{\pi}{2}+\delta<\arg x<\frac{5\pi}{3}-\delta$$

das Argument von x haben möge.

1) Vgl. den Schlufs von Nr. 3.

Digitized by Google

Setzt man

$$\eta_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} \eta_1,$$

so wird das Integral η_1 der ursprünglichen Differentialgleichung (A) durch die Normalreihe

$$S_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} \left(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\right)$$

in der beschriebenen Weise asymptotisch dargestellt.

6. Wiederholt man die bisher durchgeführten Betrachtungen, nachdem man die Substitution

$$y = e^{\alpha_2 x} x^{\varrho_2} z$$

angewandt hat, so findet man ein Integral η_2 der Differentialgleichung (A), welches durch die Reihe S_2 asymptotisch dargestellt wird.

Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung für z oder eine Differentialgleichung (A), in welcher

$$\alpha_1 = \alpha, \ \alpha_2 = 0; \quad \varrho_1 = \varrho, \ \varrho_2 = 0$$

ist. Mit $u_0 = 1$ beginnend, hat man

$$u_m = e^{\alpha x} x^{\varrho} \int_{\bar{l}} D_2(u_{m-1}) \frac{\Delta_1(x)}{\Delta(x)} dx + \int_{\bar{l}} D_2(u_{m-1}) \frac{\Delta_2(x)}{\Delta(x)} dx;$$

der Integrationsweg $\bar{l}$ verläfst die Stelle $x = \infty$ längs der positiven reellen Achse oder mit einem Argument zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$; x wird auf das Gebiet $\bar{G}$

$$|x| \geq R, \quad -\frac{3\pi}{2} + \delta < \arg x < \frac{3\pi}{2} - \delta$$

beschränkt. In diesem Gebiet $\bar{G}$ ist die Reihe

$$\bar{\eta} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

unbedingt und gleichmäfsig konvergent. Die einzelnen Reihenglieder werden, wenn x zwischen den angegebenen Grenzen bleibt, durch Potenzreihen von $\frac{1}{x}$ gleichmäfsig asymptotisch dargestellt:

$$u_m \sim \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{B_{m\nu}}{x^\nu}.$$

Setzt man

$$B_\nu = \sum_{m=1}^{\nu} B_{m\nu},$$

Digitized by Google

so wird *die Funktion* $\bar{\eta}$ *durch die Reihe*

$$1 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots$$

in dem angegebenen Gebiet gleichmäßig asymptotisch dargestellt, also das Integral

$$\eta_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\beta_2} \bar{\eta}$$

der ursprünglichen Gleichung (A) durch die Reihe

$$S_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\beta_2} \Big(1 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\Big).$$

Wir haben somit den Satz:

Die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \Big(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots\Big)\frac{dy}{dx} + \Big(b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots\Big)y = 0$$

wird, wenn die charakteristische Gleichung

$$\alpha^2 + a_0\alpha + b_0 = 0$$

zwei verschiedene Wurzeln α_1, α_2 *besitzt, durch die im allgemeinen divergenten Normalreihen*

$$S_1 = e^{\alpha_1 x} x^{\beta_1} \Big(1 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots\Big),$$

$$S_2 = e^{\alpha_2 x} x^{\beta_2} \Big(1 + \frac{B_1}{x} + \frac{B_2}{x^2} + \cdots\Big)$$

formell befriedigt. Wir nehmen, was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist, α_1 *und* α_2 *reell und* $\alpha_1 > \alpha_2$ *an. Dann besitzt die Differentialgleichung zwei ausgezeichnete Integrale* η_1, η_2 *von der Eigenschaft, daß bei der Annäherung an die Unbestimmtheitsstelle* $x = \infty$ *das Integral* η_1 *für*

$$-\frac{\pi}{2} < \arg x < \frac{5\pi}{2}$$

durch die Reihe S_1, *das Integral* η_2 *für*

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg x < \frac{3\pi}{2}$$

durch die Reihe S_2 *asymptotisch dargestellt wird. Die dargestellte Methode successiver Annäherungen liefert konvergente Reihenentwicklungen von* η_1 *und* η_2.

Hiermit sind die Hilfsmittel für eine eingehendere Untersuchung der Integrale bei der in irgend einer Richtung erfolgenden Annäherung der Veränderlichen an die Stelle $x = \infty$ gewonnen. Für einen spe-

Digitized by Google

ziellen Fall, die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit linearen Koeffizienten, habe ich diese Untersuchung bereits geführt[1]); man sieht, dafs, nachdem durch den gegenwärtigen Aufsatz für unsere allgemeinere Differentialgleichung der Grund gelegt ist, die dortigen Untersuchungen sich ohne weiteres auf die jetzige Gleichung übertragen lassen, soweit es sich nicht um Eigentümlichkeiten jener speziellen Differentialgleichung handelt, welche man ohne weiteres als solche erkennt.

Clausthal, im April 1901.

1) Math. Ann. 49.

Entwicklung der Funktion Log $\Gamma(a)$ nach fallenden Potenzen des Arguments.

Von J. H. Graf in Bern.

In meinem kleinen Lehrbuch *Einleitung in die Theorie der Gammafunktion und der Eulerschen Integrale*[1]) habe ich nach den Vorlesungen von L. Schlaefli in § 12[2]) eine Entwicklung der Funktion Log $\Gamma(1+a)$ nach steigenden Potenzen vom Argument a gegeben und den zitierten Paragraphen mit der Formel geschlossen:

$$\operatorname{Log}\Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\cdot\frac{1-a}{1+a}\right) + a(1-C) - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{S_{2n+1}-1}{2n+1}\cdot a^{2n+1},$$

wo
$$C = \left(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \operatorname{Log} n,$$

$$S_{2n+1} = \frac{1}{1^{2n+1}} + \frac{1}{2^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+1}} + \cdots.$$

Im Nachfolgenden soll, wieder nach L. Schlaefli, versucht werden, Log $\Gamma(a)$ nach fallenden Potenzen des Arguments a zu entwickeln.

Wir gehen aus von der bekannten Formel

$$\cos\frac{\pi x}{2} = \prod\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right), \text{ wenn } m = 1, 3, 5, \cdots$$

1) Bern 1895, K. J. Wyfs.
2) S. 46, 47.

Digitized by Google

Man logarithmiere diese Gleichung links und rechts

$$\operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2} = \sum_{m=1}^{m=\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right),$$

$$\operatorname{Log}\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right) = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{x^{2\lambda}}{m^{2\lambda}},$$

$$\operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{m^{2\lambda}}\right) x^{2\lambda} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{1 + \frac{1}{3^{2\lambda}} + \frac{1}{5^{2\lambda}} + \cdots\right\} x^{2\lambda}.$$

Man setze zur Abkürzung $A_{2\lambda} = 1 + \frac{1}{3^{2\lambda}} + \frac{1}{5^{2\lambda}} + \cdots$, dann folgt:

$$\operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2} = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}(1 + A_{2\lambda}) x^{2\lambda}. \tag{1}$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit dx und integrieren im Bereich von 0, also

$$\int_0 \operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2}\, dx = -\int_0 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}(1 + A_{2\lambda}) x^{2\lambda} dx = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}(1 + A_{2\lambda}) \frac{x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1}$$

oder

$$\int_0 \operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2}\, dx = -\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{2}{2\lambda+1}\right)(1 + A_{2\lambda}) x^{2\lambda+1}. \tag{2}$$

Man multipliziere nun die Gleichung (1) mit $\frac{x}{2}$,

$$\frac{x}{2} \operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{2\lambda}(1 + A_{2\lambda}) x^{2\lambda+1}. \tag{3}$$

Hierauf soll (2) halbiert und von (3) abgezogen werden, somit

$$\tfrac{1}{2}\int_0 \operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2}\, dx - \frac{x}{2}\operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{2\lambda+1}(1 + A_{2\lambda}) x^{2\lambda+1}. \tag{4}$$

Aus (4) folgt:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{A_{2\lambda}}{2\lambda+1} x^{2\lambda+1} = \tfrac{1}{2}\int_0 \operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2}\, dx - \frac{x}{2}\operatorname{Log}\cos\frac{\pi x}{2} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1}.$$

Bekanntlich ist aber

$$-x + \tfrac{1}{2}\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^{2\lambda+1}}{2\lambda+1};$$

Digitized by Google

daher

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{A_{2\lambda}}{2\lambda+1} x^{2\lambda+1} = \tfrac{1}{2} \int_0^x \mathrm{Log}\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right) dx - \frac{x}{2}\mathrm{Log}\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{1+x}{1-x} + x,$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{A_{2\lambda}}{2\lambda+1} x^{2\lambda+1} = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{Log}\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right) dx + \frac{1-x}{2}\mathrm{Log}\left(2\cos\frac{\pi x}{2}\right) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\left(2\frac{1+x}{1-x}\cos\frac{\pi x}{2}\right) + x.$$

Wächst x bis zu 1, so verschwinden die zwei ersten Terme und der dritte Term wird zur bekannten Konstanten $-\frac{1}{2}\mathrm{Log}\,2\pi$, also

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{A_{2\lambda}}{2\lambda+1} = 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,2\pi.^{1}) \tag{5}$$

Nun war

$$A_{2\lambda} = \frac{1}{3^{2\lambda}} + \frac{1}{5^{2\lambda}} + \frac{1}{7^{2\lambda}} + \cdots = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{(2\mu+1)^{2\lambda}},$$

folglich

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{A_{2\lambda}}{2\lambda+1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{2\lambda+1} \cdot \frac{1}{(2\mu+1)^{2\lambda}}.$$

Ferner ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{2\lambda+1} \cdot \frac{1}{(2\mu+1)^{2\lambda+1}} = -\frac{1}{2\mu+1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\frac{2\mu+1+1}{2\mu+1-1}$$
$$= -\frac{1}{2\mu+1} + \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,\frac{\mu+1}{\mu}.$$

Multipliziert man beide Seiten mit $2\mu+1$, so folgt demnach

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{2\lambda+1} \cdot \frac{1}{(2\mu+1)^{2\lambda}} = -1 + (\mu+\tfrac{1}{2})\,\mathrm{Log}\,\frac{\mu+1}{\mu}$$

und endlich

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{A_{2\lambda}}{2\lambda+1} = \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \left[(\mu+\tfrac{1}{2})\,\mathrm{Log}\,\frac{\mu+1}{\mu} - 1\right] = 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{Log}\,2\pi. \tag{6}$$

---

1) Vergleiche den Ausdruck im zitierten Büchlein S. 35, Formel 44.

Digitized by Google

Man setze nun

$$f(a) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \left\{ (a+\lambda-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} \frac{a+\lambda}{a+\lambda-1} - 1 \right\}, \tag{7}$$

so ist

$$f(1) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \left\{ (\lambda+\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} \frac{\lambda+1}{\lambda} - 1 \right\},$$

also nach (6)

$$f(1) = 1 - \tfrac{1}{2} \operatorname{Log} 2\pi. \tag{8}$$

Begrenzen wir in (7) die Summe nach oben mit $\lambda = N$, wo N eine sehr grofse ganze positive, zum unendlich werden bestimmte Zahl ist, so kann (7) dargestellt werden wie folgt:

$$f(a) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=N} (a+\lambda-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log}(a+\lambda) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=N-1} (a+\lambda+\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log}(a+\lambda) - N$$

$$= -(a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} a + (N+a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log}(a+N) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=N-1} \operatorname{Log}(a+\lambda) - N$$

$$= -(a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} a + (N+a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} N \left(1+\frac{a}{N}\right) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=N-1} \operatorname{Log}(a+\lambda) - N$$

$$= -(a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} a + (N+a-\tfrac{1}{2}) \left(\operatorname{Log} N - \frac{a}{N} - \tfrac{1}{2} \frac{a^2}{N^2} + \cdots \right) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=N-1} \operatorname{Log}(a+\lambda) - N,$$

$$f(a) = (N+a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} N - N - \operatorname{Log}[a(a+1)\cdots(a+N-1)] + a - (a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} a.$$

Hieraus

$$f(1) = (N+\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} N - N - \operatorname{Log}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N) + 1,$$

subtrahiert

$$f(a) - f(1) = (a-1) \operatorname{Log} N + \operatorname{Log} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N}{a(a+1)\cdots(a+N-1)} + a - 1 - (a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} a,$$

$$f(a) - f(1) = \operatorname{Log} \frac{N!\, N^{a-1}}{a(a+1)\cdots(a+N-1)} + a - 1 - (a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} a.$$

Wir multiplizieren den Bruch des Logarithmus der rechten Seite mit $\lim_{N=\infty} \frac{N}{a+N} = 1$; also erhält man

$$f(a) - f(1) = \operatorname{Log} \frac{N!\, N^a}{a(a+1)\cdots(a+N)} + (a-1) - (a-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} a$$

Digitized by Google

und erhalten für $\lim N = \infty$:

$$f(a) - f(1) = \operatorname{Log}\Gamma(a) + (a-1) - (a-\tfrac{1}{2})\operatorname{Log} a.$$

oder

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) = f(a) - f(1) + 1 - a + (a-\tfrac{1}{2})\operatorname{Log} a,$$

oder wenn die Werte nach (7) und (8) eingesetzt werden:

$$\operatorname{Log}\Gamma(a) = -1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi + 1 - a + (a-\tfrac{1}{2})\operatorname{Log} a + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left\{(a+\lambda-\tfrac{1}{2})\operatorname{Log}\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1} - 1\right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{Log} 2\pi - a + (a-\tfrac{1}{2})\operatorname{Log} a + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left\{a+\lambda-\tfrac{1}{2})\operatorname{Log}\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1} - 1\right\}$$

und endlich

$$\Gamma(a) = \sqrt{2\pi}\cdot e^{-a}\, a^{a-\frac{1}{2}} \prod_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{e}\left(\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1}\right)^{a+\lambda-\frac{1}{2}}. \tag{8}$$

Diese Ableitung ist ebenso elegant wie die im zitierten Büchlein gegebene.

Um nun einen Ausdruck zu erhalten, der nach fallenden Potenzen des Arguments fortschreitet, führen wir *Bernoullische Funktionen* ein.

Im Ausdruck für $f(a)$ greife man den allgemeinen Term heraus, dann ist

$$(a+\lambda-\tfrac{1}{2})\operatorname{Log}\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1} - 1 = \int_0^1 \frac{t-\frac{1}{2}}{a+\lambda-t}\,dt,$$

ferner ist

$$\frac{1}{a+\lambda-t} = \int_0^\infty e^{-(\lambda+a-t)x}\,dx,$$

somit folgt nach Formel (7)

$$f(a) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left\{(a+\lambda-\tfrac{1}{2})\operatorname{Log}\frac{a+\lambda}{a+\lambda-1} - 1\right\},$$

$$f(a) = \int_0^\infty \int_0^1 (t-\tfrac{1}{2}) e^{-(a-t)x} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} e^{-\lambda x}\,dt\,dx, \qquad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} e^{-\lambda x} = \frac{1}{e^x - 1}. \tag{9}$$

1) Vergl. das zitierte Büchlein S. 46, Formel 46.

Digitized by Google

Die Bernoullische Funktion sei definiert durch

$$\frac{y e^{yt}}{e^y - 1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n,t) \cdot y^n,$$

$$\chi(n,t) = \frac{t^n}{n!} - \frac{1}{2}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=1}^{2\lambda \geqq n} (-1)^{\lambda-1} \frac{B_\lambda}{(2\lambda)!} \frac{x^{n-2\lambda}}{(n-2\lambda)!},$$

wo B_λ die λte Bernoullische Zahl, z. B.

$$\chi(0,t) = 1,$$
$$\chi(1,t) = t - \tfrac{1}{2},$$
$$\chi(2,t) = \tfrac{1}{2}t^2 - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{12}$$

u. s. w. Substituieren wir nun die hierher gehörenden Werte in (9), so folgt

$$f(a) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \left\{ (a+\lambda-\tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} \frac{a+\lambda}{a+\lambda-1} - 1 \right\} = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x - 1} \left\{ \int_0^1 e^{xt} \chi(1,t)\, dt \right\} dx;$$

das auf x bezügliche Integral konvergiert für $x = 0$, weil hier $\int_0^1 e^{xt} \chi(1,t)\, dt$ von gleicher Ordnung mit x ist. Nun ist

$$\int_0^1 e^{xt} \chi(1,t)\, dt = \frac{e^x - 1}{x^2} \sum_{\lambda=2}^{\lambda=n} c_\lambda x^\lambda - x^{n-1} \int_0^1 e^{xt} \chi(n, 1-t)\, dt,$$

$c_{2\lambda} = (-1)^{n-1} B_\lambda$; daher ist

$$f(a) = \int_0^\infty e^{-ax} \left\{ \sum_{\lambda=2}^{\lambda=n} c_\lambda x^\lambda - \frac{x^{n-1}}{e^x - 1} \int_0^1 e^{xt} \chi(n, 1-t)\, dt \right\} dx,$$

$$f(a) = \sum_{\lambda=2}^{\lambda=n} \frac{(\lambda-2)!\, c_\lambda}{a^{\lambda-1}} - \int_0^1 \chi(n, 1-t) \left(\int_0^\infty \frac{x^{n-1} e^{-(a-t)x}}{e^x - 1} dx \right) dt. \tag{10}$$

Setzt man in (10) $n = 2q+1$, $\lambda = 2\mu$, so hat man nach (8) und (10)

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{Log} \Gamma(a) = {} & \tfrac{1}{2} \operatorname{Log}(2\pi - a) + (a - \tfrac{1}{2}) \operatorname{Log} a + \sum_{\mu=1}^{\lambda=q} (-1)^{\mu-1} \frac{B_\mu}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{1}{a^{2\mu-1}} \\ & + \int_0^1 \chi(2q+1, t) \left\{ \int_0^\infty e^{-(a-t)x} \frac{x^{2q}}{e^x - 1} dx \right\} dt, \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Digitized by Google

und unsere Aufgabe ist gelöst. Der Ausdruck ist streng richtig, aber nicht sehr bequem und kann aus leicht begreiflichen Gründen nicht bequem sein.

1. Es ist

$$\frac{1}{e^x-1}-\int_0^1 e^{xt}\chi(1,t)\,dt=\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-1+\tfrac{1}{2}x\right);$$

daher folgt auch aus

$$f(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{e^x-1}\left\{\int_0^1 e^{xt}\chi(1,t)\,dt\right\}dx$$

ein zweiter Ausdruck für $f(a)$, nämlich

$$f(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{x^2}\left(\frac{x}{e^x-1}-1+\tfrac{1}{2}x\right)dx, \tag{12}$$

eine einfache Darstellung jener Summenformel, die bei der Schätzung der Gammafunktion für ein sehr grofses Argument eine gewisse Rolle spielt.

2. Es sei $\frac{\partial \operatorname{Log}\Gamma(a)}{\partial a}=A(a)$, dann folgt aus (11)

$$\left\{\begin{aligned} A(a)&=\operatorname{Log}a-\frac{1}{2a}+\sum_{\mu=1}^{\mu=q}(-1)^\mu\frac{B_\mu}{2\mu}\cdot\frac{1}{a^{2\mu}}\\ &\quad-\int_0^1\chi(2q+1,t)\left\{\int_0^\infty e^{-(a-t)x}\frac{x^{2q+1}}{e^x-1}\,dx\right\}dt. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Diese Formel bietet, wenn für a eine grofse positive ganze Zahl gesetzt wird, ein vorteilhaftes Mittel zur Berechnung der *Konstanten des Integrallogarithmus*

$$C=-A(1)=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{a-1}-A(a).$$

Bern, April 1902.

Digitized by Google

Über Axonometrie und schiefe Parallelprojektionen.

Von Christian Beyel in Zürich.

Mit 2 Tafeln.

1. Wir halten es für sehr nützlich, wenn schon beim Beginne des Unterrichts in der darstellenden Geometrie gezeigt wird, wie aus Grundrifs und Aufrifs ein anschauliches Bild in schiefer Parallelprojektion hergestellt werden kann. Bedient man sich dabei des axonometrischen Verfahrens, so kann man mit dem Hinweise auf den Satz von Pohlke die Achsenbilder und Mafsstäbe beliebig wählen und ganz mechanisch ein solches Bild zeichnen. Soll aber dazu die Richtung der Projektionsstrahlen bestimmt werden, so geht die Lösung dieser Aufgabe weit über die elementare Stufe hinaus. Und doch sollten wir diese Richtung kennen; denn von ihr hängt gerade das ab, was wir mit unserem Bilde erreichen wollen, nämlich eine gewisse Anschaulichkeit des Gegenstandes oder bestimmter Teile desselben. Zeichnet man mit orthogonaler Axonometrie, so fällt die Lösung der erwähnten Aufgabe weg. Die Richtung der Projektionslinien ist uns zugleich mit der Bildebene gegeben. Aber es ist in diesem Falle immer schwierig, eine Lage der Bildebene zu finden, welche die 3 Achsen im Endlichen schneidet und dem Beschauer des darzustellenden Gegenstandes eine gute Stellung bietet, von der aus annähernd senkrecht auf das Bild gesehen werden kann. Wer nur nach theoretischen Schablonen arbeitet, kümmert sich darum freilich nicht. Der praktische Konstrukteur sollte sich aber in erster Linie darüber klar sein, wie er sich gegenüber dem Bilde und dem Gegenstande aufstellen mufs. Diese Klarheit fällt vollends fort, wenn man fertige Achsenbilder benutzt, welche mit ihren Winkeln und Mafsstäben einer Tabelle entnommen sind. Wir schliefsen daraus, dafs die angeführten Methoden nicht dem praktischen Bedürfnis entsprechen, welches verlangt, dafs wir uns möglichst schnell über die gegenseitige Lage von Bildebene und Objekt orientieren und die Bildebene günstig wählen können. Diesem Bedürfnisse wird am besten entsprochen, wenn wir stets die Bildebene vertikal, d. h. senkrecht zur Grundrifsebene und parallel zur z-Achse stellen. Der Beschauer, welcher gleichfalls vertikal vor der Bildebene steht, mag von oben schief herabsehen und wird so leicht eine Richtung finden, welche eine gute Übersicht über den Gegenstand gestattet. Wir können uns denken, dafs die Bildebene durchsichtig sei und vor dem Gegenstande aufgestellt werde. Wir wollen nun zeigen, wie sich

Digitized by Google

für eine solche Stellung der Bildebene bequem ein parallelperspektivisches Bild aus Grundrifs und Aufrifs oder aus gegebenen Abmessungen ableiten läfst und auch auf elementarer Stufe der Darstellung erklärt werden kann.

I.

2. Wir besprechen zuerst die Konstruktion der Achsenbilder und Mafsstäbe, wenn die Bildebene B und die Projektionsrichtung gegeben sind. Grundrifs und Aufrifs eines Gegenstandes sollen gezeichnet vorliegen und (Fig. 1) $OAEC$ sei das Rechteck, in dessen Innerem sich der Grundrifs befindet. OA sei also das gröfste x und OC das gröfste y. Dann stellen wir die Bildebene so, dafs sie durch E geht und zu z und zu der Diagonale AC des Rechtecks $OAEC$ parallel ist. Die Projektionsrichtung sei durch eine Gerade l gegeben, welche durch O geht. Diese Lage der Bildebene gestattet stets eine günstige Übersicht über den Gegenstand. Bei der Wahl von l können die Teile berücksichtigt werden, welche bei dem Bilde besonders hervortreten sollen. Zur Konstruktion der Achsenbilder und Mafsstäbe ist dagegen diese Lage von B nicht geeignet, weil die Schnittpunkte S_x, S_y von B mit den Achsen x, y meistens vom Blatte fallen. Da aber bei Parallelprojektionen die Bilder auf parallele Ebenen kongruent sind, so können wir anstatt B die Parallelebene B* benutzen, deren erste Spur in AC liegt. Wir suchen den Schnittpunkt D des Projektionsstrahles l mit der Ebene B*. Verbinden wir D mit A, C und ziehen wir durch D eine Parallele zu z, so sind diese Linien Achsenbilder. Legen wir die Ebene B* um AC in die Grundrifsebene und zeichnen wir mit Hilfe des z von D den umgelegten Punkt (D), so sind $A(D)$ und $C(D)$ die resp. Bilder der x- und y-Achse. Das umgelegte Bild der z-Achse liegt in $D'(D)$. (Fig. 1). In Bezug auf die Mafsstäbe bemerken wir, dafs $A(D)$ das Bild von AO. Folglich ist $AO(D)$ ein Mafsstabdreieck für die Reduktion der x. $C(D)$ ist das Bild der Länge CO. Daher ist $CO(D)$ das Mafsstabdreieck für die y. Die z sind im Bild und Original gleich lang, weil die zAchse zu ihrem Bilde parallel ist.

Damit sind Achsenbilder und Mafsstäbe für eine angenommene Bildebene und Projektionsrichtung gefunden.

3. Für die praktische Durchführung der Konstruktion dient es uns nicht, die Achsenbilder in den Grundrifs hinein zu zeichnen. Wir wollen daher im Anschlusse an Fig. 1 Grundrifs, Aufrifs und axonometrisches Bild so neben einander stellen, dafs die Anordnung für die Konstruktion bequem liegt. (Fig. 2.)

Wir wählen auf der x-Achse einen beliebigen Punkt O_1 und ziehen die Vertikale z. Auf ihr tragen wir von O_1 aus nach unten das positive

Digitized by Google

z des Punktes D ab. Wir ziehen durch den Endpunkt D_1 eine Parallele zu x. Wir tragen auf ihr die Länge $D'A$ von D_1 aus nach rechts und $D'C$ von D_1 aus nach links ab. Verbinden wir die Endpunkte A_1, C_1 mit O_1, so sind O_1A_1 und O_1C_1 die Achsenbilder. Machen wir $O_1M = OC$, so ist C_1O_1M ein Maßstabdreieck für die y. Machen wir $A_1N = OA$, so ist A_1O_1N ein Maßstabdreieck für die x.

Sei dann ein Punkt $P(P'P'')$ gegeben, so bestimmen wir mit Hilfe der erwähnten Dreiecke die Bildlängen von x und y. Wir zeichnen daraus den axonometrischen Grundriß P_1'. Tragen wir auf einer Vertikalen durch P_1' die Höhe z ab, so erhalten wir das axonometrische Bild P.

Die Verwandlung der Koordinate x in ihre Bildlänge kann mittelst Paralleler direkt aus dem Grundrisse bestimmt werden. Wir verbinden O (in Fig. 1) mit N (in Fig. 2) und ziehen durch x von P die Parallele zu dieser Linie. Bei der Konstruktion der Bildlänge von y projizieren wir diese Koordinate durch eine Horizontale auf O_1D_1 und ziehen die Parallele zu C_1M. Die Konstruktion von P aus dem axonometrischen Grundrisse P_1' kann ebenfalls mit Parallelen gefunden werden. Wir ziehen durch P'' die Horizontale und schneiden mit derselben das Bild der z-Achse (Fig. 2). Durch diesen Schnittpunkt zeichnen wir eine Parallele zu O_1P_1'. Sie trifft die Vertikale durch P_1' in P.

Soll noch der axonometrische Aufriß P'' und der axonometrische Seitenriß P''' konstruiert werden (Fig. 2), so müssen wir das Parallelepiped vervollständigen, welches x, y, z zu Kanten und O_1 und P zu gegenüberliegenden Ecken hat.

4. In den meisten Fällen wird es zu mühsam sein, den Grundriß und Aufriß punktweise in Axonometrie zu übertragen. Es wird sich vielmehr empfehlen, zunächst aus dem Grundriß die axonometrische Grundrißfigur zu zeichnen und aus dieser das axonometrische Bild herzustellen. Wir untersuchen daher die Beziehungen zwischen Grundriß und axonometrischem Grundriß und heben ausgezeichnete Punkte und Linien hervor.

Der projizierende Strahl l durch O treffe die Bildebene B in O_1. l' sei der Grundriß von l. Wir suchen die axonometrischen Bilder der Punkte H', D', G', ... auf l'. (Fig. 3.) Wir ziehen zu diesem Zwecke durch H', D', G', ... die Parallelen zu OO_1. Sie treffen die Bildebene in H_1, D_1, G_1, ... (Fig. 4a.) Alle diese Bilder fallen in das Bild der z-Achse. Die Entfernungen der Punkte H_1, D_1, G_1, ... von O_1 sind so groß wie die z der Punkte H, D, G, ... auf l. Wir können daher die axonometrischen Grundrisse direkt bestimmen, wenn wir diese z von O_1 aus auf das Bild der z-Achse abtragen (Fig. 4). Ziehen wir

Digitized by Google

durch H', D', G', ... in der Grundrifsebene die Parallelen zur ersten Spur der Bildebene — also zu AC —, so sind diese Linien parallel B. Ihre axonometrischen Bilder gehen daher durch H_1, D_1, G_1, ... und sind parallel A_1C_1, d. h. senkrecht zum Bilde von z. Die Strecke, welche zwischen 2 Punkten einer solchen Parallelen, z. B. zwischen $K'L'$, liegt, mufs im axonometrischen Bilde ebenso grofs erscheinen. Eine Punktreihe auf einer solchen Parallelen ist kongruent zur Reihe ihrer axonometrischen Bilder.

Wir benutzen diese Beziehungen, um zum Grundrifs einer Geraden $P'Q'$ den axonometrischen Grundrifs zu zeichnen. Sei I' der Schnitt von $P'Q'$ mit l', so suchen wir I'' auf l'' und tragen das z von O_1 aus ab. (Fig. 4). Wir finden I_1. $P'Q'$ treffe die Gerade AC in K', so machen wir $D'K'$ der Gröfse und dem Sinne nach gleich D_1K_1. Dann ist I_1K_1 der verlangte axonometrische Grundrifs. Soll der axonometrische Grundrifs R_1' eines Punktes direkt aus dem Grundrifs R' bestimmt werden, so ziehen wir durch R' die Parallele zu AC. Ihr Schnitt mit l' sei S'. Wir suchen S'' und finden damit das z von S. Wir konstruieren S_1 und ziehen durch S_1 die Parallele zu A_1C_1. Dann machen wir $S_1R_1' = S'R'$. *Wir können also auf diese Weise den axonometrischen Grundrifs durch 2 rechtwinklige Koordinaten* [O_1S_1, S_1R_1'] *darstellen, welche sich ohne weitere Reduktion aus dem Grundrifs und Aufrifs entnehmen lassen.*

In Fig. 3 und 4 ist nach diesem Verfahren zum Dreieck $P'Q'R'$ der axonometrische Grundrifs $P_1'Q_1'R_1'$ und dazu das axonometrische Bild konstruiert. Die Figur zeigt, dafs dies mit grofser Genauigkeit und vielen Proben geschehen kann.

5. Oft ist es erwünscht, das axonometrische Bild sofort aus dem Grundrifs und Aufrifs ohne Benutzung des axonometrischen Grundrisses abzuleiten. Wir entwickeln daher auch für diesen Fall ein einfaches Verfahren. Wir knüpfen an das Vorhergehende an und zeichnen für $P'P''$ die Punkte L', L'', L_1 und P_1'. (Fig. 5 und 6). Dann tragen wir in P_1' das z von P ab und erhalten das axonometrische Bild von P wie oben. Nun ist der Abstand dieses Bildes von einer Horizontalen durch O_1 ebenso grofs wie die Differenz der z von P und von L. Wir können daher sofort diese Differenz bilden (Fig. 5) und sie von O_1 aus auf z abtragen. Wir ziehen durch den Endpunkt P^* eine Horizontale und machen $P^*P = L'P'$. Daraus ergiebt sich folgende allgemeine Regel: Soll zu einem beliebigen Punkte das axonometrische Bild direkt gefunden werden, so konstruieren wir zu seinem Grundrifs den entsprechenden Punkt L' auf l' und den Aufrifs L'' auf l''. Dann suchen

Digitized by Google

wir die Differenz vom z des gegebenen Punktes und vom z des korrespondierenden Punktes L unter Berücksichtigung des Vorzeichens. Wir tragen diese Differenz auf dem Bilde der z-Achse von O_1 aus nach oben oder unten ab, je nachdem sie positiv oder negativ ist. Auf der Horizontalen durch den Endpunkt wird die Entfernung der Grundrisse des gegebenen Punktes und des entsprechenden Punktes L unter Berücksichtigung des Sinnes aufgetragen. *Wir können also auch das axonometrische Bild von einem beliebigen Punkte P durch 2 rechtwinklige Koordinaten darstellen, welche direkt aus dem Grundriſs und Aufriſs zu entnehmen sind. Die eine ist die Differenz der z von P und L, die andere ist die Entfernung ihrer Grundrisse.*

Unter den Punkten einer Geraden g heben wir denjenigen T (Fig. 5) hervor, dessen Grundriſs im Schnittpunkte von l' mit g' liegt. Er fällt mit seinem entsprechenden Punkte L' zusammen. Daher liegt das axonometrische Bild T^* dieses Punktes in z. Sein Abstand von O_1 ist gleich der Entfernung der Aufrisse von den 2 Punkten T_g'', T_l'' auf g und l, deren Grundrisse in T' liegen. In Fig. 3 und 4 sind die analogen Schnittpunkte G^*, H^*, I^* für die Seiten des Dreiecks PQR gezeichnet. In Fig. 5 und 6 ist noch die horizontale und die vertikale Spur S_h, S_v der Geraden g dargestellt und ihr Schnittpunkt S mit der Bildebene B. Ferner ist eine Ebene gezeichnet, welche durch diese Gerade g und einen Punkt S_x auf der x-Achse geht.

6. Aus der entwickelten Darstellung eines Gegenstandes in schiefer Axonometrie ergeben sich eine Reihe allgemeiner Regeln, welche bei der Konstruktion Verwendung finden. Wir stellen diese Regeln übersichtlich zusammen.

a) Alle Punkte, deren Grundrisse in l' liegen, haben ihre axonometrischen Grundrisse und Bilder im Bilde von z. Punkte, deren Grundrisse auf einer Parallelen g' zu l' liegen, haben axonometrische Grundrisse und Bilder in einer Parallelen zu z. Ihr Abstand von z ist gleich der in der Richtung von AC gemessenen Entfernung der Grundrisse g', l'.

b) Alle Linien, deren Grundrisse parallel AC sind, haben axonometrische Grundrisse, welche senkrecht zu z sind. Reihen, welche auf solchen Linien im Grundriſs und axonometrischen Grundriſs liegen, sind kongruent. Die Strecke zwischen 2 Punkten, deren Grundrisse auf einer Parallelen zu AC liegen, erscheint im axonometrischen Bilde in wahrer Länge.

c) Liegt der Grundriſs einer Figur in einer Parallelen zu AC, so giebt das axonometrische Bild die wahre Gestalt der Figur an.

Digitized by Google

d) Linien, welche parallel zu l sind, erscheinen im axonometrischen Bilde als Punkte. Linien, welche l schneiden, haben axonometrische Bilder, die durch das Bild O_1 von O gehen.

e) Linien, welche parallel zur Aufrifsebene sind, haben axonometrische Grundrisse parallel zum Bilde von x; Linien, welche parallel zur Seitenrifsebene sind, haben axonometrische Grundrisse parallel zum Bilde von y.

f) Soll entschieden werden, welche von 2 windschiefen Geraden g, h sichtbar ist, d. h. welche von O aus weiter nach vorn liegt, so betrachten wir zunächst den Punkt, in welchem sich die axonometrischen Bilder von g, h schneiden. Er ist das Bild von 2 Punkten, von denen der eine auf g und der andere auf h liegt. Wir suchen zu diesen Punkten die axonometrischen Grundrisse, welche auf einer Parallelen zu z liegen. Aus ihnen läfst sich erkennen, welcher der 2 Punkte vor dem anderen liegt. Dann mufs der vordere Punkt auf der vorderen Geraden liegen.

II.

7. Nachdem wir gezeigt haben, wie bei gegebener Bildebene und Projektionsrichtung das axonometrische Bild konstruiert werden kann, wollen wir solche Lagen besprechen, bei denen die Konstruktion noch mehr vereinfacht wird.

Zur Wahl der Bildebene bemerken wir, dafs für die gebräuchlichen Winkeldreiecke entweder die Lage bequem ist, bei welcher $\sphericalangle OAC = 45^0$ oder $\sphericalangle OAC = 30^0$. Besonders letztere Annahme entspricht in den meisten Fällen den Dimensionen des vorliegenden Grundrisses. In Bezug auf die Projektionsrichtung ist es vorteilhaft, l so zu wählen, dafs die Projektionen l', l'' symmetrisch zur x-Achse liegen. Dann befindet sich l in der Ebene durch x, welche den ersten und dritten Quadranten halbiert. Für jeden Punkt von l ist $y = z$. Folglich finden wir für jeden Punkt L' von l' (Fig. 7) den axonometrischen Grundrifs L_1 (Fig. 8) sofort, indem wir durch L' die Horizontale ziehen und ihren Schnittpunkt mit dem Bilde von z bestimmen. Durch die Punkte L' auf l' gehen Parallele zu AC, deren axonometrische Grundrisse Horizontale durch dieselben Punkte L' sind. Auf ihnen liegen axonometrische Grundrisse von Punkten, deren Abstände von z gleich den in der Richtung von AC gemessenen Entfernungen der resp. Grundrisse von l' sind. In Fig. 7 und 8 ist bei dieser Disposition das axonometrische Bild eines geraden Kreiscylinders dargestellt, welcher auf der Grundrifsebene senkrecht steht und mit einer Normalebene zur Aufrifsebene geschnitten ist. Wir konstruieren zuerst das axonometrische Bild des Basiskreises und beginnen mit den Punkten L', F', in welchen l' diesen

Digitized by Google

Kreis schneidet. Ihre axonometrischen Bilder L_1, F_1 liegen in z. Dann bestimmen wir die Schnittpunkte H', G' des Kreises mit AC. Ihre axonometrischen Bilder liegen auf einer Horizontalen durch D', welche z in D_1 trifft. Wir machen $D'H' = D_1H_1$ und $D'G' = D_1G_1$. Wir finden die Tangenten in diesen Punkten unter Benutzung der Schnittpunkte ihrer Grundrisse mit l'. Wir projizieren diese Punkte auf z. Hierauf ziehen wir die Tangenten parallel l'. Ihre axonometrischen Bilder sind vertikal und geben die Umrisse des axonometrischen Bildes. Zu ihrer Konstruktion bedienen wir uns der Schnittpunkte der Tangenten mit AC. Schliefslich zeichnen wir die Tangenten parallel AC an den Basiskreis, bestimmen ihre Schnitte mit l' und ziehen durch diese Punkte die Horizontalen. Sie sind die axonometrischen Bilder der Tangenten. Wir konstruieren ihre Berührungspunkte und zeichnen dann noch aus dem Grundrifs des gefundenen Kegelschnittes mit Hilfe der z das axonometrische Bild des Normalschnittes. L, F sind die Schnittpunkte dieses Bildes mit dem Bilde der z-Achse.

8. Wir wenden uns zu dem Falle der schiefen Projektion auf die Ebene B, bei welchem die x, y, z in Bild und Original gleich lang sind. Bei demselben mufs für eine gegebene Bildebene die Projektionsrichtung so gewählt werden, dafs (Fig. 1) in den Mafsstabdreiecken $OA(D)$ und $OC(D)$ die Längen $OA = A(D)$ und $OC = C(D)$. Dies ist nur möglich, wenn der Punkt (D) orthogonal symmetrisch zu O in Bezug auf CA liegt. Es mufs also O und (D) auf einer Senkrechten zu AC liegen, und diese trifft AC in D'. Mithin ist diese Senkrechte zugleich der Grundrifs l' von l. Ferner ist $OD' = D'(D)$. Aber $D'(D)$ ist die Höhe z von D. Wir schliefsen daraus:

Die Mafsstäbe sind im Original und Bilde gleich, wenn der Grundrifs der Projektionsrichtung senkrecht zur ersten Spur der Bildebene ist. Die Projektionsrichtung schliefst mit der Grundrifsebene und mit der Bildebene einen Winkel von 45° ein.

Die Bilder der Achsen x und y stehen zu einander senkrecht (Fig. 9 und 10). Daraus folgt, dafs der Grundrifs eines Gegenstandes zum axonometrischen Grundrifs kongruent ist. Drehen wir den ersteren (Fig. 9) um den Winkel, welchen (Fig. 10) das Bild der z-Achse mit dem Bilde der y-Achse einschliefst, so erhalten wir den axonometrischen Grundrifs. Der axonometrische Grundrifs eines Punktes ist von O_1 soweit entfernt, wie der Grundrifs von O. Die Reihe der Punkte L', D', N', ... auf l' ist kongruent zur Reihe der axonometrischen Grundrisse L_1, D_1, N_1, ... auf z. Nach diesen Grundsätzen ist in Fig. 9 und 10 ein Prisma dargestellt, welches auf der Grundrifsebene senkrecht steht und mit einer

Digitized by Google

Normalebene zur Aufrifsebene geschnitten wird. Zwei Seiten JF, HG der Basis sind parallel AC. Daraus folgt, dafs die Seitenflächen des Prismas, welche durch diese Seiten gehen, im axonometrischen Bilde in wahrer Gröfse erscheinen.

Geben wir der Bildebene alle möglichen Lagen, so gehört zu jeder ein Projektionsstrahl l durch O, für den die Mafsstäbe gleich sind. Diese Linien l bilden mit der Grundrifsebene Winkel von 45°. Sie liegen also auf einem geraden Kreiskegel aus O, der z zur Achse hat und dessen Mantellinien mit z Winkel von 45° bilden. Die entsprechenden Ebenen $\mathfrak{B}^*$, welche dieselbe Entfernung — etwa OD' — von z haben, schneiden die Grundrifsebene in Spuren, welche zu den resp. Grundrissen von l senkrecht stehen. Daraus folgt, dafs die Ebenen $\mathfrak{B}^*$ einen geraden Kreiscylinder umhüllen, welcher z zur Achse und OD' zum Radius hat.

Wir heben unter den Ebenen $\mathfrak{B}^*$ diejenigen hervor, für welche $\sphericalangle OAC = 30°$. Dann ist auch $\sphericalangle COD = 30°$. Folglich schliefst das Bild der x-Achse mit der Horizontalen und das Bild der y-Achse mit der Vertikalen je einen Winkel von 30° ein (Fig. 10$_a$). Die Linie l wird bei dieser Annahme steil. Wählen wir $\sphericalangle OAC = 45°$, so schliefsen die Bilder von x und y mit dem Bilde von z Winkel von 45° ein. (Fig. 10$_b$).

9. Die Konstruktion des axonometrischen Bildes wird sehr bequem, wenn wir annehmen, dafs die Projektionsrichtung zur Grundrifsebene parallel sei. Dann fällt der ganze axonometrische Grundrifs in eine Horizontale durch O_1 (Fig. 12). Die Bildlängen für die Koordinaten x und y ergeben sich direkt aus den Mafsstabdreiecken OAD' und OCD' (Fig. 11). Es ist aber in diesem Falle einfacher das axonometrische Bild ohne Benutzung dieser Dreiecke direkt aus dem Grundrifs und Aufrifs mittelst rechtwinkliger Koordinaten zu zeichnen. Sind I', I'' Grund- und Aufrifs eines Punktes, so zeichnen wir zu I' den zugehörigen Punkt L', indem wir die Parallele zu AC ziehen. L'' liegt im Aufrisse von l, d. h. in der x-Achse. Daher können wir die Länge $L'I'$ direkt von O_1 aus unter Berücksichtigung des Sinnes auf der Horizontalen abtragen. Wir finden den axonometrischen Grundrifs I_1 und ziehen durch ihn die Vertikale. Wir projizieren den Aufrifs I'' in horizontaler Richtung auf diese Vertikale und erhalten I. Um die Schnittpunkte der axonometrischen Bilder von Geraden mit dem Bilde der z-Achse zu bestimmen, suchen wir die resp. Schnitte der Grundrisse mit l', z. B. den Schnitt N' von $H'G'$ mit l'. Wir zeichnen den Aufrifs N'' auf $G''H''$ und projizieren ihn horizontal auf das Bild von z. Durch diese Projektion N^* geht das axonometrische Bild von GH.

Digitized by Google

In Fig. 13 und 14 ist nach dieser Methode das axonometrische Bild eines Oktaeders gezeichnet, von welchem 2 Seitenflächen zur Grundrifsebene senkrecht stehen.

Die besprochene Methode findet auch dann Verwendung, wenn es sich darum handelt, einen Gegenstand senkrecht auf eine Ebene $\mathfrak{B}$ zu projizieren, welche parallel z ist. In diesem Falle ist l' senkrecht AC; l'' liegt in x.

Wählen wir die Projektionsrichtung parallel zur Aufrifsebene, so fallen die Bilder der x- und der z-Achse in dieselbe Vertikale. Der Projektionsstrahl l durch O liegt in der Aufrifsebene, und sein Grundrifs fällt in x. D' kommt auf A zu liegen (Fig. 13). Legen wir D um, so erhalten wir in $OA(D)$ und $OC(D)$ die Mafsstabdreiecke, welche wir — wie in Fig. 2 — in das axonometrische Bild (Fig. 14) einzeichnen können. In den meisten Fällen wird es aber einfacher sein, die axonometrischen Bilder mit rechtwinkligen Koordinaten zu konstruieren. Diese Methode ist in Fig. 13 und Fig. 14 angewendet, wo eine quadratische Pyramide dargestellt ist, deren Basis zur Grundrifsebene parallel liegt.

III.

10. Wir haben bis jetzt bei gegebener Bildebene und Projektionsrichtung die Bilder der Achsen gesucht. Wir wollen nun die Achsenbilder willkürlich annehmen und dazu die möglichen Lagen einer Bildebene $\mathfrak{B}$ und der Projektionsrichtung bestimmen. Wir müssen zu diesem Zwecke die oben erklärten Konstruktionen in umgekehrter Reihenfolge ausführen.

Wir ziehen durch einen Punkt D_1 der z-Achse eine Horizontale. Sie schneide die Bilder von x und y in A_1 und C_1 (Fig. 15). Wir beschreiben über A_1C_1 einen Halbkreis und wählen auf ihm einen beliebigen Punkt (O). Nehmen wir an, dafs $A_1(C)$ und $C_1(O)$ Stücke der Achsen x resp. y seien, deren Bilder A_1O_1 und C_1O_1 sind, so haben wir damit die Mafsstabdreiecke $O_1A_1(O)$ und $O_1C_1(O)$ gefunden. Tragen wir (Fig. 16) die Länge $(O)A_1$ auf x und $(O)C_1$ auf y ab, so erhalten wir 2 Punkte A, C, deren Verbindungslinie die erste Spur einer Ebene $\mathfrak{B}^*$ vorstellt, welche zur Bildebene parallel ist. Tragen wir A_1D_1 von A aus auf AC ab, so finden wir den Grundrifs D' eines Punktes D. Sein Aufrifs D'' wird aus der Bemerkung konstruiert, dafs die Höhe z von D gleich der Länge O_1D_1. Ziehen wir schliefslich OD', OD'', so stellen diese Linien den Grundrifs und Aufrifs eines Projektionsstrahles l durch O dar, welcher parallel zur Projektionsrichtung ist. Damit ist die Stellung einer Bildebene $\mathfrak{B}$ und eine zu-

Digitized by Google

gehörige Projektionsrichtung bestimmt. Projizieren wir in dieser Richtung auf B, so erhalten wir wieder die angenommenen Achsenbilder.

11. Bei der Konstruktion von B* und l wurde der Punkt (O) auf dem Halbkreise über A_1C_1 beliebig gewählt. Durchläuft (O) diesen Halbkreis, so läfst sich zu jeder Lage von (O) eine neue Stellung der Ebene B und eine ganz bestimmte Projektionsrichtung konstruieren. Um die Enveloppe aller dieser Stellungen zu finden, zeichnen wir alle Lagen einer Ebene B*, welche aus x und y 2 Punkte A, C schneidet, deren Entfernung konstant und gleich A_1C_1 ist. Diese Ebenen B* schneiden also die Aufrifsebene und die Seitenrifsebene in 2 parallelen Linien von demselben Abstande AC. Bekanntlich umhüllen alle Linien, welche von 2 rechtwinkligen Geraden in 2 Punkten AC von gleicher Entfernung geschnitten werden, eine Asteroide A'. Daraus schliefsen wir allgemein: *Alle Bildebenen, welche zu den gewählten Achsenbildern gehören und welche aus der Aufrifs- und Seitenrifsebene 2 Parallele von gleichem Abstande e schneiden, umhüllen einen Cylinder, welcher zur Grundrifsebene senkrecht steht. Seine Basis in der Grundrifsebene ist eine Asteroide. Jede ihrer Tangenten schneidet aus den Achsen x und y 2 Punkte A, C, deren Entfernung gleich e ist.*

Wir finden auf jeder Lage von A, C den zugehörigen Punkt D', indem wir die Länge A_1D_1 von A aus abtragen. (Fig. 15). Nun beweist man in der Geometrie, dafs jeder Punkt D' auf einer Tangente der Asteroide eine Ellipse E' durchläuft, während die Tangente die Kurve umhüllt. Ist $AD' = a$ und $CD' = c$, so sind a und c die Halbachsen dieser Ellipse. O ist ihr Mittelpunkt, und die Achse von der Länge $2c$ liegt auf OA; die Achse von der Länge $2a$ liegt auf OC. (Fig. 16). Die Punkte D, deren Grundrisse in D' liegen, haben sämtlich dieselbe Höhe $z = O_1D_1$ über der Grundrifsebene. Daher liegen auch die D auf einer Ellipse E. Ein vertikaler Cylinder über E' schneidet aus der Parallelebene zur Grundrifsebene im Abstande z die erwähnte Ellipse E. Die projizierenden Strahlen l aus O gehen durch die Punkte D der Ellipse E. Daraus folgt: *Ziehen wir durch O Parallelstrahlen l zu den Projektionsrichtungen, welche zu den gewählten Achsenbildern gehören, so erfüllen diese Linien l einen Kegel zweiten Grades. Jede Normalebene zu z schneidet diesen Kegel in einer Ellipse E, deren Mittelpunkt in z und deren Scheitel resp. in der Aufrifs- und Seitenrifsebene liegen. Ist d der Abstand dieser Normalebene von der Grundrifsebene, so mufs eine Senkrechte zum Bilde der z-Achse im Abstande $O_1D_1 = d$ aus den Bildern von y und z zwei Punkte A_1, C_1 schneiden, deren Entfernungen von D_1 die resp. Halbachsen der Ellipse E sind.*

Digitized by Google

12. Unter den Projektionsrichtungen, welche zu gegebenen Achsenbildern gehören, heben wir diejenigen hervor, die für die Konstruktion des axonometrischen Bildes besonders bequem sind.

Verlangen wir, dafs der Mafsstab der x bei der Parallelprojektion unverändert bleibe, so müssen wir (Fig. 15) den Punkt (O_x) auf dem Halbkreise über A_1C_1 so wählen, dafs $A_1O_1 = A_1(O_x)$. Soll der Mafsstab der y ungeändert bleiben, so mufs für den Punkt (O_y) die Beziehung gelten: $C_1O_1 = C_1(O_y)$. Wir haben oben gesehen, dafs die Konstruktion des axonometrischen Grundrisses sehr einfach war, wenn l', l'' symmetrisch zur x-Achse liegen. Um diese Disposition herzustellen, bemerken wir, dafs der Ort der Punkte D' (Fig. 16) eine Ellipse E' war. Die Punkte D'' befanden sich auf einer Parallelen zur x-Achse im Abstande $z = O_1D_1$. Zeichnen wir zu dieser Linie die symmetrische (d'') in Bezug auf x, so schneidet sie die Ellipse E' in Punkten D', deren Aufrisse orthogonal symmetrisch zu den Grundrissen liegen. Folglich gehen durch diese Schnittpunkte und O die Lagen von l, welche die verlangte Bedingung erfüllen. Die Ellipse E' ist durch ihre Halbachsen bestimmt. Wir konstruieren daher (Fig. 17) die Schnittpunkte von E' mit (d''), indem wir die Kreise über den Achsen benutzen.

Bei der Wahl der Achsenbilder empfiehlt es sich ebenfalls, solche Annahmen zu bevorzugen, welche Vereinfachungen für die Konstruktionen bieten.

Setzen wir etwa voraus, dafs die Bilder von y und x zu einander senkrecht stehen (Fig. 18), so giebt es eine Lage der Bildebene, für welche die Mafsstäbe auf x und y ungeändert bleiben. Wir müssen in diesem Falle (O_z) in z annehmen. Dann erhalten wir die Lage einer zu B parallelen Ebene B* am schnellsten, indem wir (Fig. 18) $OA = O_1A_1$ und $OC = O_1C_1$ machen. AC ist die erste Spur von B*. Der Grundrifs l' von l steht senkrecht zu BC. l bildet mit der Grundrifsebene einen Winkel von 45°. Damit ist l bestimmt.

Eine zweite bemerkenswerte Lage der Achsenbilder ist die, bei welcher die Bilder von x und y symmetrisch zu z sind (Fig. 19). Dann ist $D_1A_1 = D_1C_1$. Folglich geht die Ellipse E' der Punkte D' in einen Kreis K' über, der O zum Mittelpunkt und D_1A_1 zum Radius hat. Die möglichen Lagen von l erfüllen daher einen geraden Kreiskegel mit der Achse z.

Nehmen wir in diesem speziellen Falle die Achsenbilder x und y zu einander senkrecht — also unter 45° gegen z —, und wählen wir (O_z) auf z (Fig. 20), so müssen die Mafsstäbe für x und y im Original und Bilde dieselben sein. Dieser Annahme entspricht eine Bildebene,

Digitized by Google

welche mit der Aufriſs- und Seitenriſsebene Winkel von 45° einschlieſst. l' halbiert den Winkel xy, und l halbiert den Winkel $l'z$.

Sollen bei der symmetrischen Lage der Bilder von x und y auch noch l', l'' symmetrisch zur x-Achse liegen, so müssen wir (Fig. 21) die Schnittpunkte von (d'') mit dem Kreise K' zeichnen. Zu einem solchen Schnittpunkte D' gehört eine Ebene B*, deren erste Spur AC in D' halbiert wird. Der Ebene B* entspricht ein l, dessen Projektionen zur x-Achse symmetrisch liegen.

IV.

13. Es bleibt uns noch übrig, die schiefen Parallelprojektionen zu besprechen, bei denen eine der 3 Projektionsebenen an Stelle der Bildebene B tritt. Wir beschränken uns dabei auf den Fall, für welchen B mit der Aufriſsebene zusammenfällt. Bei diesem sind die Darstellungsmethoden besonders bequem. Um die räumliche Vorstellung zu fixieren, wollen wir annehmen, daſs der Gegenstand, welcher abgebildet werden soll, im ersten Quadranten liege. Die Aufriſsebene sei durchsichtig gedacht. Der Beschauer soll vom zweiten Quadranten aus auf den Gegenstand herabsehen. Bei dieser Voraussetzung erhalten wir anschauliche Bilder.

Wir geben die Projektionsrichtung durch einen Projektionsstrahl l. Ist $OAEC$ das Rechteck, innerhalb dessen der Grundriſs liegt, so wird es nützlich sein, den Strahl l so zu wählen, daſs er durch den Punkt C geht. (Fig. 22). Dann geht l' durch C, l'' durch O. Die Bilder von x und z liegen in den Originalen, und die Maſsstäbe für diese Achsen bleiben bei der Projektion ungeändert. Das Bild der y-Achse fällt mit l'' zusammen. Konstruieren wir die zweite Spur C_2 von l, so ist OC_2 die Bildlänge von OC. Daher ist OCC_2 das Maſsstabdreieck für die y. Verschieben wir nun die Achsenbilder parallel (Fig. 23), und verwandeln wir mit Hülfe von OC_1C_2 die Koordinaten y eines Punktes M, so können wir axonometrischen Grundriſs (M') und axonometrisches Bild M zeichnen. x und z von M werden dabei nicht geändert.

Soll aus dem Grundriſs des Gegenstandes direkt der axonometrische Grundriſs gefunden werden, so benutzen wir dazu Parallele zur x-Achse, welche auch im axonometrischen Grundriſs zu x parallel sind. Wir zeichnen die Schnittpunkte dieser Horizontalen mit der y-Achse und übertragen sie mittelst des Maſsstabdreiecks OC_1C_2 auf das Bild der y Achse. Für den Grundriſs g' einer beliebigen Geraden können wir ebenfalls den Schnittpunkt von g' mit y auf das Achsenbild übertragen. Ein zweiter Punkt, der sich leicht bestimmen läſst, ist der Schnittpunkt des Grundrisses einer Geraden, — z. B. S' von d' — mit der x-Achse. Da die x im Bilde nicht geändert werden, so ist die Entfernung des

Digitized by Google

Punktes S' von O im Grundrifs und axonometrischen Grundrifs dieselbe. Dieses Verhältnis gilt nicht nur für die x-Achse, sondern für jede Parallele zu x. Liegen die Grundrisse von irgend 2 Punkten — z. B. M', N' — auf einer solchen Parallelen, so müssen auch die axonometrischen Grundrisse sich auf einer Parallelen zu x befinden und dieselbe Entfernung haben wie die Grundrisse. Auch diese Beziehung kann benutzt werden, um von Punkten einer Geraden, welche auf solchen Parallelen liegen, die axonometrischen Grundrisse zu zeichnen.

Stellen wir den axonometrischen Grundrifs so über den Grundrifs, dafs beide Figuren den Nullpunkt und die x-Achse gemeinsam haben, so liegt je der Grundrifs eines Punktes und sein axonometrischer Grundrifs auf einer Parallelen zu C_1C_2. (Fig. 23.) Der Grundrifs einer Geraden und ihr axonometrischer Grundrifs schneiden sich in x. Daraus folgt, dafs der Grundrifs einer Figur zu ihrem axonometrischen Grundrifs affin ist. C_1C_2 giebt die Richtung der Affinität. x ist die Achse derselben.

Stellen wir das axonometrische Bild so über den Aufrifs, dafs beide die Achsen x und z gemeinsam haben, so liegt je der Aufrifs eines Punktes und sein axonometrisches Bild auf einer Parallelen zu l''. Der Aufrifs einer Geraden und das axonometrische Bild treffen sich in der zweiten Spur der Geraden.

Nach diesen Grundsätzen ist in Fig. 22 und 23 der Schnittpunkt einer Linie mit einem Kreiskegel dargestellt, welcher zur Grundrifsebene senkrecht steht.

14. Wir kehren nun die Aufgabe um. Wir wählen für eine schiefe Parallelprojektion auf die Aufrifsebene das Bild der y-Achse beliebig und suchen dazu die entsprechende Richtung.

Ziehen wir durch irgend einen Punkt C_1 auf y (Fig. 24) eine beliebige Linie C_1C_2, welche das Bild der y-Achse in C_2 trifft, so ist durch diese Gerade ein Mafsstabdreieck und eine bestimmte Lage von l festgesetzt. O_1C_2 ist der Aufrifs von l. Wir finden l', indem wir C_2 auf x loten und den Fufspunkt G mit C_1 verbinden. Zu jeder Geraden durch C_1 gehört also ein bestimmtes Mafsstabdreieck und eine Lage von l. Alle diese Lagen erfüllen eine Ebene, welche durch C und das Bild der y-Achse geht. Jedem dieser l entspricht bei denselben Achsenbildern ein anderes axonometrisches Bild des Gegenstandes. Die Einfachheit der Konstruktion dieser Bilder wird von der bequemen Lage der Linie C_1C_2 abhängen; denn wir müssen zu dieser Linie stets parallele Gerade ziehen. Es wird daher nützlich sein, C_1C_2 entweder unter 45° (Fig. 24) oder unter 60° (Fig. 25) gegen die x-Achse zu wählen. Nehmen wir dann das Bild der y-Achse so an, dafs es mit

Digitized by Google

der x-Achse einen Winkel von 30° einschliefst, so ergeben sich leicht zu zeichnende Methoden für die Konstruktion der axonometrischen Bilder.

In dem zuletzt erwähnten Falle (Fig. 25) ist überdies $\sphericalangle O_1C_1C_2 = 30^0 = \sphericalangle OC_2C_1$. Also ist $OC_1 = OC_2$, d. h. der Mafsstab für y ist im Original und Bild derselbe.

Verlangen wir im allgemeinen bei beliebig gewähltem Bilde von y, dafs der Mafsstab von y ungeändert bleibe, so müssen wir auf y und l'' (Fig. 26) 2 Punkte C_1C_2 bestimmen, für welche $O_1C_1 = O_1C_2$ ist. Dann ist das Dreieck C_1OC_2 in Wirklichkeit rechtwinklig bei O. Folglich mufs der Winkel $OC_2C_1 = 45^0$ sein. Die Projektionsrichtung l schliefst daher mit der Aufrifsebene einen Winkel von 45° ein. Kombinieren wir mit dieser Annahme die weitere Spezialisierung, dafs das Bild von y den Winkel xz halbiere, so läfst sich beweisen, dafs l mit der Grundrifsebene einen Winkel λ von 30° bildet. Legen wir nämlich die erste projizierende Ebene von l um, so ist: $\operatorname{tg}\lambda = \frac{G(C_2)}{GC_1}$ $= \frac{C_2G}{GC_1} = \frac{O_1G}{GC_1}$. Aber $GC_1 = \sqrt{O_1G^2 + O_1C_1^2} = \sqrt{O_1G^2 + O_1C_2^2}$ $= \sqrt{O_1G^2 + 2\,O_1G^2} = OG\sqrt{3}$. Folglich ist $\operatorname{tg}\lambda = \frac{OG}{OG\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Also ist λ gleich 30°. Wir schliefsen daher:

Halbiert bei der Projektion auf die Aufrifsebene das Bild von y den Winkel zwischen x und z, und ist der Mafsstab für y im Original und Bild derselbe, so schliefst die Projektionsrichtung mit der Grundrifsebene einen Winkel von 30° und mit der Aufrifsebene einen Winkel von 45° ein.

Durch O gehen vier Gerade, welche die Grundrifsebene unter 30° und die Aufrifsebene unter 45° schneiden. Sie sind gemeinsame Mantellinien von 2 geraden Kreiskegeln, deren Neigungen gegen Grund- und Aufrifsebene resp. 30° und 45° sind. Für den praktischen Fall kommt unter diesen 4 Geraden gewöhnlich nur diejenige in Betracht, welche durch O in den zweiten Quadranten nach rechts geht.

15. Zum Schlufs stellen wir eine Reihe von Regeln zusammen, welche der praktische Konstrukteur bei der Anwendung der schiefen Parallelprojektion in erster Linie zu berücksichtigen hat.

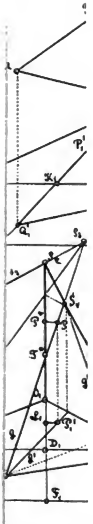
a) Die schiefe Parallelprojektion auf eine Ebene, welche parallel zu z ist, genügt den Anforderungen, welche wir an ein anschauliches Bild stellen, gewöhnlich besser als die Parallelprojektion auf eine Ebene, welche die 3 Achsen im Endlichen schneidet.

b) Die Konstruktion hat damit zu beginnen, dafs wir uns über die Stellung der Bildebene und die Richtung der Projektionsstrahlen entscheiden. Entweder wählen wir beide direkt und entsprechend der Anforderung des Bildes, oder wir nehmen die Achsenbilder an und

Digitized by Google

Fig. 2

Fig. 4.



Digitized by Google

Digitized by Google

suchen dazu Bildebene und Projektionsrichtung und sehen, ob diese für die Darstellung günstig sind. Denken wir uns die Bildebene als Glastafel, welche vor dem Gegenstande aufgestellt wird, so ist es natürlich, dafs der Beschauer vor der Bildebene steht und auf den Gegenstand blickt.

c) Die Benutzung von Mafsstäben ist da zu empfehlen, wo es sich darum handelt, aus gegebenen Koordinaten direkt das axonometrische Bild aufzutragen. Für das Verständnis des Raumbildes ist es vorzuziehen, die Mafsstäbe direkt aus der Projektionsrichtung zu konstruieren. Der Gebrauch von fertigen Mafsstabzahlen oder von Achsenwinkeln, welche man einer Tabelle entnimmt, hat den Nachteil, dafs mit diesen gegebenen Gröfsen keine Vorstellung über die Lage der Bildebene und der Projektionsrichtung verbunden ist.

d) Soll ein parallelperspektivisches Bild aus Grund- und Aufrifs gezeichnet werden, so kann man die Mafsstäbe benutzen. In allen Fällen wird es aber einfacher sein, die Konstruktion ohne Benutzung der Mafsstäbe mit rechtwinkligen Koordinaten und kongruenten Reihen so durchzuführen, wie wir dies oben mehrfach erklärt haben.

e) Legt man ein durchsichtiges Papier über den Grundrifs und Aufrifs, so läfst sich schnell aus den Projektionen auf dieses Papier eine schiefe Parallelprojektion auf die Aufrifsebene zeichnen. Man benutzt dabei die Affinität zwischen Grundrifs und axonometrischem Grundrifs und den Umstand, dafs Aufrisse und axonometrische Bilder von Punkten in Parallelen zum Bilde von y liegen. Der Aufrifs einer Geraden und ihr axonometrisches Bild treffen sich in der zweiten Spur der Geraden.

f) Zur räumlichen Orientierung ist es nützlich, dem perspektivischen Bilde stets die Achsenbilder beizufügen, auch wenn dieselben zur Konstruktion nicht weiter benutzt werden. Ferner sollte immer ein Originalmafsstab und seine Bildlänge auf x, y, z dem Blatte beigefügt werden, selbst wenn man die Mafsstäbe nicht gebraucht. Nur durch diese Mafsstäbe erhalten wir ein richtiges Urteil über die Verhältnisse, in denen die einzelnen Dimensionen des Gegenstandes zu einander stehen. Zur genauen Bestimmung dieser Dimensionen, also zur Konstruktion von wahren Längen, sind axonometrische Bilder nicht geeignet. Aus pädagogischen Gründen können solche Bestimmungen als gutes Übungsmaterial für die Raumvorstellung gelten. Praktischen Wert haben sie nicht.[1])

Zürich, April 1901.

1) Man vergleiche in Beyel: Axonometrie und Perspektive (Stuttgart) den Abschnitt C über schiefe Axonometrie und Beyel: Darstellende Geometrie (Teubner 1901) im Anhange S. 60: Über schiefe Parallelprojektion.

Digitized by Google

Über die Vertauschbarkeit homogener linearer Differentialausdrücke.

Von GEORG WALLENBERG in Charlottenburg.

Sind P und Q lineare homogene Differentialausdrücke (um solche handelt es sich in dieser Arbeit ausschliefslich):

$$P = p_0 y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \cdots + p_{m-1} y' + p_m y, \tag{1}$$

$$Q = q_0 y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \cdots + q_{n-1} y' + q_n y, \tag{2}$$

deren Koeffizienten p_i und q_i Funktionen von z sind, so bedeutet das symbolische Produkt PQ bekanntlich, dafs in P an Stelle von y der Ausdruck Q gesetzt werden soll. Für die Zusammensetzung linearer Differentialausdrücke gilt zwar das associative, aber i. a. nicht das kommutative Gesetz; vielmehr müssen die Koeffizienten von P und Q gewisse Bedingungen erfüllen, damit dies der Fall sei. Diese Bedingungen sollen im folgenden für eine ausgedehnte Klasse von Differentialausdrücken aufgestellt werden; dabei spielt der Begriff der Irreduktibilität eines Differentialausdruckes im Frobeniusschen Sinne eine bemerkenswerte Rolle: während das Problem ganz allgemein gelöst werden kann, wenn einer der beiden Differentialausdrücke als irreduktibel vorausgesetzt wird, kann man dasselbe ohne diese Voraussetzung nur von Fall zu Fall erledigen. Soviel mir bekannt ist, existieren bisher in der mathematischen Litteratur nur Bemerkungen von Floquet (Ann. éc. norm. (2) VIII (1879), Suppl., p. 49) über vertauschbare lineare Differentialausdrücke erster Ordnung, die im folgenden als ein ganz spezieller Fall auftreten.

1. Durch einfache Rechnung ergiebt sich aus (1) und (2):

$$PQ = p_0 q_0 y^{(m+n)} + (m p_0 q_0' + p_0 q_1 + p_1 q_0) y^{(m+n-1)} + \cdots,$$

$$QP = q_0 p_0 y^{(m+n)} + (n q_0 p_0' + q_0 p_1 + q_1 p_0) y^{(m+n-1)} + \cdots.$$

Soll daher

$$PQ = QP$$

sein, so mufs zunächst

$$m p_0 q_0' = n q_0 p_0', \text{ d. h.}$$

$$q_0^m = c p_0^n \quad (c \text{ Konstante}) \tag{3}$$

sein. Da hier hauptsächlich die entsprechenden Differentialgleichungen interessieren, so kann man z. B. $p_0 = 1$ voraussetzen; dann mufs nach

Digitized by Google

(3) q_0 eine Konstante sein, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit ebenfalls gleich 1 angenommen werden kann, da konstante Faktoren die Vertauschbarkeit nicht beeinflussen; durch diese Festsetzung wird eine bedeutende Vereinfachung der Rechnung erzielt. Durch Vergleichung der Koeffizienten von $y^{(m+n-2)}$ ergiebt sich dann:

$$mq_1' = np_1', \quad \text{also}$$

$$mq_1 = np_1 + c. \tag{4}$$

Durch Vergleichung weiterer Koeffizienten erhält man für die Gröfsen p_i und q_i Systeme von Differentialgleichungen, deren Lösung bald beträchtliche Schwierigkeiten bereitet, sodafs man zu anderen Hilfsmitteln greifen mufs. Für $m = n = 1$ folgt aus (4), dafs zwei lineare Differentialausdrücke erster Ordnung $P_1 = y' + p_1 y$ und $P_2 = y' + p_2 y$ dann und nur dann vertauschbar sind, wenn p_1 und p_2 sich um eine Konstante unterscheiden. Allgemein sind die Ausdrücke $P_k = y' + (p - \alpha_k)\, y$ (α_k Konstanten, $k = 1, 2, 3, \ldots$) und wegen der Geltung des associativen Gesetzes auch Produkte beliebig vieler solcher Ausdrücke mit einander vertauschbar; die lineare Differentialgleichung

$$P_n \ldots P_3 P_2 P_1 = 0$$

besitzt daher die Integrale sämtlicher Gleichungen $P_k = 0$, d. h. die Integrale $y = ce^{-\int p\,dz} e^{\alpha_k z}$; sie läfst sich also durch eine Transformation $v = e^{\int p\,dz} y$ auf eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten reduzieren, in welcher die α_k Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind[1]); umgekehrt lassen Differentialausdrücke mit konstanten Koeffizienten, bez. die aus solchen durch $v = e^{\int p\,dz} y$ transformierten stets die obige Zerlegung in lineare vertauschbare Differentialausdrücke erster Ordnung zu (vergl. Floquet l. c.).

1) Allgemeiner sind die Ausdrücke

$$P_k = q\,y' + (p - \alpha_k)\, y$$

mit einander vertauschbar; in diesem Falle läfst sich die Gleichung $P_n \ldots P_3 P_2 P_1 = 0$ durch die simultane Transformation

$$v = e^{\int \frac{p}{q}\,dz} y, \quad \frac{dz}{dx} = q$$

in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführen. Der Fall, dafs mehrere der P_k einander gleich sind, entspricht dem Falle gleicher Wurzeln der charakteristischen Gleichung (vergl. Floquet l. c.).

Digitized by Google

Es sollen nun in diesem Abschnitt durch direkte Rechnung die Bedingungen für die Vertauschbarkeit einiger Differentialausdrücke abgeleitet werden, bei welchen dieselbe keine besonderen Schwierigkeiten darbietet; zunächst für einen Differentialausdruck erster und einen solchen n^{ter} Ordnung:

$$P = y' + py$$

und

$$Q = y^{(n)} + q_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + q_1 y' + q_0 y.$$

Es ist

$$PQ = y^{(n+1)} + (q_{n-1} + p)\, y^{(n)} + (q'_{n-1} + q_{n-2} + pq_{n-1})\, y^{(n-1)} + \cdots + (q'_1 + q_{k-1} + pq_k)\, y^{(k)} + \cdots + (q'_0 + pq_0)\, y,$$

$$QP = \sum_{k=0}^{n} q_k P^{(k)} \,(q_n = 1),\ P^{(k)} = y^{(k+1)} + (py)^{(k)};$$

also der Koeffizient von $y^{(k)}$ in QP:

$$q_{k-1} + q_k p + \sum_{\varrho=k+1}^{n} \binom{\varrho}{k} q_\varrho p^{(\varrho-k)}.$$

Soll nun

$$PQ = QP$$

sein, so ergiebt die Vergleichung entsprechender Koeffizienten

$$q'_k = \sum_{\varrho=k+1}^{n} \binom{\varrho}{k} q_\varrho p^{(\varrho-k)}, \tag{5}$$

also zunächst

$$q'_{n-1} = np', \text{ d. h. } q_{n-1} = np + c_1;$$

$$q'_{n-2} = (n-1)\, q_{n-1} p' + \frac{n(n-1)}{2!} p'' = n(n-1) pp' + (n-1)\, c_1 p' + \binom{n}{2} p''$$

und daher $q_{n-2} = \binom{n}{2} [p' + p^2] + \binom{n-1}{1} pc_1 + c_2$.

In derselben Weise findet man

$$q_{n-3} = \binom{n}{3} [p'' + 3pp' + p^3] + \binom{n-1}{2} [p' + p^2] c_1 + \binom{n-2}{1} pc_2 + c_3.$$

Setzt man nun

$$\frac{u'}{u} = p = R_1(p),\ \ \frac{u^{(k)}}{u} = R_k(p) = R_k\ (R_0 = 1),$$

$$\text{z. B. } R_2 = \frac{u''}{u} = p' + p^2,$$

$$R_3 = \frac{u'''}{u} = p'' + 3pp' + p^3 \text{ u. s. f.},$$

Digitized by Google

so wird

$$q_{n-2} = \binom{n}{2} R_2 + \binom{n-1}{1} R_1 c_1 + c_2,$$

$$q_{n-3} = \binom{n}{3} R_3 + \binom{n-1}{2} R_2 c_1 + \binom{n-2}{1} R_1 c_2 + c_3.$$

Durch Induktion findet man entsprechend die allgemeine Formel

$$(6) \quad q_{n-k} = \binom{n}{k} R_k + \binom{n-1}{k-1} R_{k-1} c_1 + \binom{n-2}{k-2} R_{k-2} c_2 + \cdots + \binom{n-k+1}{1} R_1 c_{k-1} + c_k.$$

Ihre Giltigkeit wird durch den Schlufs der vollständigen Induktion erwiesen, indem man sie bis q_{n-k+1} als richtig annimmt: Differenziert man (6) und berücksichtigt (5), so erhält man zunächst durch Vergleichung der von den c_i freien Glieder:

$$R_k' = k R_{k-1} p' + \binom{k}{2} R_{k-2} p'' + \binom{k}{3} R_{k-3} p''' + \cdots + k R_1 p^{(k-1)} + p^{(k)}.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung ergiebt sich aber aus den folgenden beiden Rekursionsformeln für die R_k:

Aus $$\frac{d}{dz}\frac{u^{(k)}}{u} = \frac{u^{(k+1)}}{u} - \frac{u'}{u}\cdot\frac{u^{(k)}}{u}$$

folgt $$R_{k+1} = R_k' + p R_k;$$

und aus $$u' = u \cdot p, \quad u^{(k+1)} = (up)^{(k)};$$

$$R_{k+1} = R_k p + \binom{k}{1} R_{k-1} p' + \binom{k}{2} R_{k-2} p'' + \cdots + k R_1 p^{(k-1)} + p^{(k)}.$$

Daher ist in der That

$$R_k' = R_{k+1} - R_k p = k R_{k-1} p' + \binom{k}{2} R_{k-2} p'' + \cdots + k R_1 p^{(k-1)} + p^{(k)}.$$

In analoger Weise verifiziert man die durch Vergleichung der Koeffizienten der einzelnen c_i sich ergebenden Relationen. Wenn man nun die Differentialgleichung

$$v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + a_2 v^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} v' + a_n v = 0$$

durch $v = qy$, also $v^{(k)} = (qy)^{(k)}$ transformiert und $\frac{q'}{q} = p$ wählt, so wird in der transformierten Differentialgleichung nach Division durch q der Koeffizient von $y^{(n-k)}$:

$$\binom{n}{k} R_k + \binom{n-1}{k-1} R_{k-1} a_1 + \binom{n-2}{k-2} R_{k-2} a_2 + \cdots + \binom{n-k+1}{1} R_1 a_{k-1} + a_k.$$

Digitized by Google

Die Vergleichung mit (6) zeigt, dafs $Q = 0$ diejenige Differentialgleichung ist, welche durch die Transformation

$$v = e^{\int p\,dx}\, y$$

aus der Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$v^{(n)} + c_1 v^{(n-1)} + \cdots + c_{n-1} v' + c_n v = 0$$

hervorgeht. *Ihre linke Seite ist daher nach Obigem das (symbolische) Produkt von n unter einander und mit P vertauschbaren linearen Differentialausdrücken erster Ordnung.* Dafs andererseits diese als notwendig erkannte Bedingung für die Vertauschbarkeit von P und Q auch hinreicht, ist evident. — Dieser Satz wird im zweiten Abschnitt ohne jede Rechnung durch blofse Schlüsse erwiesen werden.

Ferner sollen die Bedingungen für die Vertauschbarkeit zweier Differentialausdrücke zweiter Ordnung

$$P = y'' + p_1 y' + p_2 y$$

und

$$Q = y'' + q_1 y' + q_2 y$$

durch direkte Rechnung bestimmt werden. Es ist

$$PQ = y^{(IV)} + (q_1 + p_1) y''' + (2q_1' + q_2 + p_1 q_1 + p_2) y''$$
$$+ (q_1'' + 2q_2' + p_1 q_1' + p_1 q_2 + p_2 q_1) y' + (q_2'' + p_1 q_2' + p_2 q_2)\, y$$
$$QP = y^{(IV)} + (p_1 + q_1) y''' + (2p_1' + p_2 + q_1 p_1 + q_2) y''$$
$$+ (p_1'' + 2p_2' + q_1 p_1' + q_1 p_2 + q_2 p_1) y' + (p_2'' + q_1 p_2' + q_2 p_2)\, y.$$

Die Voraussetzung $PQ = QP$ ergiebt

(a) $$q_1' = p_1',$$ d. h. $q_1 = p_1 + 2c_1$;

ferner $$q_1'' + 2q_2' + p_1 q_1' = p_1'' + 2p_2' + q_1 p_1',$$

also mit Berücksichtigung von (a):

(b) $$2q_2' = 2p_2' + 2c_1 p_1',$$ d. h. $q_2 = p_2 + c_1 p_1 + c_2$;

endlich (c) $$q_2'' + p_1 q_2' = p_2'' + q_1 p_2',$$

also mit Rücksicht auf (a) und (b):

$$c_1 p_1'' + c_1 p_1 p_1' = 2c_1 p_2'.$$

Ist $c_1 = 0$, so fällt diese letzte Bedingungsgleichung fort; ist dagegen c_1 von Null verschieden, so folgt aus ihr:

$$p_2 = \frac{p_1'}{2} + \frac{p_1^2}{4} + C_1,$$

$$q_2 = \frac{q_1'}{2} + \frac{q_1^2}{4} + C_2.$$

Digitized by Google

Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden:

(I) $$c_1 = 0: \quad q_1 = p_1, \; q_2 = p_2 + c_2,$$

d. h. die Koeffizienten von y unterscheiden sich um eine Konstante, ähnlich wie bei den linearen Differentialausdrücken erster Ordnung.

(II) $$c_1 + 0: \quad q_1 = p_1 + c_1,$$
$$p_2 - \frac{p_1'}{2} - \frac{p_1^2}{4} = C_1, \quad q_2 - \frac{q_1'}{2} - \frac{q_1^2}{4} = C_2;$$

daher läfst sich in diesem Falle die Differentialgleichung $P = 0$ durch die bekannte kanonische Transformation

$$v = e^{\frac{1}{2}\int p_1 dx} y,$$

die Differentialgleichung $Q = 0$ durch die Transformation

$$u = e^{\frac{1}{2}\int q_1 dx} y, \text{ also auch durch } v = e^{\frac{1}{2}\int p_1 dx} y$$

in eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten überführen. Folglich sind in diesem Falle P und Q nach Obigem Produkte von zwei linearen Differentialausdrücken erster Ordnung, die (wegen desselben Transformationsfaktors) *sämtlich* mit einander vertauschbar sind:

$$P = \left(y' + \left(\frac{p_1}{2} + \alpha\right) y\right)\left(y' + \left(\frac{p_1}{2} - \alpha\right) y\right),$$

$$Q = \left(y' + \left(\frac{p_1}{2} + \beta_1\right) y\right)\left(y' + \left(\frac{p_1}{2} + \beta_2\right) y\right),$$

wo α, β_1, β_2 Konstanten bedeuten ($\alpha^2 = -C_1$, $\beta_1 + \beta_2 = 2c_1$, $\beta_1\beta_2 = c_2$); da p_1 willkürlich bleibt, also um eine beliebige Konstante vermehrt werden kann, so ist die Form von P nur scheinbar spezieller als die von Q.

Schon die Untersuchung der Vertauschbarkeit zweier linearer Differentialausdrücke zweiter bez. dritter Ordnung durch direkte Rechnung begegnet bedeutenden Schwierigkeiten, die durch die spätere Behandlung verständlich werden. Wir müssen daher die Vertauschbarkeit linearer Differentialausdrücke einem tieferen Studium unterwerfen.

2. In diesem Abschnitt soll die Vertauschbarkeit zweier linearer Differentialausdrücke mit eindeutigen Koeffizienten unter der Voraussetzung untersucht werden, dafs einer derselben irreduktibel ist. Dabei wird ein solcher Differentialausdruck nach Herrn Frobenius als irreduktibel bezeichnet, wenn er sich nicht in (symbolische) Faktoren niedrigerer Ordnung mit ebenfalls eindeutigen Koeffizienten zerlegen läfst. Von den entsprechenden irreduktiblen Differentialgleichungen

Digitized by Google

gelten zwei Sätze, die ebenfalls von Herrn Frobenius herrühren und im folgenden mehrfach gebraucht werden. Sie lauten:

1) Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit einer ebensolchen irreduktiblen Differentialgleichung *ein* Integral gemeinsam hat, so wird sie durch sämtliche Integrale derselben befriedigt.

2) Wenn von zwei linear unabhängigen Integralen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit eindeutigen Koeffizienten das eine ein homogener linearer Differentialausdruck mit eindeutigen Koeffizienten des anderen ist, so ist die Differentialgleichung reduktibel.[1])

Es seien nun zwei homogene lineare Differentialausdrücke mit eindeutigen Koeffizienten P von der Ordnung p und Q von der Ordnung q ($p \geqq q$) mit einander vertauschbar[2]):

$$PQ = QP,$$

und es werde Q als irreduktibel vorausgesetzt. Die Differentialgleichung $Q = 0$ möge die Integrale ζ_k ($k = 1, 2, \ldots, q$) besitzen. Da

$$QP(\zeta_k) = PQ(\zeta_k) = 0$$

ist, so besitzt $Q = 0$ die Integrale $P(\zeta_k)$; es mufs daher

$$P(\zeta_k) = \zeta$$

sein, wenn ζ ein gewisses Integral von $Q = 0$ bedeutet. Wäre nun ζ linear unabhängig von ζ_k, so müfste nach Satz 2) die Differentialgleichung $Q = 0$ reduktibel sein, entgegen der Voraussetzung; folglich mufs

$$\zeta = c_0 \zeta_k \quad (c_0 \text{ Konstante})$$

sein. Daher hat die Differentialgleichung

$$P(y) - c_0 y = 0$$

mit $Q = 0$ das Integral $y = \zeta_k$, also wegen der Irreduktibilität von $Q = 0$ nach Satz 1) *alle* Integrale gemeinsam; d. h. es ist

$$P(y) - c_0 y \equiv RQ(y)$$

oder

$$P(y) \equiv RQ(y) + c_0 y.$$

Ferner ist

$$PQ \equiv RQQ + c_0 Q,$$

$$QP \equiv QRQ + c_0 Q,$$

---

1) Journ. für Math. **76**; vergl. die schöne Arbeit von Herrn Hamburger, Journ. für Math. **111**, 121—138.

2) In diesem Abschnitt wird *nicht* $p_0 = q_0 = 1$ angenommen.

Digitized by Google

also, da $PQ = QP$ ist:

$$RQQ = QRQ, \text{ d. h. } RQ = QR.$$

Wird mit R ebenso operiert wie mit P, so ergiebt sich

$$R = SQ + c_1 y;$$

ferner

$$S = TQ + c_2 y, \text{ u. s. f.}^1)$$

Schliefslich kommt man zu einem Differentialausdruck Z von kleinerer Ordnung als Q, und es mufs dann $Z - c_n y = 0$ mit $Q = 0$ alle Integrale gemeinsam haben; d. h. es mufs identisch

$$Z - c_n y \equiv 0 \text{ oder } Z \equiv c_n y \ (c_n + 0)$$

sein. Daraus folgt, *dafs $p = nq$ und P das Produkt von n Differentialausdrücken ist, die sämtlich mit P und unter einander vertauschbar sind, von der Form $Q - \alpha_i y$*, wo die α_k die Wurzeln der Gleichung

$$c_n \alpha^n + c_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + c_1 \alpha + c_0 = 0$$

sind. Es wird nämlich

$$P(y) \equiv c_n Q^n(y) + c_{n-1} Q^{n-1}(y) + \cdots + c_1 Q(y) + c_0 y,$$

wo $Q^k(y)$ das symbolische Produkt von k Differentialausdrücken Q bedeutet, sodafs in der That

$$P(y) \equiv c_n (Q - \alpha_1 y)(Q - \alpha_2 y) \cdots (Q - \alpha_n y)$$

ist. Offenbar ist diese Bedingung für die Vertauschbarkeit von P und Q auch hinreichend, selbst dann, wenn Q reduktibel ist. Da Differentialausdrücke erster Ordnung als irreduktibel anzusehen sind, so folgt für $q = 1$ der im ersten Abschnitt bewiesene Satz über die Vertauschbarkeit eines Differentialausdrucks erster Ordnung und eines solchen n^{ter} Ordnung. Ferner folgt, falls auch P irreduktibel, also $n = 1$ ist, dafs in zwei vertauschbaren irreduktiblen Differentialausdrücken, abgesehen von einer multiplikativen Konstanten, sich nur die Koeffizienten von y um eine additive Konstante unterscheiden, analog den Differentialausdrücken erster Ordnung.

3. Läfst man die Voraussetzung der Irreduktibilität eines der beiden Differentialausdrücke fallen, so kann man das Problem der Vertauschbarkeit nur von Fall zu Fall behandeln[2]); es soll in diesem Abschnitt

1) Einige der c_k können auch einander gleich und auch gleich Null sein.

2) Höchstens lassen sich im allgemeinen Falle *hinreichende* Bedingungen angeben: So werden die Differentialausdrücke P_{mk} und P_{nk} (der Index soll in diesem Abschnitt stets die Ordnung des Differentialausdrucks angeben) vertausch-

Digitized by Google

hauptsächlich für einen Differentialausdruck zweiter und einen solchen dritter Ordnung, P_2 und P_3, erledigt werden. Zunächst kann man setzen

$$P_3 = Q_1 P_2 + P_1,$$

und es sei

$$P_1 = p_0 y' + p_1 y.$$

Wir haben drei Fälle zu unterscheiden:

1) $p_0 = 0$.

Da $P_2 P_3 = P_3 P_2$ sein soll, so wird $P_2 P_3 = 0$ durch sämtliche Integrale von $P_2 = 0$ befriedigt. Ist η ein (von Null verschiedenes) Integral von $P_2 = 0$, so mufs also $P_2 P_3(\eta) \equiv 0$ sein; d. h. auch $P_3(\eta) \equiv P_1(\eta) \equiv p_1 \eta$ ist ein Integral von $P_2 = 0$, daraus folgt weiter, dafs auch $P_3(p_1\eta)$ $\equiv P_1(p_1\eta) \equiv p_1^2 \eta$ ein Integral von $P_2 = 0$ ist. Zwischen diesen drei Integralen mufs eine lineare homogene Relation mit konstanten Koeffizienten bestehen:

$$c_0\eta + c_1 p_1 \eta + c_2 p_1^2 \eta \equiv \eta(c_0 + c_1 p_1 + c_2 p_1^2) = 0,$$

aus welcher sich, da $\eta \neq 0$, p_1 als Konstante ergiebt. Daher folgt aus $P_2 P_3 = P_3 P_2$, dafs P_2 und dann auch P_3 mit Q_1 vertauschbar ist. *P_2 und P_3 müssen also nach Obigem Produkte aus zwei bez. drei mit Q_1 und mit einander vertauschbaren Differentialausdrücken erster Ordnung sein, und die entsprechenden Differentialgleichungen $P_2 = 0$ und $P_3 = 0$ lassen sich durch dieselbe Transformation in Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten transformieren.*

2) p_0 eine von Null verschiedene Konstante.[1])

Aus $P_2 P_3 = P_3 P_2$ folgt, dafs, wenn η_{i1}, η_{i2} zwei Fundamentalintegrale von $P_2 = 0$ sind, auch $P_1(\eta_1)$ und $P_1(\eta_2)$ Integrale von $P_2 = 0$ sein müssen. Es sei

$$P_1(\eta_1) = \alpha_1 \eta_1 + \beta_1 \eta_2,$$
$$P_1(\eta_2) = \alpha_2 \eta_1 + \beta_2 \eta_2;$$

so folgt aus den Untersuchungen von Herrn Hamburger (l. c.) mit einer leichten Modifikation für den Fall, dafs β_1 oder α_2 oder beide

---

bar sein, wenn sie Produkte aus m bez. n vertauschbaren Differentialausdrücken k^{ter} Ordnung sind, die ihrerseits wieder in vertauschbare Differentialausdrücke niedrigerer Ordnung zerlegbar sein können. Aber diese Bedingungen sind, wie aus den Untersuchungen dieses Abschnittes hervorgeht, nicht *notwendig*.

1) Der Koeffizient der höchsten Ableitung in P_2 und P_3 soll von jetzt an der Einfachheit wegen gleich 1 angenommen werden (vergl. die Bemerkung auf S. 258); dann ist auch in Q_1 der Koeffizient von y' gleich 1.

Digitized by Google

gleich Null sind[1]), dafs die Differentialgleichung $P_2(y) = 0$ mit $P_1(y) - \omega_1 y = 0$ und $P_1(y) - \omega_2 y = 0$ Integrale gemeinsam hat, worin ω_1 und ω_2 bestimmte Konstanten bedeuten, die auch den Wert Null haben und einander gleich sein können. Da $P_1(y) - \omega_1 y$ und $P_1(y) - \omega_2 y$ nach Obigem vertauschbare Differentialausdrücke erster Ordnung sind, so ist direkt[2])

$$P_2(y) \equiv \frac{1}{p_0^2}(p_0 y' + (p_1 - \omega_1)y)(p_0 y' + (p_1 - \omega_2)y).$$

Da p_0 eine Konstante, ist P_2 mit P_1 vertauschbar; aus $P_2 P_3 = P_3 P_2$ ergiebt sich daher:

$$P_2 Q_1 = Q_1 P_2.$$

Q_1 hat daher nach Obigem die Form:

$$Q_1 = \frac{1}{p_0}(p_0 y' + (p_1 - \alpha)y),$$

wo α eine Konstante bedeutet, und es ist auch

$$P_1 Q_1 = Q_1 P_1,$$

folglich

$$P_1 P_3 = P_3 P_1.$$

Da sowohl P_3 als auch P_2 mit P_1 (und Q_1) vertauschbar ist, *so sind auch in diesem Falle P_2 und P_3 Produkte aus zwei bez. drei vertauschbaren Differentialausdrücken erster Ordnung, und die Differentialgleichungen $P_2 = 0$ und $P_3 = 0$ lassen sich durch die Transformation $v = e^{\frac{1}{p_0}\int p_1 dx} y$ in Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten transformieren.*

3) p_0 eine Funktion von x.

Zunächst findet man durch dieselben Betrachtungen wie in 2):

$$P_2 \equiv \frac{1}{p_0^2}(p_0 y' + (p_1 - \omega_1)y)(p_0 y' + (p_1 - \omega_2)y) \equiv \frac{1}{p_0^2} P,$$

und es ist

$$P P_1 = P_1 P.$$

Aus $P_2 P_3 = P_3 P_2$ ergiebt sich

$$P_2 Q_1 P_2 + P_2 P_1 = Q_1 P_2 P_2 + P_1 P_2,$$

---

1) Der Fall $\beta_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \beta_2 = \omega$ führt auf den Fall 1) zurück, da hier $P_1(y) - \omega y = 0$ mit $P_2 = 0$ zwei linear unabhängige Integrale gemeinsam hat, also identisch $P_1(y) \equiv \omega y$ sein mufs.

2) Diese Zerlegung von P_2 gilt, wie aus der oben zitierten Arbeit von Herrn Hamburger hervorgeht, auch noch für den Fall $\omega_1 = \omega_2$.

Digitized by Google

und, da

$$P_2 P_1 = \frac{1}{p_0^2} P P_1,\ P_1 P_2 = P_1\left(\frac{1}{p_0^2} P\right) = \frac{1}{p_0^2} P_1 P - \frac{2 p_0'}{p_0^2} P = \frac{1}{p_0^2} P_1 P - 2 p_0' P_2$$

ist:

$$P_2 Q_1 = Q_1 P_2 - 2 p_0' y. \tag{A}$$

Es sei

$$P_2 = y'' + r_1 y' + r_2 y,\ Q_1 = y' + q_1 y,$$

also

$$r_1 = \frac{p_0' + 2 p_1 - (\omega_1 + \omega_2)}{p_0},\quad r_2 = \frac{p_0 p_1' + p_1^2 - (\omega_1 + \omega_2) p_1 + \omega_1 \omega_2}{p_0^2};$$

dann folgt aus (A) durch Vergleichung der Koeffizienten von y' und y:

$$2 q_1 = r_1';$$

$$q_1'' + r_1 q_1' = r_2' - 2 p_0',$$

also

$$r_2 = \frac{r_1'}{2} + \frac{r_1^2}{4} + 2 p_0 + c_1.^{1})$$

Setzt man in diese letzte Gleichung die obigen Werte für r_1 und r_2 ein, so heben sich alle p_1 enthaltenden Glieder fort, und es resultiert für p_0 die Differentialgleichung

$$\tfrac{1}{2} \frac{p_0''}{p_0} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^2 + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{4 p_0^2} + 2 p_0 + c_1 = 0$$

oder

$$\frac{d p_0'^2}{d p_0} - \frac{p_0'^2}{p_0} + \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{p_0} + 8 p_0^2 + 4 c_1 p_0 = 0,$$

deren erstes Integral

$$p_0'^2 = -4 p_0^3 - 4 c_1 p_0^2 + c_2 p_0 + (\omega_1 - \omega_2)^2 \tag{B}$$

ist. *Daraus ergiebt sich p_0 als eindeutige doppeltperiodische Funktion von $z - c_3$, die mit der Weierstrafsschen $\wp$-Funktion in einfachstem Zusammenhange steht und eventuell auch in eine einfachperiodische, bez. rationale Funktion degenerieren kann.*

Fassen wir die notwendigen — und, wie aus dem Gange der Untersuchung erhellt, auch hinreichenden — Bedingungen für die Vertauschbarkeit von P_2 und P_3 zusammen, *so muſs*

$$P_2 \equiv \frac{1}{p_0^2}(p_0 y' + (p_1 - \omega_1) y)\,(p_0 y' + (p_1 - \omega_2) y)$$

1) Mit c sollen im folgenden stets willkürliche Konstanten bezeichnet werden.

Digitized by Google

sein, worin p_0 die durch (B) *definierte doppeltperiodische Funktion bedeutet; ferner*

$$P_3 = Q_1 P_2 + P_1,$$

wo $$P_1 = p_0 y' + p_1 y,\ Q_1 = y' + \left(\frac{p_0' + 2p_1 - (\omega_1 + \omega_2)}{2p_0} + c\right) y$$

ist; die Funktion p_1 bleibt willkürlich; desgleichen die Konstanten ω_1 und ω_2.

Auf das eben behandelte Problem lassen sich zwei andere leicht zurückführen:

I) Vertauschbarkeit von P_3 und Q_3 (Koeffizienten der höchsten Ableitungen von y gleich 1):

Da nämlich

$$Q_3 = P_3 + P_2$$

ist, so folgt aus

$$P_3 Q_3 = Q_3 P_3:$$

$$P_3 P_2 = P_2 P_3.$$

II) Vertauschbarkeit von P_2 und P_4 (Koeffizienten der höchsten Ableitungen gleich 1):

Da

$$P_4 = P_2^2 + P_3$$

ist, so folgt aus

$$P_2 P_4 = P_4 P_2:$$

$$P_2 P_3 = P_3 P_2.$$

Allgemein gehören die Probleme der Vertauschbarkeit von P_m und P_{km} und von P_m und P_{km-1} zusammen, da

$$P_{km} = P_m^k + P_{km-1}$$

ist. Durch diese Bemerkung läfst sich auch das in Nr. 2 rechnerisch behandelte Problem der Vertauschbarkeit zweier Differentialausdrücke zweiter Ordnung in wenigen Zeilen erledigen.

4. In diesem Abschnitt soll die Vertauschbarkeit zweier linearer homogener Differentialausdrücke 2. bez. 5. (6.) Ordnung P_2 und P_5 (P_6) mit eindeutigen Koeffizienten untersucht werden. Die Koeffizienten der höchsten Ableitungen der abhängigen Veränderlichen werden gleich 1 vorausgesetzt.

Es soll also zuerst

(1) $$P_2 P_5 = P_5 P_2$$

Digitized by Google

sein. Man kann

$$P_5 = P_3 P_2 + P_1{}^{1})$$

setzen, und es möge

$$P_1 = p_0 y' + p_1 y$$

sein; dann ergiebt sich zunächst durch dieselben Überlegungen wie im 3. Abschnitt, dafs, wenn $p_0 = 0$ ist, p_1 eine Konstante sein mufs, und daraus folgt dann, dafs P_2 mit P_3 vertauschbar ist. Wir haben also als ersten Typus

(I) $$P_5 = P_3 P_2 + cy,$$

worin $P_2 P_3 = P_3 P_2$ (die verschiedenen dadurch bedingten Formen von P_2 und P_3 ergeben sich aus Nr. 3) und c eine Konstante ist. Hierunter sind auch bereits Fälle enthalten, wo P_2 und P_5 Produkte von 2 bez. 5 vertauschbaren Differentialausdrücken erster Ordnung sind (nämlich dann wenn P_2 und P_3 derartig zerlegbar sind, vgl. Nr. 3) und sich daher bis auf einen Exponentialfaktor in Differentialausdrücke mit konstanten Koeffizienten transformieren lassen (vergl. Nr. 1).

Es sei nunmehr p_0 von Null verschieden. Dann mufs P_2 wieder (vergl. Nr. 3) die Form haben

(2) $$P_2 \equiv \frac{1}{p_0^2}(p_0 y' + (p_1 - \omega_1) y)(p_0 y' + (p_1 - \omega_2) y)$$

$$\equiv y'' + \mathfrak{p}_1 y' + \mathfrak{p}_2 y,$$

und es mufs infolge von (1)

(3) $$P_2 P_3 = P_3 P_2 - 2 p_0' y$$

sein. Ich kann nun setzen

$$P_3 = R_1 P_2 + Q_1,$$

wo $Q_1 = q_0 y' + q_1 y$ und $R_1 = y' + ry$ ist.

Dann wird (3):

$$P_2 R_1 P_2 + P_2 Q_1 = R_1 P_2 P_2 + Q_1 P_2 - 2 p_0' y,$$

folglich

(4) $$P_2 Q_1 + 2 p_0' y = S_1 P_2,$$

wo $$S_1 = s_0 y' + s_1 y,$$ und:

(5) $$P_2 R_1 + S_1 = R_1 P_2 + Q_1 = P_3.$$

1) Der Index bezeichnet wieder die Ordnung des Differentialausdruckes.

Digitized by Google

Nun ist

$$P_2 Q_1 \equiv q_0 y''' + (2q_0' + q_1 + \mathfrak{p}_1 q_0) y'' + (q_0'' + 2q_1' + \mathfrak{p}_1(q_0' + q_1) + \mathfrak{p}_2 q_0) y' + (q_1'' + \mathfrak{p}_1 q_1' + \mathfrak{p}_2 q_1) y,$$

$$S_1 P_2 - 2p_0' y \equiv s_0 y''' + (s_0 \mathfrak{p}_1 + s_1) y'' + (s_0(\mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_2) + s_1 \mathfrak{p}_1) y' + (s_0 \mathfrak{p}_2' + s_1 \mathfrak{p}_2 - 2p_0') y.$$

Aus (4) folgt daher:

(a) $\qquad s_0 = q_0, \qquad$ (b) $\; s_1 = 2q_0' + q_1,$

(c) $\qquad q_0 \mathfrak{p}_1' + q_0' \mathfrak{p}_1 = q_0'' + 2q_1', \text{ also } q_1 = \frac{q_0 \mathfrak{p}_1}{2} - \frac{q_0'}{2} + c,$

(d) $\qquad q_1'' + \mathfrak{p}_1 q_1' = q_0 \mathfrak{p}_2' + 2q_0' \mathfrak{p}_2 - 2p_0'.$

Ferner ergiebt Gleichung (5):

(e) $\qquad \mathfrak{p}_1' = 2r', \text{ also } r = \frac{\mathfrak{p}_1}{2} + c',$

(f) $\qquad \mathfrak{p}_2' = r'' + \mathfrak{p}_1 r' + 2q_0' = \frac{\mathfrak{p}_1''}{2} + \frac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_1'}{2} + 2q_0',$

also $\qquad \mathfrak{p}_2 = \frac{\mathfrak{p}_1'}{2} + \frac{\mathfrak{p}_1^2}{4} + 2q_0 + c_1.$

Setzt man in (d) für q_1, $\mathfrak{p}_2$ und ihre Ableitungen die Werte aus (c) und (f) ein, so heben sich alle $\mathfrak{p}_1$ enthaltenden Glieder fort, und man erhält:

$$\frac{q_0'''}{2} + 6q_0 q_0' + 2c_1 q_0' - 2p_0' = 0, \text{ d. h.}$$

(6) $\qquad q_0'' + 6q_0^2 + 4c_1 q_0 - 4p_0 + c_2 = 0.$

Endlich folgt aus (f) unter Berücksichtigung der Werte von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ (vergl. Nr. 3):

(7) $\qquad \frac{p_0''}{p_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{(\omega_1 - \omega_2)^2}{p_0^2} + 4q_0 + 2c_1 = 0;$

c, c_1 und c_2 bedeuten willkürliche Konstanten.

Aus den Gleichungen (6) und (7) folgt zunächst, dafs, wenn p_0 eine (von Null verschiedene) Konstante ist, auch q_0 eine Konstante sein mufs und umgekehrt. Wir haben daher:

Fall II: p_0 eine von Null verschiedene Konstante.

Dann folgt aus (3):

(3*) $\qquad P_2 P_3 = P_3 P_2,$

und in $P_3 = R_1 P_2 + Q_1$ $(Q_1 = q_0 y' + q_1 y)$ ist nach Obigem auch q_0 eine Konstante. Daher lassen sich nach Nr. 3 P_2 und P_3 und daher auch

Digitized by Google

P_2 und P_5 in lineare mit einander vertauschbare Differentialausdrücke erster Ordnung zerlegen.

Fall III: p_0 eine Funktion von z.

In diesem Falle handelt es sich um die Integration der beiden simultanen Differentialgleichungen

$$q_0'' + 6q_0^2 + 4c_1 q_0 - 4p_0 + c_2 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{p_0''}{p_0} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{p_0^2} + 4q_0 + 2c_1 = 0. \tag{7}$$

Zu diesem Zwecke fassen wir q_0 als Funktion von p_0 auf:

$$q_0 = f(p_0) = \varphi'(p_0), \text{ also}$$

$$q_0' = f'(p_0)p_0',\ q_0'' = f'(p_0)p_0'' + f''(p_0)p_0'^2,^1)$$

dann wird (6) und (7):

$$f'(p_0)p_0'' + f''(p_0)p_0'^2 + 6f^2(p_0) + 4c_1 f(p_0) - 4p_0 + c_2 = 0, \tag{6*}$$

$$\frac{p_0''}{p_0} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{p_0'}{p_0}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\frac{(\omega_1-\omega_2)^2}{p_0^2} + 4\varphi'(p_0) + 2c_1 = 0. \tag{7*}$$

Die Integration von (7*) ergiebt (da $p_0'' = \frac{1}{2}\frac{dp_0'^2}{dp_0}$ ist):

$$p_0'^2 - (\omega_1-\omega_2)^2 + 2c_2 p_0 + 4c_1 p_0^2 + 8p_0\varphi(p_0) = 0, \tag{8}$$

und die Differentiation von (8) nach z:

$$p_0'' + c_2 + 4c_1 p_0 + 4\varphi(p_0) + 4p_0\varphi'(p_0) = 0. \tag{9}$$

Andererseits folgt aus (6*):

$$p_0'' + \frac{c_2 - 4p_0 + 4c_1\varphi'(p_0) + 6\varphi'^2(p_0)}{\varphi''(p_0)} + \frac{\varphi'''(p_0)}{\varphi''(p_0)}p_0'^2 = 0. \tag{10}$$

Die Identifikation von (9) und (10) führt zunächst zu der Gleichung

$$\varphi'''(p_0) = 0,$$

also

$$\varphi(p_0) = \alpha\frac{p_0^2}{2} - \beta p_0 + \gamma;$$

die Bestimmung der Konstanten ergiebt dann

$$\alpha = \beta = 1,$$

---

1) Die Accente bedeuten die Ableitungen nach dem Argument, also

$$f'(p_0) = \frac{df(p_0)}{dp_0},\quad p_0' = \frac{dp_0}{dz} \text{ u. s. w.}$$

Digitized by Google

während γ eine lineare Funktion von c_1, c_2 und $\overline{c_2}$ ist.[1]) *Wir haben also folgende Ausdrücke für* P_2 *und* P_5:

$$P_5 \equiv R_1 P_2^2 + Q_1 P_2 + P_1, \quad (P_2^2 \equiv P_2 P_2),$$

$$P_1 \equiv p_0 y' + p_1 y, \; Q_1 \equiv q_0 y' + q_1 y, \; R_1 \equiv y' + r y;$$

$$P_2 \equiv \frac{1}{p_0^3}(p_0 y' + (p_1 - \omega_1)y)\,(p_0 y' + (p_1 - \omega_2)y)$$

$$\equiv y'' + \mathfrak{p}_1 y' + \mathfrak{p}_2 y.$$

p_0 ist eine doppeltperiodische Funktion (oder eine ihrer Ausartungen), definiert durch die Gleichung

$$p_0'^2 + 4p_0^3 + C_1 p_0^2 + C_2 p_0 - (\omega_1 - \omega_2)^2 = 0;$$

ferner ist

$$q_0 = p_0 + 1, \quad q_1 = \frac{\mathfrak{p}_1 q_0}{2} - \frac{q_0'}{2} + c, \quad r = \frac{\mathfrak{p}_1}{2} + c';$$

C_1, C_2, ω_1, ω_2, c, c' sind willkürliche Konstanten, p_1 ist eine willkürliche eindeutige Funktion von z.

Das Problem der Vertauschbarkeit von P_2 und P_6 erledigt sich jetzt leicht durch die allgemeine Bemerkung am Schlusse der Nr. 3. Setzt man nämlich

$$P_6 = P_2^3 + P_5,$$

so folgt aus

$$P_2 P_6 = P_6 P_2$$

auch

$$P_2 P_5 = P_5 P_2,$$

wodurch das in Rede stehende Problem auf das oben behandelte zurückgeführt ist. P_5 kann sich natürlich auch auf einen Differential-

---

1) Es ist allerdings zu bemerken, daß dies nicht notwendig die allgemeinste Lösung des Problems ist. Vielmehr resultiert durch Elimination von p_0'' und p_0 aus den Gleichungen (8), (9) und (10) für $\varphi(p_0)$ die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\varphi'''((\omega_1 - \omega_2)^2 - 2\overline{c}, p_0 - 4c_1 p_0^2 - 8p_0\varphi) - \varphi''(c_2 + 4c_1 p_0 + 4\varphi + 4p_0\varphi') + 6\varphi'^2 + 4c_1\varphi' - 4p_0 + c_2 = 0.$$

Die obige Lösung $\varphi = \frac{p_0^2}{2} + p_0 + \gamma$ ist ein Partikularintegral dieser Differentialgleichung. Es wäre nun zu untersuchen, ob diese Differentialgleichung noch andere Integrale φ besitzt (welche ev. transzendente und mehrdeutige Funktionen von p_0 sein können) derart, daß sowohl die durch die Differentialgleichung (8) definierte Funktion p_0 als auch $q_0 = \varphi'(p_0)$ *eindeutige* Funktionen von z werden. Diese Untersuchung, welche beträchtliche Schwierigkeiten darzubieten scheint, behalte ich mir für eine spätere Gelegenheit vor.

Digitized by Google

ausdruck niedrigerer als 5. Ordnung oder auf einen Differentialausdruck von besonderer Art reduzieren; ist z. B.

$$P_5 = c_1 P_2^2 + c_2 P_2 + c_3 y,$$

wo die c_i Konstanten bedeuten, so hat P_6 die Form:

$$P_6 \equiv (P_2 - \alpha_1 y)(P_2 - \alpha_2 y)(P_2 - \alpha_3 y),^1)$$

wo die α_i Wurzeln der Gleichung

$$\alpha^3 + c_1 \alpha^2 + c_2 \alpha + c_3 = 0$$

sind.

Es erübrigt wohl, alle Spezialfälle aufzuzählen, die hier auftreten können.

Charlottenburg, den 18. März 1902.

Auszüge aus drei Briefen Steiners an Jacobi.

Mitgeteilt von E. JAHNKE in Berlin.[2])

I.

Sire!

Morgen reise ich auf 2 Monate nach der Schweiz ab, kann also nicht so ausführlich schreiben, wie ich mir früher vorgenommen hatte. Auch hatte ich seit Ostern natürlicherweise wenig Zeit, weil ich bekanntlich auf einmal nur eine Sache zu treiben vermag. Indessen schmeichle ich mir, Sire, deshalb nicht in Ungnade gefallen zu sein, dafs ich, anstatt mit kriechenden Worten, mit einer kleinen *That* (so gering dieselbe auch befunden werden möchte) zu danken mich ver-

1) Vergl. den Schlufs von Nr. 2.

2) Diese Briefe habe ich zugleich mit einer Reihe anderer, welche von Anger, Arago, Borchardt, Dirichlet, Fufs, Sophie Germain, Hansen, Humboldt, Lamé, Leverrier, Liouville, Kummer, Richelot, Schumacher an Jacobi gerichtet sind, nebst einer Eingabe, welche Jacobi im Interesse seines Freundes bei dem damaligen Staatsminister v. Eichhorn eingereicht hat, kürzlich von der Tochter Jacobis, Fräulein Margarete Jacobi in Cannstadt, erhalten, welcher ich auch an dieser Stelle für ihr liebenswürdiges Entgegenkommen den verbindlichsten Dank ausspreche.

Die drei Steiner-Briefe aus den Jahren 1833, 1845 in Verbindung mit Jacobis Eingabe aus dem Jahre 1845 bieten ein ganz besonderes Interesse; geben sie doch eine wertvolle Unterlage zur Beurteilung des Verhältnisses zwischen Steiner und Jacobi, worüber noch mannigfach irrige Meinungen verbreitet sind.

Digitized by Google

mafs, indem diese vielleicht eher Allerhöchstihrem Befehl vom ... entsprechen dürfte. (Das angezogene Rescript enthält übrigens mehrere Behauptungen und Forderungen, gegen welche ich mir später triftige Einwendungen zu erheben erlauben werde.)

Durch Deinen Dr. hast Du Dich unter den Einwohnern Berlins sehr populär (...) gemacht; alle blickten über mich hinweg, hinaus nach dem, der solches an mir gethan, des Erkundigens war kein Ende; daher schreibe ein Drittel meines Dankes auf Deine eigene Rechnung. Oder besteht die Gröfse und das Glück eines Menschen (titre de gloire) nicht in der Seelen-(oder Körper-)Zahl Anderer, welche er veranlafst, Ihm zu danken?! Der Prof. ist aber keine Folge des Dr., wie Du leicht glauben könntest, sondern beide wurden mir fast gleichzeitig verkündigt. Der arme Jakob hat jetzt Mühe, sich und diese beiden mit seinen 700 ℔ anständig oder Standesgemäfs zu erhalten. Er ist nicht stolz auf dieselben, aber seiner ungerechten nächsten Vorgesetzten wegen waren sie ihm höchst willkommen, und deshalb dankt er sehr tief!

Die Sache, auf welche ich im vorigen Briefe anspielte, hat sich entschieden, Lechmütz hat die Stelle behalten. Die polytechnische Schule ist noch immer unentschlossen. Wenn du einmal irgend etwas Angewandtes machst, so beehre doch den Major v. Radowitz damit, er hat Oben grofsen Einflufs, hat beispiellos viel Kenntnisse und weifs ungeheuer zu schwatzen. „Er kennt besonders die französische Mathematik", sagte mir Se. Königl. Hoheit. Die geom. Gestalten führten mich kürzlich zur Tafel des letzteren.

Scherk geht nach Kiel mit 1200 ℔; Halle ist also ledig?!...

Verzeih, o Rex! dieses leichtfertige Schreiben, ich weifs fast nicht, was ich thue, die Zeit ist zu Ende — das Lineal — fort — adieu!

Berlin, 14. Juli 1833.

Jakob.

II.

Allerdurchlauchtigster, Grofsmächtigster König,
Allergnädigster König und Herr!

Sire, in tiefster Unterthänigkeit naht sich die synthetische Geometrie den Stufen Höchstdero erhabenen Thrones, um in demüthigster Ehrfurcht ihr Schärflein zu den neusten Entdeckungen der allgewaltigen Analysis niederzulegen.

Ew. Majestät wollen es aber auch nicht ungnädig vermerken, wenn ich mich unterthänigst unterfange, von der Anziehung des Ellipsoids zu sprechen!

Digitized by Google

Ich seh', o Rex, Deinen gnädigen Blick, der von Mitleid, Verachtung und Neugier gemischt, mir zu reden gebeut. Wohlan denn, ich erdreiste mich zu reden.

Das *wahre Wesen* besagter Entdeckung hat seinen *natürlichen Grund*, meines Erachtens, in folgendem[1])

Lemma.

„Gehen aus irgend einem Punkte P zwei Tangenten PA, PB an eine Ellipse, und man hälftet ihren Winkel durch die Grade PQ, welche die Harmonische AB von P in Q trifft, und zieht durch Q irgend eine Sehne CD: *so ist allemal Winkel* $CPQ = DPQ$".

Denn: Ist PR der 4. harmonische Strahl zu PB, PQ, PA, so ist er auf PQ senkrecht (s. Geom. des Lineals, S. 8. §3, IV.); mithin sind sowohl B, Q, A und R als b, Q, a und P vier harmonische Punkte, und folglich ist PR die Harmonische des Punkts Q. Demnach sind auch D, Q, C, E harmonisch und daher auch PD, PQ, PC, PE; und da PE und PQ zueinander rechtwinklig sind, so müssen sie folglich die von PD und PE eingeschlossenen Winkel hälften (s. ebendaselbst). — Hierauf gründet sich nunmehr das folgende

Theorem.

„Eine unendlich dünne ellipsoidische Schale zieht einen aufserhalb derselben liegenden Punkt P nach der Richtung der Axe PQ des Berührungskegels an." Denn ist der Satz richtig, wie ich angenommen habe, dafs ein innerhalb der Schale liegender Punkt, wie etwa Q, dadurch in Ruhe bleibt, dafs sich je zwei gegenüberliegende Elemente (Atome), wie etwa C und D, aufheben, so folgt daraus leicht der vorstehende Satz. Nämlich es sei PQ die Axe des Kegels und AB die Berührungsebene, so verhalten sich zufolge meiner Annahme die Elemente $(C) : (D) = QD^2 : QC^2$, und da zufolge Lemma: $QD : QC = PD : PC$ (weil Winkel $DPQ = CPQ$), so ist auch $(C) : (D) = PD^2 : PC^2$, woraus folgt, dafs für zwei Elemente (C), (D), welche in Bezug auf den Punkt Q, in welchem die Axe die Berührungsebene trifft, einander gegenüber stehen, die Richtung der Resultante in die Axe PQ fällt; w. z. b. w.

1) Dieses Lemma, sowie das nachstehende Theorem nebst den Schlufsfolgerungen findet sich in der Notiz: Démonstration géométrique d'un théorème relatif à l'attraction d'une couche ellipsoïdique sur un point extérieur, welche im Journal für Math. **12**, 141—143 = Ges. Werke **2**, 3—5 abgedruckt ist und das Datum Januar 1843 trägt.

Digitized by Google

Ist meine Voraussetzung richtig, so gib mir doch, nach ehemaliger Weise, einige Andeutungen, wie man mittelst des unendlich Kleinen den Satz beweisen kann. (Wie hat ihn Mac-Laurin für das Sphäroid bewiesen?) Ich werde sodann den geometrischen Beweis, vom hiesigen Vicekönig ins Französische übersetzt, im Journal bekannt machen, und dabei zugleich bemerken, dafs Ew. Majestät bereits vor 1 Jahr in einem Schreiben an Eugène jenen schönen Satz angezeigt haben, und somit früher im Besitze desselben gewesen sind, als Poisson, der ihn kürzlich in einem Mémoire der Akademie vorlegte. Ist Dir dies letztere schon bekannt? — In der Voraussetzung, dafs meine obige Annahme kein Unsinn sei, bemerke ich ferner: Jede durch den Punkt Q gehende Ebene schneidet die ellipsoidische Schaale in 2 Theile, welche den Punkt P gleich stark anziehen; so zieht also z. B. der von P aus sichtbare Theil derselben, ACB, eben so stark als der hintere verdeckte Theil ADB. Der Schnitt, welchen jede solche Ebene mit der Schaale bildet, wie etwa CD, ist die Basis eines Kegels P, welcher allemal PQ zur Axe hat; u. s. w. Beim *vollen* Ellipsoid zieht ähnlicherweise derjenige Theil, welcher durch ein zweites Ellipsoid, das dem gegebenen $\sim$ und $\sim$ liegend, und den Punkt P zum Mittelpunkt hat, und durch die Berührungscurve AB, sowie durch den Mittelpunkt des gegebenen Ellipsoids geht, von diesem letzteren abgeschnitten wird, den Punkt P ebenso stark an als der übrige Theil.

Die von Dir gefundene Eigenschaft, dafs alle Berührungskegel aus einem Punkt P an eine Schaar konfokaler Ellipsoide einerlei Achsen haben, habe ich sehr bewundert, aber leider bis jetzt noch nicht selbst bewiesen. Ebenso weifs ich mit Ivorys Satz, den Du mir mittheiltest, nichts anzufangen. Die von Dir angeführten speziellen Fälle, betreffend den Ort des Scheitels des graden Kegels, welcher durch einen gegebenen Kegelschnitt geht, zeigen, dafs Du doch nicht alles behalten hast, was Dir weiland mitgetheilt worden; denn dieselben finden sich schon in Unserem grofsen Archiv von den Jahren 1824 und 1825 aufgezeichnet, und wurden nur deshalb nicht bekannt gemacht, weil sie später in den Annales und in der Correspond. Phys. et Mathém. (Brüssel) angetroffen wurden. Ich fand sie das erstemal im Zusammenhang mit den Sätzen Journal Bd. I. S. 48 und Bd. II. S. 192. In Bezug auf Deinen Satz vergl. Jrl. Bd. I. S. 47. Dafs der Kegel durch 2 rechtwinklige Koordinatensysteme eine Schaar solcher Systeme enthält, war mir genau bekannt, und ist solches durch die Bemerkung: „Dieser Satz ist ein besonderer Fall eines umfassenderen Satzes“ angedeutet. Die vollständige Aufklärung hierüber nächstens an einem anderen Orte.

Wo hat denn „Möbius die Kegelschnitte, welche 3 Punkte ge-

Digitized by Google

mein haben, mit Geraden verglichen", wie Du behauptest? — Poncelet habe ich wahrlich mehr genutzt als irgend jemand, und dafs ich ihn nicht so oft citirt, als du es wünschest, ist seine und des Pöbels Schuld, denn dieser ist ohne dies geneigt, alles was er von mir gelernt, ihm zuzuschreiben, und er selbst hat mich bisher gänzlich ignorirt.

Warum ist mir über die *„geometrischen Konstruktionen"* noch kein Gutachten zu Teil geworden? Sind sie vielleicht unter aller Würde und Kritik? Ich müfste dies glauben, fänden sie nicht gerade nach Königsberg den meisten Absatz. Desgleichen die „geometrischen Gestalten." Im übrigen Deutschland will man noch wenig davon wissen. Hier werden die „Gestalten" vom Prinzen August und vom General Valentini bei den Militärschulen unterstützt. — Es fehlt noch immer eine gründliche Recension. Mag immerhin der grofse Mann, im Bewufstsein seiner Kraft, sich gekränkt fühlen — ich halt's für eitle Empfindlichkeit — und wiederhole es, dafs zu einer gründlichen Recension mindestens *Ein Monat* Zeit erforderlich ist. Denn aus der Recension möchte ich ja eben erst erfahren, *„was ich eigentlich gethan und was ich noch zu thun habe."* Minding war der Sache nicht gewachsen, er wiederkäute und lobhudelte nur. Gaufs versprach mir eine Anzeige zu machen, wenn er erst dazu käme, es zu lesen — traun, kannst noch lange warten! Gergonne, an dem ich *meinen*[1]) Legendre zu haben hoffte, hat auf keine Weise gemuxt, mir nicht einmal geantwortet. Die Pariser Akademie hat Savary beauftragt, Bericht zu erstatten — aber er läfst's bleiben. Scherk gelobte zu recensieren, und siehe da — er läuft mir draus. Da der Verleger nicht fortsetzen will, bis er sich überzeugt, dafs die Kosten gedeckt werden, so habe ich auch noch nicht Hand an den zweiten Theil gelegt. Welch' ein trauriges Loos, sein Leben an ein Werk gesetzt zu haben, das nicht zu Stande kommen kann, oder wenn es fertig ist, kaum beachtet (wohl aber benutzt) wird! Hätte ich mich um Mehreres bekümmert, so konnte ich nach Halle gehen, statt Plücker, Schulz forderte mich mündlich dazu auf. Jetzt steht mir die ordentliche Professur für Mathem. bei der neu zu errichtenden Universität in Bern, zufolge mündlicher und schriftlicher Zusicherung, offen; allein meine Unzulänglichkeit macht mir Bedenken sie anzunehmen, obschon gar kein Latein verlangt wird. Ich hätte jahrelang Versäumtes mühsam und schwer nachzuholen, bliebe darin ein trauriger Stümper und *Pfuscher*, verlöre die geometrische Schwungkraft, vergäfse die fast unermefslichen

---

1) Anspielung auf die kräftige Förderung Jacobis durch die warme Fürsprache Legendres. Die Red.

Digitized by Google

geometrischen Resultate, und müfste ärgerlich zusehen, wie sich die Gleisner damit schmücken und brüsten. Indessen mufs sich meine Lage jedenfalls auf die eine oder andere Weise ändern; ich habe defshalb das Ministerium ernstlich angegangen, mich mit Beibehaltung meines bisherigen Gehalts als aufserordentlichen Professor an die hiesige Universität zu versetzen, jedoch mit wenig Hoffnung auf günstigen Erfolg, wenngleich mein Gesuch von Königl. Hoheit, Humb. Excellenzen und Crelle eifrigst unterstützt, und von Schulz angerathen worden; der Geist wäre willig, aber das Geld ist knapp (zu Sinecuren).

Schlägt alles fehl, dann bin ich verloren, dann bemächtigt sich meiner Verzweiflung und unauslöschliche Malis. Wie soll ich — bei 20 wöchentlichen Unterrichtsstunden und der damit verbundenen starken Portion Schulärger — meine Entwickelungen vollenden, wie die zudringlichen Gleisner durch gediegene Untersuchungen niederschmettern? Aber auch beim guten Erfolg meines Gesuchs mufs ich die Sprache der Mäfsigung, welche ich in der Vorrede des ersten Theils zu beobachten mich bemühte, verlassen; ... Eben so, wie 1824 den Satz über die Brennlinien des Hyperboloids, habe ich auch die Sätze über die Correlationssysteme (ehemals: Projection gauche) Magnus mitgetheilt, im J. 1828, er spielte darauf dieselbe Rolle wie damals, gab vor, er hätte nun *„ganz allgemeine"*, Resultate gefunden, *„wäre nur zu faul, sie bekannt zu machen"*, worauf ich bedenklich ihm seine böse Absicht vorhielt und die Bekanntschaft endigte. Auch die Konstruktionen, wie bei collinearverwandten Systemen u. s. w. entsprechende Elemente gefunden werden, habe ich ihm wörtlich mitgetheilt nebst andern Kleinigkeiten. Welche ... Verstellung nimmt er jetzt an! Ich hätte nur ein paar spezielle Eigenschaften hinzugefügt. Trotzdem ich an 2 oder 3 Stellen § 59, wie z. B. S. 293, ausdrücklich sage: „Dafs diese Eigenschaften durchaus keine räumlichen seien", nennt er sie *„gänzlich mifslungen"*. Aber er hat recht gethan, denn das Publikum liest nicht nach. Und dafs Ew. Majestät von demselben § im gestrengen Handschreiben gesagt haben, er sei „wunderschön", bleibt unbekannt. Wer ist König?! Wo ist Dein Ansehen, Rex! wenn man so Deine Aussprüche ungestraft öffentlich lästern darf! Dazu sind die Hauptsachen jenes § in der That wunderbar, und durch keine unbest. *Coefficienten* oder ungleiche *Nenner* in dem Umfange und so schön wiederzugeben! — Doch pafs auf, wie ich ihn nächstens vernichten werde. Jenes Hyperboloid mufs jetzt auch noch nachträglich in Erinnerung gebracht werden; ebenso der Satz von Dir, den er durch mich erhalten und im Journal hat abdrucken lassen; in welchem Bande steht er? Natürlicherweise werde ich Dich dabei nicht nennen, wenn es Dir unlieb ist. Mein Vorhaben ist nämlich

Digitized by Google

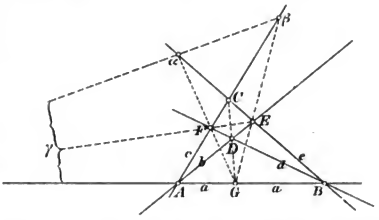
folgendes: In einer Broschüre von 10—12 Bogen (betitelt: „Aufklärung einiger merkw. geom. Eigenschaften") die wichtigsten Resultate, welche den folgenden Theilen meines Werks angehören, kurz zu entwickeln und anzudeuten, um dadurch ... Plücker und Magnus in ihre gehörigen Schranken zurückzuweisen. Bin ich nun auch überzeugt, dafs diese Resultate an Allgemeinheit und lichtvollem Aufschlufs über den inneren Zusammenhang der Eigenschaften, alles was jene beiden ... bisher mir und Andern abgesehen haben, weit übertreffen: so ist es dennoch für mich ein gewagtes Spiel, weil sie dann meine neuen Ideen schnell benutzen, *verdrehend* erweitern, was durch ihre trefflichen französischen Hilfsmittel sehr leicht ist, und dabei in Gemeinschaft über mich losziehen können, ohne dafs ein gerechter Richter mir Beistand verleiht. Das Publicum hat nicht Zeit, sich in diesen gesteigerten geometrischen Wust hineinzuarbeiten, und kann daher nicht urtheilen, wer Recht hat. Zudem ist dem heutigen Zeitgeist die analytische Methode zugänglicher, als die synthetische. So mufs denn der letzte Geometer das Opfer jener erfindungslosen Analytiker werden!

Ein Trost wäre es für mich, wenn ich auf eine Beurtheilung hoffen dürfte, welche nachweist, wer das eigentliche Wesen in der Geometrie gefördert, wer, um demselben auf die Spur zu kommen, mit unsäglicher Mühe danach strebte, überall „*„die bekannten Grenzen hinter sich zurückzulassen,*"" und wenn ein beschützender ritterlicher Held auszusprechen wagte: dafs ein solches Streben Ernst und Gewissenhaftigkeit bezeuge, und dafs die synthetische Betrachtungsweise mehr persönlichen Scharfsinn und Ausdauer erfordere, und dafs sie zur Erfindung von neuen *wesentlichen* Eigenschaften fast allemal den Weg bereitet habe.

Dafs Du Dich nicht gern zu meinem Beschützer hergeben wirst, begreife ich wohl, aber Du kannst vielleicht einen Deiner Jünger anfeuern, und ihm mit Deiner eminenten Gelehrsamkeit und einem paar zermalmenden Phrasen beistehen. Ich kann nicht unterlassen, mir mit der Hoffnung zu schmeicheln, dafs Dich meine Resultate rühren werden. Einige werde ich sogar nach der Bobillierschen Methode (Annales, tom. XVIII, p. 25, . . .) analytisch beweisen, um auch hierdurch die Erfindungslosigkeit und Charlatanerie meiner Gegner zu erhärten. Es betrifft dies nämlich das Gesetz (welches Du bereits im J. 1829 in der Rofsmarienstrafse beweisen solltest, und welches der Zorn mich jetzt selbst beweisen lehrte): „Dafs alle netzgewebeartigen Eigenschaften, welche von Geraden und Punkten gelten (proj. Eigenschaften), ähnlicherweise bei Curven n^{ten} Grades und n^{ter} Classe stattfinden." (Desgl. bei Flächen n^{ten} Grades wie bei Ebenen.) Z. B. schneiden sich drei Kegelschnitte a, b, c (durch Gerade vorgestellt) in 4 Punkten A und die

Digitized by Google

drei Kegels. a, d, e in 4 Punkten B, so liegen sowohl die 2mal 4 Punkte C und D, als E und F, als F und G, als E und G in einem Kegelschnitt, *und sodann liegen die 12 Punkte* β, α *und* γ *allemal in einem einzigen Kegels.* u. s. w. ins Unendliche, gerade so, wie bei Geraden. Ebenso lassen sich alle Porismen über Polygone u. s. w. travestiren, desgl. die Correlationssysteme, und zwar für Curven n^{ten} Grades und n^{ter} Classe. Wo bleibt da Magnus mit seiner schlau-trügerischen Reflexion über die Nenner!? Zudem hat freilich Möbius dieses Gesetz dunkel, vielleicht blinderweise, ausgesprochen, aber doch ohne die geringste Andeutung seiner eigentlichen Natur. Da die Ausführung dieses Gesetzes der analytischen Methode zugänglicher ist, als der synthetischen, so darf ich mich auf jenem Wege nicht zu weit hineinlassen, sondern will die Ausführung gern den Analysten überlassen, aber sie sollen nur nicht vornehm gegen mich thun, sondern mein geringes Verdienst um die Sache ehrlich anerkennen.



Eugène und Dove lassen Dich grüfsen; jener läfst Dir sagen, dafs nächstens ein Auszug seiner Abhandlung im Journal erscheine. ...

Nichts für ungut! sollte auch mein langwieriger Brief Dich in Deinem Winterschlaf beunruhigen.

Nun adieu Rex! Glück im neuen Jahr! Der Herr lasse sein Antlitz über dem Deinigen leuchten und segne Dein Haus! Amen.

Berlin, den 31. Dec. 1833.

Dein treuer
Jakob.

III.

... Zur Vollendung eines Satzes, bestehend aus zahlreichen piquanten Besonderheiten, wäre es sehr wünschenswerth, dafs folgende Eigenschaft stattfände:

„Dafs bei einem Hyperboloid (H_1 oder H_2), wenn dessen Halbachsen der Bedingung genügen $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}$, dann die Fufspunkte der aus dem Mittelpunkt auf die Flächen eines Quadrupels U, X, Y, Z gefällten

Digitized by Google

Perpendikel in einer Ebene liegen." (D. h. U, X, Y, Z sind die Flächen eines Tetraeders, bestimmt durch ein Quadrupel von 4 sich conjugirten Polen u, x, y, z.)

In Rom war von Hornpunkten der Flächen die Rede, es hiefs, eine f_3 könne nur 1 Hornpunkt haben. Im allgemeinen ist es richtig. Aber nun kommt mir eine f_3 mit 4 Hornpunkten vor, sie geht durch die 6 Kanten des durch die 4 Punkte bestimmten Tetraeders, was die Sache ohne *Widerspruch* möglich macht. Vielleicht ist diese f_3 identisch mit derjenigen, „welche der Ort des Punktes P ist, aus welchem Perpendikel auf die Flächen eines gegebenen Tetraeders $abcd$ gefällt, die Fufspunkte in einer Ebene liegen." Denn auch diese mufs ja die Kanten enthalten und die Ecken zu Hornpunkten haben. Aber wenn sie dieselbe sein soll, so darf sie mit der um $abcd$ beschriebenen Kugel K, aufser den Hornpunkten a, b, c, d keinen andern Punkt gemein haben, trotzdem Theile der f_3 sich innerhalb und aufserhalb K befinden, und der Schnitt von f_3 und K im allgemeinen eine C_6 ist.[1])

Ich schreibe diese Zeilen nicht, um Dich zu zwingen, mich zu besuchen. Habe nur offen den Mut Deiner Meinung und mache es am Ende nicht etwa noch wie Peter. Denn das letzte Mal hast Du mir ja schon erklärt, wie sauer es Dir wird zu kommen. Ich schreibe Tag und Nacht über Reciprocität, bin daher für starke Ausnahmen empfänglich: ein versäumter Besuch auf 84 Meilen gereicht mir zum Vorwurf. Am Samstag fuhr ich per Droschke zu Dir, weil Du angeblich immer zu Hause bist — — ich sagte, dafs ich Dich sehr gern sprechen möchte.

Mein Zustand ist sehr schlimm, gereizt, fieberhaft aufgeregt, reibe mich auf durch neue Sätze — wofür mir des Teufels Dank bescheert — ohne Arzt und ohne einen einzigen Freund. Welche Betrachtungen und welche Stimmung seit 14 Tagen über mein Schicksal und die Menschheit!

---

1) Die hier von Steiner aufgeworfenen Fragen haben in „Beiträge zur analytischen Geometrie des Raumes, insbesondere zur Theorie der Flächen dritten Grades mit vier Doppelpunkten, sowie zur Lehre von den Doppelpunkten" von F. E. Eckardt, erschienen 1870 als Programmabhandlung in Reichenbach, dann umgearbeitet in Math. Ann. 5, 30—50, 1872, ihre Beantwortung gefunden. Man vergleiche auch die Breslauer Inauguraldissertation von Otto Handel: Das räumliche Analogon eines Steinerschen Problems der Ebene (1877); hier sind ebenfalls die berührten Fragen erledigt. In der Programmabhandlung: „Sur quelques problèmes relatifs à la surface des ondes" (Berlin 1870) wies E. Lampe auf den merkwürdigen Umstand hin, dafs die Steinersche Römerfläche vierter Ordnung, welche die reziproke Polare der Fläche dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten ist, früher behandelt worden ist als diese leicht zugängliche Fläche dritter Ordnung. Die Red.

Digitized by Google

Jetzt spielt in der That die Leber die Hauptrolle, die andern Übel sind nur noch Nebensache. Warum folgte ich nicht trotzig meinem Instinkt und ging die beiden letzten Jahre nach Kissingen; geh' ich nun zu grunde — so gebührt der Dank dem Rathe der berühmtesten Ärzte.

Zu welcher Stunde ist Schönlein zu sprechen? ich müfste hinausfahren, oder einen andern ansprechen — aber welchen?

Lebe wohl

Dienst. 25/3. 45. Dein

Steiner.

Vor 8 Tagen wurde ich 49; einsam und traurig reflectirte ich; schon 700 und noch einsam.

Schreiben Jacobis an den Staatsminister v. Eichhorn betreffend Jakob Steiner.

Mitgeteilt von E. Jahnke in Berlin.

Hochgebietender Herr Staatsminister p. p.

Ew. Excellenz erlaube ich mir, einen ganz gehorsamen Antrag in Bezug auf den Professor an hiesiger Universität Jakob Steiner vorzulegen.

Jakob Steiner, Mitglied der Berliner Akademie der Wissenschaften, einer der ausgezeichnetsten Universitätslehrer und eine der originellsten und bedeutendsten wissenschaftlichen Persönlichkeiten, ist in Utzisdorf im Kanton Bern geboren; drosch, säete und pflügte bis zu seinem 19. Jahre, wie es seine Kräfte erlaubten und sein Stand als Bauer es mit sich brachte, und hatte bis zu diesem Alter nichts als Lesen und den Katechismus gelernt. Da trieb ihn ein unbezwinglicher Wissensdrang zu dem muthigen Entschlufs, ohne Mittel und Empfehlungen zu dem ehrwürdigen Pestalozzi zu gehen, der ihn mit gutmüthigem Edelsinn unentgeltlich in seine Anstalt aufnahm und ihn im Schreiben, Rechnen und den Anfangsgründen der Mathematik unterrichtete. Nach dem interessanten Zeugnifs Pestalozzis „zeigte er dort bald vorzügliche Talente für Mathematik und bahnte sich mit eisernem Fleifse einen Weg zur Selbstbildung für dieses Fach", und bereits nach *anderthalb* Jahren konnte er an der Anstalt selbst als Lehrer fungiren. Die in

Digitized by Google

der Pestalozzischen Anstalt in Ausübung gebrachte Methode, die mathematischen Wahrheiten als Gegenstand freier Anschauung zu behandeln, ergriff seine lebhafte Phantasie, und schon damals strebte er in dem jedesmaligen Gegenstande seiner Forschung bis zu dem Grundgedanken vorzudringen, von dem aus sich die Sache wie von selber entfalten und ihre wahre Synthesis erhalten werden könnte.

Bei dieser Richtung in die Tiefe und auf das Ganze fühlte Steiner bald den Mangel, an dem die Pestalozzische Anstalt unterging; die Freude an der Methode hatte vergessen lassen, dafs der wissenschaftliche Stoff fehlte. In der Hoffnung, einen solchen in reichster Fülle überliefert zu erhalten, wandte sich Steiner nach $4\frac{1}{2}$ jährigem Aufenthalte bei Pestalozzi nach Heidelberg und von da i. J. 1821 nach Berlin. Aber der mathematische Universitätsunterricht war noch damals in höchst betrübter Verfassung, wenig geeignet seine Hoffnungen zu erfüllen, und so fand er sich ganz seinem eigenen Genius überlassen, der ihn glücklicher Weise mit Sicherheit zu einem ruhmvollen Ziele führte.

Bei dem Mangel an wissenschaftlichen Hülfsmitteln konnte es nicht fehlen, dafs die ersten Resultate von Steiners Forschungen mit bereits bekannten zusammentrafen. Er hatte das ganze in alter und neuer Zeit aufgeführte Gebäude der synthetischen Geometrie aus eigner Kraft zu reproduziren; aber bald ging er über die bekannten Grenzen hinaus, und erst als er überzeugt war, wirklich neues zu geben, trat er damit an die Öffentlichkeit. Bereits seine ersten Publikazionen machten grofses Aufsehn; sie gingen sogleich übersetzt in die franz. mathem. Zeitschriften über und trugen wesentlich dazu bei, den Ruf des eben (im J. 1826) gestifteten Crelleschen mathematischen Journals zu begründen, in welchem sie erschienen. In seinem 1832 publizirten Buche „Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander“ war er bemüht, von wenigen räumlichen Eigenschaften aus nach einem einfachen Schematismus über das ganze Heer auseinander gerissener geometrischer Sätze eine klare Übersicht zu gewinnen, jedem seine besondere Stellung im Verhältnifs zu den übrigen anzuweisen, in das frühere Chaos Ordnung zu bringen, alle Theile naturgemäfs ineinandergreifen und sich zu wohlbegränzten Gruppen vereinigen zu lassen. Indem er so den Organismus aufdeckte, durch welchen die verschiedenartigsten Erscheinungen in der Raumwelt miteinander verbunden sind, hat er nicht blofs die geometrische Synthese gefördert, sondern auch für alle anderen Zweige der Mathematik ein Muster einer vollkommnen Methode und Durchführung aufgestellt.

Während dieser ersten Arbeiten hat Steiner hier in Berlin seine Existenz nur mühsam durch Privatstunden fristen können, bis er zuletzt

Digitized by Google

einen sicheren Unterhalt durch eine Lehrerstelle an der Klödenschen Gewerbschule erhielt. So kostbare Kräfte mufsten aber ganz der Wissenschaft erhalten werden. Auf eine an Ew. Excellenz seeligen Vorgänger, Hr. v. Altenstein, von mir gerichtete Vorstellung wurde Steiner mit dem Belafs seines an der Schule bezogenen Gehaltes von 700 ℳ als aufserordentlicher Professor an die Berliner Universität versetzt.

Der besondere Bildungsgang Steiners, die dadurch herbeigeführte Combination einer ausgezeichneten pädagogischen Methode mit dem Vollgehalte der Wissenschaft, sein lebendiger und begeisternder Vortrag, befähigten ihn vorzüglich, Lehrer der Mathematik heranzubilden, und so hat er in einer längern Reihe von Jahren seegensreich als Universitätslehrer gewirkt. Fortwährend hat er dabei durch zahlreiche, hier und in Frankreich publizirte Arbeiten das Gebiet der synthetischen Geometrie mit neuen Entdeckungen erweitert, und seine Methoden und mit ihnen seinen Ruf immer weiter ausgebreitet. Als ich nach Rom kam, fand ich seine Arbeiten in das Italienische übersetzt. Ich bitte Ew. Excellenz den Schlufs des Berichtes hierher setzen zu dürfen, welcher vor 4 Jahren der Pariser Univers. d. Wiss. von ihren 3 ausgezeichnetsten Mathematikern, den Hrr. Cauchy, Sturm und Liouville, über eine umfassende Schrift Steiners *vom Gröfsten und Kleinsten* abgestattet wurde. „Mit gleichem Glück", heifst es, „behandelt er die zusammengesetztesten Aufgaben; die Verkettung der Sätze ist bei ihm so natürlich, dafs es oft genügt, sie blofs auszusprechen, und es unnütz wird, regelrechte Beweise hinzuzufügen. Wie von selber fliefsen die Theoreme, eines aus dem anderen, so dafs man am Ende die schönen, am Schlusse des Werkes zusammengestellten Sätze mit Staunen fast evident vor sich liegen sieht, die auch den geschicktesten Mathematikern, wenn man sie ihnen vom übrigen Werke isolirt darböte, grofse Schwierigkeiten machen würden. Steiner hat vielleicht in früheren Werken schwerere Probleme gelöst, Theoreme von originellerer Neuheit entdeckt, wie z. B. in seinen schönen Untersuchungen über die Epicycloiden; aber nirgends hat er einfachere, elegantere, besser verkettete Beweise geben können, und sie verdienen, unmittelbar als eine nothwendige Ergänzung in die geometrischen Lehrbücher aufgenommen zu werden." Ich füge hinzu, dafs Steiner in diesen Arbeiten theils der synthetischen Geometrie Gebiete aufschliefst, welche bisher nur durch andere Methoden zugänglich schienen, theils aber auch seine Forschungen bis zu Punkten ausdehnt, welche für andre Methoden vorläufig noch unerreichbar sind. Wie bedeutend aber auch die von Steiner publizirten Arbeiten sind, so bilden sie doch nur einen verhältnifsmäfsig geringen Theil der

Digitized by Google

Resultate, welche er während eines arbeitsamen Lebens in seinen Manuscripten niedergelegt hat, und deren Verarbeitung er noch beabsichtigt.

Zu den 700 ℳ als Professor hat Steiner seit einigen Jahren noch das jährliche Gehalt von 200 ℳ als Akademiker erhalten. Aber die ihm verordnete Pflege seiner Gesundheit macht eine jährlich wiederkehrende, mit Reisen verknüpfte Badekur nöthig, deren Kosten verbunden mit dem theuern Leben in Berlin seine Mittel übersteigen, und durch eine aufserordentliche Subvention nur unvollkommen ersetzt würden. In dem Interesse der Wissenschaft erlaube ich mir daher, an Ew. Excellenz den ganz gehorsamen Antrag zu richten:

Ew. Excellenz wolle das Universitätsgehalt des Prof. Steiner hochgeneigtest durch eine Zulage von 300 ℳ auf 1000 ℳ erhöhen.

Die Ertheilung eines angemessenen Gehaltes an einen Universitätslehrer von solcher Genialität, Wirksamkeit und Celebrität ist auch ohne Rücksicht auf seine Gesundheitsverhältnisse nur dem grofsartigen Schutze entsprechend, welchen durch Ew. Excellenz hohe Vermittlung der preufsische Staat den Pflegern wahrer Wissenschaft angedeihen läfst. Unter den genannten Umständen aber habe ich es für meine besondere Pflicht gehalten, Ew. Excellenz diesen Antrag zu unterbreiten, welchen ich Ihnen dringend ans Herz lege, und für dessen hochgeneigte Gewährung die heutigen und kommenden Mathematiker, die von Steiner gelernt haben und von ihm lernen werden, Ihnen Dank sagen werden.

In tiefster Ehrerbietung verharre ich

Ew. p. p.

unterthäniger Diener

(gez.) C. G. J. Jacobi, ord. Pr.

Berlin, den 8. Juli 45.

Digitized by Google

Kegelschnitte aus der Dreiecksgeometrie.

Von J. Neuberg in Lüttich.

In dem *Grunddreiecke* ABC nennen wir A', B', C' die Mitten der drei Seiten; A'', B'', C'' die Fufspunkte der drei Höhen; A''', B''', C''' die Durchschnitte der entsprechenden Seiten der Dreiecke $A''B''C''$, ABC; H den Höhenschnitt, G den Schwerpunkt, O das Zentrum des Umkreises. Ferner bezeichnen a, b, c die Längen BC, CA, AB; A, B, C die gegenüberliegenden Winkel BAC, CBA, ABC; m_a, m_b, m_c die Längen der Schwerlinien AA', BB', CC'.

1. *Eine Gruppe von drei gleichseitigen Hyperbeln.* — Wir betrachten zunächst die drei gleichseitigen Hyperbeln V_a, V_b, V_c, welche die Seitenpaare (AB, AC), (BC, BA), (CA, CB) in den Eckpunkten der dritten Seite berühren. Die Zentren F_a, F_b, F_c dieser Kurven können auf verschiedenen Wegen ermittelt werden, was zu mehreren merkwürdigen Sätzen führt; da diese Punkte auch die Brennpunkte der drei Brocardschen Parabeln sind, so sind einige hier gefundene Eigenschaften wohl bekannt, werden aber neu bewiesen.

1. Offenbar *liegen die Punkte* F_a, F_b, F_c *auf den respektiven Schwerlinien* AA', BB', CC'.

2. Da zwei konjugierte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel (oder ein Durchmesser und die zugehörigen Sehnen) zu einer Asymptote symmetrische Richtungen haben, so *sind die Asymptoten von* V_a *parallel zu den Halbierungslinien der Winkel* $AA'B$, $AA'C$.

3. Aus der oben erwähnten Eigenschaft folgert man leicht, dafs die Winkel F_aBC und F_aAB gleich sind, so wie auch die Winkel F_aCB und F_aAC; ferner, dafs die Winkel BF_aC, AF_aB, AF_aC die Supplemente der Winkel A, B, C sind. Somit *berühren die Kreise* AF_aB, AF_aC *die Seite* BC.

Wir bezeichnen mit *Beikreis* (AB) den Kreis, der durch A und B geht und BC berührt u. s. w. Es giebt sechs solcher Kreise; bekanntlich treffen sich die Beikreise (AB), (BC), (CA) in dem einen der Brocardschen Punkte, und die drei andern in dem zweiten dieser Punkte. Zwei Beikreise (BA) und (CA), welche zwei Seiten des Grunddreieckes im gemeinschaftlichen Scheitel berühren, schneiden sich noch in einem Eckpunkte des zweiten Brocardschen Dreieckes, oder in dem Brennpunkte einer Artztschen Parabel. Nach dem oben gefundenen Resultate *schneiden sich zwei Beikreise, welche eine Seite des Grunddreieckes*

Digitized by Google

zur gemeinschaftlichen Tangente haben, in dem Zentrum einer der Hyperbeln V_a, V_b, V_c.

Aus denselben Winkelgleichheiten kann man auch schliefsen, dafs die *Punkte* F_a, F_b, F_c *die Gegenpunkte* (isogonale Punkte) *der Eckpunkte des zweiten Brocardschen Dreiecks sind.*

4. Da der Winkel $BF_aC = \pi - A = BHC$ ist, *so geht der Kreis* BHC *durch* F_a.

Verlängert man die Schwerlinien um $A'A_1 = AA'$, $B'B_1 = BB'$, $C'C_1 = CC'$, so bekommt man die Ecken des *antikomplementaren* Dreiecks $A_1B_1C_1$, dessen Seiten mit den durch A, B, C zu BC, CA, AB gezogenen Parallelen zusammenfallen.

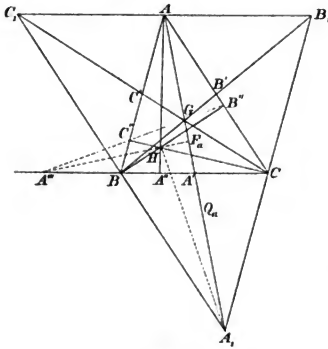


Fig. 1.

Voriger Satz kann dann so ausgesprochen werden: *Die den Dreiecken* A_1BC, B_1CA, C_1AB *umschriebenen Kreise, welche sich in* H *treffen, schneiden die entsprechenden Schwerlinien in den Punkten* F_a, F_b, F_c.

5. Letztere Kreise haben zum Durchmesser bezw. HA_1, HB_1, HC_1, da die Winkel HAA_1, HBB_1, HCC_1 rechte sind. Daher der Satz: *Die Punkte* F_a, F_b, F_c *sind die Projektionen des Höhenzentrums auf die Schwerlinien;* oder in anderer Fassung:

Der über HG *als Durchmesser beschriebene Kreis* (orthozentroïdaler Kreis) *trifft die Schwerlinien in den Punkten* F_a, F_b, F_c.

6. Die Punkte H und A''' gehören zur Potenzlinie der Kreise $AA''A'$, $BCC''B''$; denn aus der Betrachtung der Kreise $BCB''C''$, $AC''A''C$, $B''C''A''A'$ schliefst man

$$HB \cdot HB'' = HC \cdot HC'' = HA \cdot HA'',$$

$$A'''B \cdot A'''C = A'''B'' \cdot A'''C'' = A'''A' \cdot A'''A''.$$

Folglich *ist die Potenzlinie* HA''' *senkrecht zur Zentralen* $A'A$ *und geht somit durch den Punkt* F_a.

7. Die gleichwinkligen Dreiecke F_aBC, BAA_1 geben

$$F_aB : F_aC = AB : AC.$$

Digitized by Google

Also *treffen die Apollonischen Kreise des Grunddreiecks die entsprechenden Schwerlinien in den Punkten* F_a, F_b, F_c.

8. Aus den Gleichheiten

$$\text{Winkel } BF_aA' = B = BC''A', \quad CF_aA' = C = CB''A'$$

folgt, *daß die Kreise* $A'BC''$, $A'CB''$ *sich in* F_a *schneiden.*

9. Der Umkreis ABC treffe die Schwerlinien zum zweiten Male in Q_a, Q_b, Q_c.

Die Punkte F_a, F_b, F_c *sind symmetrisch zu den Punkten* Q_a, Q_b, Q_c *in Bezug auf die Seitenmitten* A', B', C': denn der Umkreis selbst ist symmetrisch zu den Kreisen A_1BC, B_1CA, C_1AB in Bezug auf A', B', C'.

10. Aus den ähnlichen Dreicken F_aBC, BAA_1 leitet man ab:

$$A'F_a = \frac{a^2}{4m_a}, \quad BF_a = \frac{ac}{2m_a}, \quad CF_a = \frac{ab}{2m_a},$$

$$AF_a = \frac{4m_a^2 - a^2}{4m_a} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2m_a} = \frac{bc\cos A}{m_a}.$$

Bezeichnen x_a, y_a, z_a die absoluten baryzentrischen Koordinaten des Punktes F_a ($x_a + y_a + z_a = 1$), so findet man:

$$x_a = \frac{\Delta F_aBC}{\Delta ABC} = \frac{A'F_a}{A'A} = \frac{a^2}{4m_a^2},$$

$$y_a = z_a = \frac{\Delta F_aCA}{\Delta ABC} = \frac{\Delta F_aCA}{2\cdot\Delta AA'C} = \frac{F_aA}{2A'A} = \frac{bc\cos A}{2m_a^2}.$$

11. Es sei $yz + kx^2 = 0$ die baryzentrische Gleichung von V_a; den Wert der Konstante k bestimmt man leicht, da die Koordinaten des Mittelpunktes den Ableitungen von $yz + kx^2$ gleiche Werte geben. Die Gleichungen von V_a, V_b, V_c sind

$$yz + \frac{bc\cos A}{a^2}x^2 = 0, \quad zx + \frac{ca\cos B}{b^2}y^2 = 0, \quad xy + \frac{ab\cos C}{c^2}z^2 = 0.$$

12. Der Punkt F_a fällt auf $A'A$ selbst, in A oder jenseits von A, je nachdem der Winkel A spitz, recht oder stumpf ist. Im ersten Falle berührt der eine Zweig von V_a die Seite AB und der andere AC, außerhalb des Dreiecks ABC; im zweiten Falle zerfällt V_a in die Geraden AB, AC; im dritten Falle berührt derselbe Zweig von V_a die beiden Seiten AB, AC innerhalb des Winkels BAC.

In der Voraussetzung $A < \frac{\pi}{2}$ nehmen wir F_aA' zur y-Achse und die zu BC durch F_a gezogene Parallele zur x-Achse; dann sei $x^2 - y^2 = \alpha'^2$ die Gleichung von V_a. Aus der Tangentengleichung im Punkte B ergiebt sich

$$\alpha'^2 = -F_aA' \cdot F_aA.$$

Digitized by Google

Bedeutet nun 2α die Länge der Achse von V_a und θ den Winkel $AA'B$, so ist nach dem zweiten Apollonischen Satze über konjugierte Durchmesser

$$\alpha^2 = \alpha'^2 \sin\theta = \frac{a^2bc\cos A}{4m_a^2}\sin\theta.$$

Der Winkel θ ergiebt sich aus der Gleichung: $\measuredangle ABC = \frac{1}{2}am_a\sin\theta$.

2. *Die Brocardschen Parabeln.* — Diese Kurven sind zuerst von Brocard untersucht worden (Mémoires de l'Ac. de Montpellier, 1886). Einen Beitrag dazu habe ich in Mathesis, 1890, S. 166 gegeben. Eine von Lemoine vorgelegte Aufgabe (Mathesis, 1900) hat mich veranlafst, das Studium derselben wieder aufzunehmen.

1. Die Höhen AA'', BB'', CC'' des Grunddreiecks ABC teile man in den Punkten α, β, γ nach demselben (veränderlichen) Verhältnisse; die so entstandenen ähnlichen Punktreihen mögen mit (α), (β), (γ) bezeichnet werden. Dann umhüllen die Verbindungsgeraden $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ die drei Brocardschen Parabeln P_a, P_b, P_c.

Die Parabel P_a berührt die Träger BB'', CC'', sowie auch die Linien BC, $B''C''$, welche entsprechende Elemente verbinden. Die bewegliche Tangente $\beta\gamma$ schneidet die festen Tangenten BC, $B''C''$ in den Punkten α', α'', welche gleichfalls ähnliche Punktreihen erzeugen. Analoges gilt für die Kurven P_b, P_c.

2. Die Geraden $A\beta$ und $A\gamma$, $A\alpha'$ und $A\alpha''$ sind offenbar homologe Elemente der ungleichwendig ähnlichen Dreiecke ABB'' und ACC'', ABC und $AB''C''$; folglich sind sie symmetrisch zu der Winkelhalbierenden AI. Solche Paare von Geraden werden *isogonal* oder *winkeltreu* genannt; jedes Paar bestimmt auf BB'' und CC'' oder auf BC und $B''C''$ zwei Paare entsprechender Punkte der ähnlichen Reihen (β) und (γ) oder (α') und (α'') und ergiebt somit vier Tangenten an P_a.

3. Die Winkelhalbierende AI ist zu sich selbst isogonal und folglich eine Tangente an P_a; so auch die Winkelhalbierende des Aufsenwinkels in A. Diese senkrechten Tangenten schneiden sich in einem Punkte A der Leitlinie.

Der Radius AO des Umkreises ist isogonal zur Höhe AH, und trifft also BB'', CC'' in ihren Berührungspunkten O_b, O_c mit P_a. Ist U die Mitte der Strecke O_bO_c, so teilen der Durchmesser HU und die zu AO parallele Linie HV den Winkel BHC'' harmonisch. Nun sind drei Strahlen dieses harmonischen Büschels zu AB, AC und der Tangente am Umkreise in A senkrecht; folglich ist HU senkrecht zur Symmediane AK, und letztere ist die Leitlinie von P_a.

Bezeichnet A''' den Durchschnitt der Tangenten BC und $B''C''$, so liegen ihre Berührungspunkte auf der zu AA''' isogonalen Linie.

Digitized by Google

Die Berührungssehnen der Tangentenpaare (BB'', CC'''), $(BC, B''C'')$ bilden, wie ihre isogonalen Linien, einen harmonischen Büschel mit den Seiten AB, AC.

4. Die Brennpunkte von P_a, P_b, P_c mögen F_a, F_b, F_c heifsen. Da die Tangente AI den Winkel zwischen dem Leitstrahle AF_a und der Leitlinie AK halbiert, liegt F_a auf der zu AK isogonalen Schwerlinie AA'. Anderseits gehen auch durch den Brennpunkt F_a die den Tangentendreiecken $A'''BB''$, $A'''CC''$, BHC, $B''HC''$ umschriebenen Kreise. Nun ist AH ein Durchmesser des Kreises $B''HC''$; somit ist F_a die Propektion von H auf AA'.

Die Brennpunkte F_a, F_b, F_c sind also die Durchschnitte der Schwerlinien mit dem über der Strecke HG als Durchmesser beschriebenen Kreise.

5. Dieser Kreis trifft die Höhen in drei homologen Punkten H_a, H_b, H_c der Reihen (α), (β), (γ); denn die Geraden GH_a, GH_b, GH_c sind zu BC, CA, AB parallel und folglich ist $A''H_a = \frac{1}{3}A''A$ u. s. w. Hieraus schliefst man, dafs die Geraden H_bH_c, H_cH_a, H_aH_b resp. die Parabeln P_a, P_b, P_c berühren.

6. Die Dreiecke $H_aH_bH_c$ und ABC, sowie auch $F_aF_bF_c$ und das Schwerliniendreieck (dessen Seiten zu AA', BB', CC' parallel sind) sind einander ähnlich, aber ungleichwendig. Die Geraden H_aF_a, H_bF_b, H_cF_c sind Symmedianen der beiden Dreiecke $H_aH_bH_c$, $F_aF_bF_c$ und treffen sich in einem und demselben Punkte K'.

Um diesen hübschen Satz von Brocard zu beweisen, genügt es, die Winkel an den Scheiteln dieser Dreiecke mit den Winkeln des Büschels $G(H_aH_bH_cABC)$ zu vergleichen; z. B. ist der Winkel $F_aH_aH_b = F_aGH_b = GAC = BAK$.

7. Hier schalten wir einen wenig bekannten Hilfssatz ein.

Sind in derselben Ebene drei gleichwendig ähnliche Gebilde gegeben, so giebt es drei (positive oder negative) *Massen, welche, an irgend drei homologen Punkten angebracht, immer denselben Schwerpunkt haben.*

Zum Beweise betrachten wir zwei beliebige Dreiecke LMN, $L'M'N'$. Der Schwerpunkt Q, der mit den Massen λ, μ, ν behafteten Punkte L, M, N wird gefunden, indem man die Strecke MN nach dem Verhältnisse $\nu : \mu$ im Punkte P, dann die Strecke PL nach dem Verhältnis $\lambda : \nu + \mu$ teilt. Rückt die Masse λ von L nach L', so rückt Q auf einer zu LL' parallelen Linie nach Q', und

$$QQ' = \frac{\lambda}{\lambda + \mu + \nu} LL'.$$

Versetzt man noch die Masse μ von M nach M', dann die Masse ν

Digitized by Google

von N nach N', so rückt der Schwerpunkt von Q' nach Q'' auf einer zu MM' parallelen Linie, dann von Q'' nach Q''' auf einer zu NN' parallelen Linie, und

$$Q'Q'' = \frac{\mu}{\lambda+\mu+\nu} \cdot MM', \quad Q''Q''' = \frac{\nu}{\lambda+\mu+\nu} NN'.$$

Fällt nun Q''' mit Q zusammen, so hat man ein Dreieck $QQ'Q''$, dessen Seiten zu LL', MM', NN' parallel und den Produkten $\lambda \cdot LL'$, $\mu \cdot MM'$, $\nu \cdot NN'$ proportional sind. Nennt man also l, m, n die Geraden LL', MM', NN' in Gröfse und Richtung, so kann man setzen:

$$\lambda l : \mu m : \nu n = \sin mn : \sin nl : \sin lm,$$

oder auch

$$\lambda : \mu : \nu = mn \sin(mn) : nl \sin(nl) : lm \sin(lm).$$

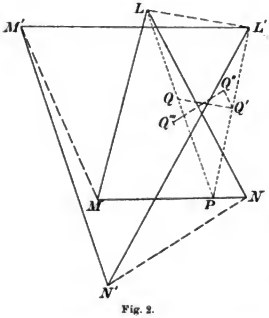


Fig. 2.

Die Scheitel der zwei Dreiecke LMN, $L'M'N'$ haben somit denselben Schwerpunkt Q für drei Massen, welche sich verhalten wie die Inhalte von drei Dreiecken $XM''N''$, $XN''L''$, $XL''M''$, deren Seiten XL'', XM'', XN'' parallel und proportional zu den Verbindungsgeraden LL', MM', NN' sind.

Sind LMN, $L'M'N'$ zwei Tripel entsprechender Punkte von drei ähnlichen Gebilden, so stehen die Geraden LL', MM', NN' in konstanten Verhältnissen und bilden zu je zwei konstante Winkel; die Hilfsfigur $XL''M''N''$ hat somit eine beständige Form.

Obiger Satz ist also bewiesen.

8. Ersetzt man die Dreiecke LMN, $L'M'N'$ durch die Dreiecke ABC, $A''B''C''$, so sind die Linien XL'', XM'', XN'' den Höhen AA'', BB'', CC'' gleich in Gröfse und Richtung, und man findet leicht, dafs die Massen, für welche die Punkttripel ABC, $A''B''C''$ denselben Schwerpunkt haben, gleich a^2, b^2, c^2 gesetzt werden können. Folglich ist auch das Symmedianzentrum K der Schwerpunkt von jedem Tripel $\alpha\beta\gamma$ der ähnlichen Punktreihen (α), (β), (γ) für die Massen a^2, b^2, c^2.

Da das Dreieck $H_aH_bH_c$ dem Grunddreiecke ABC ungleichwendig ähnlich ist, so ist K das Ähnlichkeitszentrum und auch der gemeinsame Schnitt der Geraden H_aF_a, H_bF_b, H_cF_c.

Digitized by Google

9. Eine den Parabeln P_a, P_b gemeinsame Tangente t schneidet die Höhen in drei homologen Punkten T_a, T_b, T_c der Punktreihen (α), (β), (γ); folglich berührt sie auch die Parabel P_c und geht durch den Schwerpunkt K der Massen a^2, b^2, c^2, wenn man diese an die Punkte T_a, T_b, T_c anbringt.

Hieraus fließt, daß die drei Parabeln zwei gemeinschaftliche Tangenten t, t' haben, welche von dem Durchschnitte K der drei Leitlinien ausgehen und somit rechtwinkelig sind.

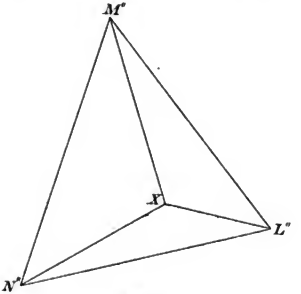


Fig. 3.

Diese Tangenten t, t' sind die Halbierungslinien des Winkels AKH_a und seines Nebenwinkels; denn letztere als Doppellinien der ungleichwendig ähnlichen Gebilde, in welchen die Dreiecke $H_aH_bH_c$, ABC sich entsprechen, teilen die Verbindungsgeraden H_aA, H_bB, H_cC von Paaren homologer Punkte in dem Ähnlichkeitsverhältnisse. Homologe Längen der beiden Dreiecke sind nun aber die Durchmesser HG, MN der umschriebenen Kreise; wir bezeichnen hier mit M, N die Eckpunkte des nach der Geraden HG gerichteten Durchmessers des Kreises ABC.

Aus den Gleichungen

$$\frac{AT_a}{T_aH_a} = \frac{AT_a'}{H_aT_a''} = \frac{MN}{HG}$$

leitet man ab:

$$\frac{AT_a}{T_aA''} = \frac{MN}{HN}, \quad \frac{AT_a'}{A''T_a'} = \frac{MN}{MH},$$

wo T_a' der Durchschnitt von AA'' mit t' ist und $MH < HN$.

10. Die Kollineationsachse der Dreiecke ABC, $\alpha\beta\gamma$ umhüllt eine Parabel P, welche die Seiten des Grunddreiecks und die gemeinsamen Tangenten t, t' von P_a, P_b, P_c berühren. Die Leitlinie ist HK, denn H ist das Höhenzentrum des Tangentendreiecks ABC, und K ist der Schnittpunkt von zwei rechtwinkeligen Tangenten. Der Brennpunkt F ist bestimmt durch den Umkreis ABC und die Gerade, welche isogonal zu dem von A auf HK gefällten Lote ist.

Lüttich, den 23. Februar 1901.

Digitized by Google

Räumliche geometrische Verwandtschaften und Systeme.

Von H. GURADZE in Berlin.

I.

1. Im dreidimensionalen Raume seien drei windschiefe gerade Linien f_1, f_2, f_3 gegeben. Ist dann P ein beliebiger Punkt des Raumes, so fälle ich die Lote von P auf bez. f_1, f_2, f_3. Die Verbindungsebene E der drei Fufspunkte dieser Lote ordne ich dem P zu. Es entspricht jedem Punkte P des Raumes im allgemeinen eine bestimmte Ebene E. Durchläuft P eine Gerade g, so beschreiben die Ebenen E den Torsus der Schmiegungsebenen einer räumlichen kubischen Parabel.

Denn die Punktreihen auf f_1, f_2, f_3 werden projektiv, indem drei derartige Punkte sich entsprechen, dafs die in ihnen auf bez. f_1, f_2, f_3 errichteten senkrechten Ebenen sich auf g schneiden; die unendlich fernen Punkte von f_1, f_2, f_3 entsprechen einander. So führt jede Gerade g des Raumes zu einer die f_1, f_2, f_3 als Schmiegungsachsen besitzenden kubischen Parabel, und man gelangt auf diese Weise zu allen derartigen Kurven. Den Punkten einer Ebene E entspricht eine Fläche 3. Klasse, auf welcher die drei Geraden f_1, f_2, f_3 liegen, und unter deren Berührungsebenen sich die unendlich ferne Ebene befindet; letztere berührt die Fläche längs der unendlich fernen Geraden von E.

2. Wir wollen jetzt darthun, dafs die Punkte, welche mit ihren entsprechenden Ebenen inzidieren, im wesentlichen, d. h. abgesehen von den Punkten der unendlich fernen Ebene, eine Fläche 3. Ordnung bilden.

Ist nämlich g irgend eine Gerade, so entsteht auf ihr folgende Zuordnung: einem beliebigen Punkte P von g entspricht eine Ebene E, welche g in P_1 schneidet; so wird jedem P von g ein P_1 zugewiesen; umgekehrt entsprechen jedem P_1 drei Punkte P; denn aus P_1 gehen an die kubische Parabel, die die allen Punkten von g entsprechenden Ebenen (nach 1.) umschmiegen, drei Schmiegungsebenen, denen ihrerseits drei Punkte P auf g entsprechen. Mithin entsteht auf g eine Verwandtschaft (3, 1) mit vier Koinzidenzen. Von der so erhaltenen Fläche 4. Ordnung spaltet sich die unendlich ferne Ebene ab, und *es bleibt als eigentlicher Ort der Punkte, die mit ihren entsprechenden Ebenen inzidieren, eine Fläche 3. Ordnung F^3 übrig.* Auf ihr liegen die drei gegebenen Geraden f_1, f_2, f_3, sowie die gemeinsamen Senkrechten je zweier von ihnen.

Digitized by Google

Diejenigen Punkte, denen ein ganzer Ebenenbüschel entspricht, sind keine anderen, als die Schnittpunkte der jeweiligen drei senkrechten Ebenen auf bez. f_1, f_2, f_3 in den Schnittpunktetripeln der Treffgeraden von f_1, f_2, f_3; sie bilden also eine (auf unserer F^3 gelegene) kubische Raumkurve R^3.

3. Sind vier windschiefe Geraden f_1, f_2, f_3, f_4 gegeben, so bilden die Punkte von der Beschaffenheit, dafs die Fufspunkte der vier Senkrechten aus ihnen auf f_1, f_2, f_3, f_4 in einer Ebene liegen, im wesentlichen eine Fläche 3. Ordnung. Denn auf einer beliebigen Geraden g entsteht folgende Zuordnung. Ist P irgend ein Punkt von g, so entspricht ihm hinsichtlich f_1, f_2, f_3 nach der in **1.** angegebenen Weise eine Ebene E; von dem Schnittpunkte dieser Ebene mit f_4 fälle ich das Lot auf g und ordne seinen Fufspunkt P_1 dem P zu. Jedem P entspricht also ein P_1. Umgekehrt hat P_1 drei zugeordnete Punkte. Ich fälle nämlich aus P_1 auf f_4 die Senkrechte; von ihrem (auf f_4 gelegenen) Fufspunkte gehen drei Schmiegungsebenen an die der Geraden g hinsichtlich f_1, f_2, f_3 nach **1.** zugewiesenen Raumkurve 3. Klasse; die drei Punkte P auf g, zu denen diese drei Schmiegungsebenen gehören, sind die dem P_1 entsprechenden. So entsteht auf g eine Verwandtschaft (3, 1) mit vier Koinzidenzen. Wir gelangen mithin zu einer Fläche 4. Ordnung; von ihr spaltet sich die unendlich ferne Ebene ab, und *es ergiebt sich als eigentlicher Ort der Punkte von der Art, dafs die Senkrechten aus ihnen auf f_1, f_2, f_3, f_4 diese Geraden in vier Punkten einer Ebene schneiden, eine Fläche 3. Ordnung* F_1^3.

Auf dieser F_1^3 liegt die kubische Raumkurve R^3 der Punkte, denen hinsichtlich f_1, f_2, f_3 ein ganzer Ebenenbüschel entspricht; ebenso diejenige kubische Raumkurve, für deren Punkte dasselbe hinsichtlich f_2, f_3, f_4 gilt, u. s. w.

4. Unsere beiden Flächen 3. Ordnung F^3 und F_1^3 haben aufser der R^3 noch eine Raumkurve 6. Ordnung gemeinschaftlich, den Ort derjenigen Punkte, die mit den Fufspunkten der aus ihnen auf f_1, f_2, f_3, f_4 gefällten Lote in einer Ebene liegen.

5. Der Ort der Punkte von der Art, dafs die Fufspunkte der aus ihnen auf fünf beliebige windschiefe Geraden gefällten Senkrechten in einer Ebene liegen, ist die Grundkurve eines Büschels von Flächen 3. Ordnung.

II.

1. Ist g_1 irgend eine Gerade und P ein beliebiger Punkt des Raumes, und suchen wir eine Gerade g von der Beschaffenheit, dafs das zwischen g und g_1 befindliche Stück der durch P gehenden Treff-

Digitized by Google

geraden von g und g_1 in P halbiert wird, so sind die Geraden g die Treffgeraden einer bestimmten weiteren Geraden t, die wir folgendermaßen erhalten. In der durch g_1 und P gehenden Ebene verbinden wir alle Punkte $\mathfrak{P}$ von g_1 mit P und verlängern die so gewonnenen Strahlen jedesmal über P hinaus um $\mathfrak{P}P$; die Endpunkte bilden dann eine zu g_1 parallele Gerade h. Wir bezeichnen von jetzt ab eine so erhaltene Gerade mit (P, g_1). Sie ist also die zu P und g_1 gehörige Gerade von der Beschaffenheit, daß, wenn g irgend eine Treffgerade von (P, g_1) bedeutet, das zwischen g und g_1 befindliche Stück der durch P gehenden Treffgeraden von g und g_1 in P halbiert wird.

2. Sind zwei windschiefe Geraden g_1, g_2 gegeben, so ist bekanntlich der Ort der Mittelpunkte der durch sie auf ihren Treffgeraden ausgeschnittenen endlichen Strecken eine zu g_1 und g_2 parallele Ebene E_{g_1, g_2}.

3. *Satz:* Sind drei windschiefe Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, so giebt es einen und nur einen im Endlichen gelegenen Punkt $P_{g_1 g_2 g_3}$ von der Art, daß das Stück der von ihm ausgehenden Treffgeraden je zweier der drei Geraden zwischen diesen beiden Geraden in ihm halbiert wird.

Beweis. Einmal ist $P_{g_1 g_2 g_3}$ der Schnittpunkt der drei Ebenen E_{g_1, g_2}, E_{g_2, g_3}, E_{g_3, g_1}; ferner liegt $P_{g_1 g_2 g_3}$ ersichtlich in den drei Ebenen, die wir erhalten, wenn wir je eine der drei Geraden mit der zu ihr parallelen Treffgeraden der beiden übrigen verbinden.

4. Drei windschiefe Geraden g_1, g_2, g_3 führen also zu einem bestimmten Punkte $P_{g_1 g_2 g_3}$. Das System der drei Geraden und des Punktes enthält eine 12-fache Willkürlichkeit. Wir wollen es nun auf andere Weise herstellen.

a) Gegeben sei g_1, g_2, ferner $P_{g_1 g_2 g_3}$ in E_{g_1, g_2} sowie E_{g_2, g_3} gehend durch $P_{g_1 g_2 g_3}$ und parallel g_1 und E_{g_3, g_1} gehend durch $P_{g_1 g_2 g_3}$ und parallel g_2. Die fehlende Gerade g_3 trifft $(P_{g_1 g_2 g_3}, g_1)$ und $(P_{g_1 g_2 g_3}, g_2)$; außerdem geht sie ersichtlich durch den unendlich fernen Punkt der Schnittgeraden von E_{g_1, g_2} und E_{g_2, g_3}. Hierdurch ist g_3 eindeutig bestimmt.

b) Die Data des Systemes seien g_1, $P_{g_1 g_2 g_3}$, ferner E_{g_1, g_2} parallel g_1, E_{g_2, g_3} ebenso, weiter E_{g_3, g_1}, alle drei durch $P_{g_1 g_2 g_3}$ gehend, und endlich eine Gerade g, welche g_2 treffen soll.

Dann ist g_2 die Treffgerade von $(P_{g_1 g_2 g_3}, g_1)$ und g aus dem unendlich fernen Punkte der Schnittlinie von E_{g_1, g_2} und E_{g_2, g_3}. Die Gerade g_3 ist jetzt nach a) zu finden.

Digitized by Google

5. Liegen vier windschiefe Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 vor, so führen sie zu vier Punkten: $P_{g_1 g_2 g_3}$, $P_{g_2 g_3 g_4}$, $P_{g_3 g_4 g_1}$, $P_{g_4 g_1 g_2}$. Die sechs Kanten dieses Tetraeders liegen jede in einer der sechs Ebenen: E_{g_1, g_2}; E_{g_3, g_4}, E_{g_2, g_3}, E_{g_4, g_1}, E_{g_1, g_3}, E_{g_2, g_4}. Denn es mufs z. B. E_{g_1, g_2} durch $P_{g_1 g_2 g_3}$ und $P_{g_1 g_2 g_4}$ gehen.

Das System der vier Geraden und der vier Punkte schliefst eine 16-fache Willkürlichkeit in sich. Wir wenden uns nun zu einigen Fällen seiner Herstellung.

a) Gegeben seien die Geraden g_1, g_2, g_3, ferner $P_{g_2 g_3 g_4}$ in E_{g_2, g_3} und $P_{g_3 g_4 g_1}$ in E_{g_3, g_1}. Die Gerade g_4 mufs $(P_{g_2 g_3 g_4}, g_2)$, $(P_{g_3 g_2 g_4}, g_3)$, $(P_{g_3 g_4 g_1}, g_1)$ und $(P_{g_2 g_4 g_1}, g_3)$ treffen. Da zwei dieser vier Geraden parallel sind, so giebt es nur eine Treffgerade. Die noch fehlenden Punkte sind leicht zu finden.

b) Gegeben seien g_1, g_2, $P_{g_2 g_4 g_1}$, $P_{g_4 g_3 g_4}$ und $P_{g_1 g_3 g_3}$ in E_{g_1, g_3}. Die Gerade g_3 ist die Treffgerade der beiden parallelen Paare $(P_{g_1 g_2 g_3}, g_1)$, $(P_{g_3 g_4 g_1}, g_1)$; $(P_{g_1 g_3 g_3}, g_2)$, $(P_{g_3 g_2 g_4}, g_2)$. Die Gerade g_4 wird nach a) konstruiert.

c) Die Data des Systemes seien g_1, $P_{g_1 g_2 g_3}$, $P_{g_2 g_3 g_4}$, $P_{g_3 g_4 g_1}$ und $P_{g_4 g_1 g_2}$. Dann ist die Ebene E_{g_1, g_2} bekannt, da sie parallel g_1 und durch $P_{g_1 g_2 g_3}$ sowie $P_{g_4 g_1 g_2}$ geht; das Entsprechende gilt von E_{g_3, g_4} und E_{g_1, g_4}. Die Gerade g_2 ist parallel E_{g_1, g_3} und mufs aufserdem $(P_{g_1 g_2 g_3}, g_1)$ und $(P_{g_4 g_1 g_2}, g_1)$ treffen. Da diese Geraden parallel sind, so mufs g_2 in ihrer Ebene E_2 liegen und durch einen bestimmten unendlich fernen Punkt P_2^∞ dieser Ebene gehen, den unendlich fernen Punkt der Schnittgeraden von E_2 mit E_{g_1, g_3}. Soviel vorläufig von g_2.

Die g_3 ist parallel E_{g_1, g_2} und mufs zunächst $(P_{g_1 g_2 g_3}, g_1)$ und $(P_{g_3 g_4 g_1}, g_1)$ treffen. Sie liegt also in einer bestimmten Ebene E_3 und geht durch einen festen unendlich fernen Punkt P_3^∞ dieser Ebene. Ferner mufs g_3 die beiden parallelen Geraden $(P_{g_1 g_2 g_3}, g_2)$ und $(P_{g_3 g_3 g_4}, g_3)$ treffen. Wählen wir nun eine Gerade des Büschels um P_2^∞ in E_{g_1, g_3} als g_2 heraus, die wir $\bar{g}_2$ nennen wollen, so erhalten wir zwei parallele Geraden $(P_{g_1 g_2 g_3}, \bar{g}_2)$ und $(P_{g_3 g_3 g_4}, \bar{g}_2)$. Lassen wir $\bar{g}_2$ den ganzen Büschel um P_2^∞ in E_{g_1, g_3} durchlaufen, so erhalten wir ∞^1 parallele Strahlenpaare $(P_{g_1 g_2 g_3}, \bar{g}_2)$, $(P_{g_3 g_3 g_4}, \bar{g}_2)$ oder zwei projektive Parallelstrahlenbüschel, beide mit demselben unendlich fernen Scheitel P_2^∞. Wir wünschen ein solches Strahlenpaar zu erhalten, dessen Ebene durch P_3^∞ geht. Zu diesem Zwecke projizieren wir den einen der beiden Büschel von P_3^∞ aus in die Ebene des anderen; dann haben wir in dieser Ebene ersichtlich zwei projektive Parallelstrahlenbüschel mit demselben Scheitel P_2^∞. Aufser der unendlich fernen Ge-

Digitized by Google

raden, die wir ausschliefsen, ist nur noch eine Koinzidenz vorhanden. Die so erhaltene Gerade verbinden wir mit P_3^x durch eine Ebene und schneiden diese Ebene mit E_3. Die Schnittlinie ist die gesuchte Gerade g_3. Gleichzeitig haben wir g_2 und damit den Fall a).

Berlin, den 2. November 1901.

Sur les fonctions de Bernoulli à deux variables.

Extrait d'une lettre de M. P. APPELL à M. M. KRAUSE.

Votre intéressant article *Zur Theorie der ultra-bernoullischen Zahlen und Funktionen*[1]) m'a amené à chercher l'extension des polynômes de Bernoulli dans une autre voie que je vous demande la permission de vous indiquer brièvement.

Soient a et b deux constantes réelles ou complexes, x et y deux entiers positifs et n un entier positif: considérons la somme

$$(1) \qquad P_n(x,y) = \sum_{p=1}^{p=x} \sum_{q=1}^{q=y} (pa+qb)^n$$

$$= (a+b)^n + (a+2b)^n + \cdots + (a+yb)^n$$
$$+ (2a+b)^n + (2a+2b)^n + \cdots + (2a+yb)^n$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ (xa+b)^n + (xa+2b)^n + \cdots + (xa+yb)^n.$$

Cette somme peut être appelée un polynôme de Bernoulli à deux variables. Elle s'exprime facilement à l'aide des polynômes de Bernoulli. Soient

$$P_0(x) = x, \quad P_1(x) = \frac{x(x+1)}{2}, \quad \cdots, \quad P_n(x) = 1 + 2^n + \cdots + x^n$$

les polynômes de Bernoulli. On voit immédiatement, en développant chaque terme de la somme (1) par la formule du binôme, que l'on a

$$P_n(x,y) = a^n P_n(x) P_0(y) + \frac{n}{1} a^{n-1} b P_{n-1}(x) P_1(y)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a^{n-2} b^2 P_{n-2}(x) P_2(y) + \cdots + b^n P_0(x) P_n(y),$$

---

1) Abdruck aus den Berichten der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 5. Mai 1902.

Digitized by Google

ce qu'on peut écrire symboliquement

$$P_n(x,y) = \Big(\big(a\,P(x) + b\,P(y)\big)\Big)^n$$

en remplaçant dans le développement P^n par P_n.

Il est facile d'obtenir une fonction génératrice de ces polynômes en multipliant membre à membre les deux développements

$$e^{az}\,\frac{1-e^{nzx}}{1-e^{az}} = P_0(x) + \frac{az}{1}\,P_1(x) + \cdots,$$

$$e^{bz}\,\frac{1-e^{bzy}}{1-e^{bz}} = P_0(y) + \frac{bz}{1}\,P_1(y) + \cdots;$$

le coefficient de $\frac{z^n}{1\cdot 2\cdots n}$ est le polynôme $P_n(x,y)$.

Enfin, supposons que le rapport $\frac{b}{a}$ soit complexe et considérons la fonction $\sigma(z)$ de la variable complexe z construite avec les périodes $2\omega = a$, $2\omega' = b$. L'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int z^n\,\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}\,dz$$

prise sur un contour entourant les pôles

$$pa + qb,$$

$$(p = 1,\ 2,\ \cdots,\ x,\quad q = 1,\ 2,\ \cdots,\ y)$$

est précisément égale à $P_n(x,y)$

Paris, le 9 octobre 1902.

Über die Bernoullischen Funktionen zweier veränderlicher Gröfsen.

Auszug eines Schreibens von Herrn M. Krause an Herrn P. Appell.

... Die von Ihnen eingeführten Funktionen $P_n(x, y)$, welche durch die aufgestellten interessanten und wichtigen Beziehungen zu den elliptischen Funktionen eine besondere Bedeutung erhalten, können in folgender Weise nach Potenzen von x und y entwickelt werden.

Bekanntlich ist:

(1) $$P_m(x) = \frac{1}{m+1}\,(\beta_0\,x^{m+1} + (m+1)_1\,\beta_1\,x^m + (m+1)_2\,\beta_2\,x^{m-1} + \cdots),$$

Digitized by Google

wobei die Größen β_m, von dem Faktor $m!$ abgesehen, die Entwickelungskoeffizienten des Ausdrucks:

$$\frac{z}{1-e^{-z}}$$

nach Potenzen von z sind. Hieraus folgt für die Funktion:

$$P_n(x,y) = \left(a P(x) + b P(y)\right)^n \tag{2}$$

mit leichter Mühe die Darstellung:

$$P_n(x,y) = n! \sum_{r=1}^{r=n+1} \sum_{s=1}^{s=n+1} \frac{a^{r-1} b^{s-1}}{r!\, s!\, (n-r-s+2)!}\, g_{r,s}\, x^r y^s, \tag{3}$$

wobei r und s der Ungleichheit genügen:

$$r + s \leqq n + 2$$

und $g_{r,s}$ den Wert besitzt:

$$g_{r,s} = b^{n-r-s+2}\beta_{n-r-s+2} + (n-r-s+2)_1\, a\, b^{n-r-s+1}\beta_1\beta_{n-r-s+1} + \cdots. \tag{4}$$

Der letzte Ausdruck kann anders gedeutet werden. In der That, setzt man:

$$\frac{az}{1-e^{-az}} \cdot \frac{bz}{1-e^{-bz}} = 1 + \gamma_1 z + \frac{\gamma_2 z^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{\gamma_n z^n}{n!} + \cdots, \tag{5}$$

so findet die einfache Beziehung statt:

$$g_{r,s} = \gamma_{n-r-s+2}, \tag{6}$$

oder also wir erhalten für $P_n(x,y)$ die Darstellung:

$$P_n(x,y) = n! \sum_{r=1}^{r=n+1} \sum_{s=1}^{s=n+1} \frac{a^{r-1} b^{s-1}}{r!\, s!\, (n-r-s+2)!}\, \gamma_{n-r-s+2}\, x^r y^s, \tag{7}$$

$$r + s \leqq n + 2.$$

Die Größen γ können aus ihrer Definitionsgleichung mit Hilfe der Bernoullischen Zahlen berechnet werden, indessen ist es nicht schwer, für sie einfache Rekursionsformeln aufzustellen, welche die direkte Berechnung zulassen. Ich greife die folgende heraus:

Setzt man nach Lucas symbolisch:

$$\frac{az}{1-e^{-az}} \cdot \frac{bz}{1-e^{-bz}} = e^{\gamma z}, \tag{8}$$

Digitized by Google

so folgt für die Gröfsen γ die Rekursionsformel:

$$(9) \qquad (\gamma - a - b)^n - (\gamma - a)^n - (\gamma - b)^n + \gamma^n = 0$$

oder ausgeführt:

$$(10) \begin{cases} 2n_2 ab\gamma_{n-2} - n_3\left((a+b)^3 - a^3 - b^3\right)\gamma_{n-3} \\ + n_4\left(a+b,^4 - a^4 - b^4\right)\gamma_{n-4} \mp \cdot \cdot \pm \left((a+b)^n - a^n - b^n\right) = 0. \end{cases}$$

Hieraus können die Gröfsen γ der Reihe nach berechnet werden. Für die einfachsten Fälle ergiebt sich:

$$\gamma_1 = \frac{a+b}{2}, \quad \gamma_2 = \frac{a^2+b^2}{6} + \frac{ab}{2}, \quad \text{etc.}$$

Setzt man $a = b$, so kommt man zu Gröfsen γ, wie sie von Lucas, Imschenetzky u. a. behandelt worden sind.

Die Definitionsgleichung (8) der Gröfsen γ giebt zu einer anderen symbolischen Darstellung der Funktion $P_n(x,y)$ Anlafs, die vielleicht von Interesse sein dürfte.

Ich schreibe Gleichung (8) in der Form:

$$ab z^2 = e^{(\gamma-a-b)z} - e^{(\gamma-a)z} - e^{(\gamma-b)z} + e^{\gamma z}.$$

Diese Gleichung multipliziere ich der Reihe nach mit:

$$e^{(pa+qb)z}$$

für $p = 1, 2, \cdots, x$, $q = 1, 2, \cdots, y$ und addiere die auf diesem Wege entstehenden Gleichungen. Vergleicht man dann links und rechts die Koeffizienten von z^{n+2}, so erhält man die symbolische Darstellung:

$$(11) \begin{cases} ab\,(n+1)(n+2)\,P_n(x,y) \\ = (\gamma + ax + by)^{n+2} - (\gamma + ax)^{n+2} - (\gamma + by)^{n+2} + \gamma_{n+2}. \end{cases}$$

Wird diese Gleichung ausgeführt, so kommt man zu Gleichung (7) zurück.

Dresden, im Oktober 1902.

Digitized by Google

Ein neues Schliefsungsproblem.

Von PH. MAENNCHEN in Alzey.

Das sogenannte Schliefsungsproblem bei zwei Kegelschnitten lautet: Gelingt es von einem Punkte des Kegelschnitts C aus, demselben ein n-Eck einzubeschreiben, das gleichzeitig einem zweiten Kegelschnitt Γ umbeschrieben ist, so gelingt dies immer, bei welchem Punkte von C man auch beginnen mag.

Dieser Satz läfst sich nach verschiedenen Richtungen hin erweitern. Bekannt ist die Erweiterung auf den Büschel von Kegelschnitten. Für diesen lautet der Ponceletsche Satz[1]):

Wenn sich $n-1$ Seiten eines dem Kegelschnitt F einbeschriebenen Polygons auf Kegelschnitten des Büschels $\lambda F + \varphi$ wälzen, so thut dies auch die n^{te} Seite.

In der vorliegenden Arbeit soll der Satz in der Weise erweitert werden, dafs an die Stelle der geradlinigen Polygone gewisse Kreisbogenpolygone treten. Doch erfährt er auch — wenigstens vorläufig — eine gewisse Einschränkung, indem der Beweis nur für zwei Kreise, nicht aber für zwei beliebige Kegelschnitte geführt wird.

1. Auf einer Kugel nehme ich die Kreise K_1 und K_2 an, die keinen gemeinschaftlichen Punkt haben. Dann wähle ich auf K_1 einen beliebigen Punkt A und ziehe durch diesen Punkt einen Kreis auf derselben Kugel, der K_2 berührt und dessen Ebene durch einen beliebig im Raume gelegenen Punkt P geht. Dieser Kreis schneidet K_1 nochmals in einem Punkte, den ich mit B bezeichne. Nun ziehe ich durch B denjenigen Kreis, der K_2 in der gleichen Weise berührt, wie der zuerst gezeichnete, und dessen Ebene gleichfalls durch P geht. Dieser Kreis schneidet K_1 nochmals in C. In dieser Weise fahre ich fort; dabei können folgende Fälle eintreten:

a) Die Figur schliefst sich nach p Umläufen mit n Bogen.

b) Die Figur schliefst sich nie.

---

1) Vgl. M. Simon: Crelles Journal 81, wo auch die wichtigste Literatur über diesen Gegenstand angegeben ist. (Man vergleiche auch G. Loria: „I poligoni di Poncelet". Torino, 50 S. gr. 8°, 1889; — „Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet". Bibl. math. (2) **3**, 67—74, 1889. Ferner E. Kötter: „Das Ponceletsche Schliefsungsproblem" in der „Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt". S. 149 ff., 1901. Red.)

Digitized by Google

Nun läfst sich der folgende Satz beweisen:

Tritt für den gewählten Punkt A einer der Fälle a) oder b) ein, so tritt derselbe Fall immer ein, wo man auch den Punkt A auf K_1 annehmen mag.

Zum Beweise projiziere ich die ganze Figur von P aus auf die Ebene von K_1. K_1 ist alsdann seine eigene Projektion, die von K_2 ist ein Kegelschnitt, und die des Kreisbogenpolygons ist ein geradliniges Polygon, das K_2 einbeschrieben und der Projektion von K_3 umbeschrieben ist. Für dieses geradlinige Polygon gilt aber der im Eingang der vorliegenden Arbeit zitierte Schliefsungssatz; mithin gilt dieser auch für unser Kreisbogenpolygon.

2. Die Kreise, aus denen sich unser Polygon zusammensetzt, berühren aufser dem Kreise K_2 auch noch einen Kreis K_3 auf der angenommenen Kugel. Denn die Ebenen der Kreise des Polygons hüllen einen Kegel 2. Ordnung ein, und dieser Kegel schneidet die Kugel einmal in einem Kreise, nämlich in K_2; also mufs nach einem bekannten Satze die andere Schnittfigur ebenfalls ein Kreis sein. Auch die Umkehrung gilt: Die Ebenen aller Kreise auf einer Kugel, die zwei auf dieser Kugel angenommene Kreise auf dieselbe Art berühren, gehen durch einen Punkt. Denn zwei Kreise auf einer Kugel liegen stets perspektiv, sogar auf zwei Arten.

Diese bekannten Thatsachen[1]) will ich nun benutzen, um den folgenden Satz zu beweisen:

Beschreibt man einem gegebenen Kreise in der Ebene ein Polygon ein, dessen Seiten Bogen von Kreisen sind, die zwei feste Kreise in dieser Ebene auf dieselbe Art berühren, und schliefst sich die Figur einmal mit n Bogen, so schliefst sie sich immer mit n Bogen, bei welchem Punkte der Peripherie man auch beginnen mag.

Denn bilde ich die beschriebene Figur durch Inversion auf eine Kugel ab, so entseht auf derselben eine Figur, für die ich in **1.** den Schliefsungssatz bewiesen habe. Demnach gilt er auch für die neue Figur in der Ebene.

3. Wir wollen uns jetzt noch von der Einschränkung befreien, dafs die Berührung stets auf dieselbe Art, also entweder bei dem einen der zu berührenden Kreise stets von aufsen oder stets von innen zu erfolgen habe. *Der Schliefsungssatz gilt nämlich auch für den Fall, dafs*

1) Vgl. etwa Baltzer: Elemente der Math., Bd. 2, S. 196 ff. oder Holzmüller: Elemente der Stereometrie, Bd. 1, S. 238 ff.

Digitized by Google

p von den n Bogen auf die eine Art, und die übrigen $n-p$ Bogen auf die andere Art berühren, und zwar ist die Reihenfolge, in der diese Berührungen stattfinden, vollkommen willkürlich.

Zum Beweise bilde ich zunächst wieder die Figur durch Inversion auf eine Kugel ab. Die Kreise auf der Kugel, welche auf die eine Art berühren, hüllen nun einen Kegel mit der Spitze P, die der andern Art einen solchen mit der Spitze P' ein. Projiziere ich die ersteren von P aus, die letzteren von P' aus auf die Ebene des Kreises K, dem das Polygon einbeschrieben ist, so entsteht ein geradliniges Polygon, das dem Kreise K einbeschrieben ist, und dessen Seiten bald Tangenten an den Kegelschnitt C, bald solche an den Kegelschnitt C' sind. C ist die Projektion des berührten Kreises von P aus, C' die desselben Kreises von P' aus auf die Ebene von K.

Der Kreis K und die beiden Kegelschnitte C und C' gehören aber einem und demselben Büschel an. Denn die Kegel mit den Spitzen P und P' bestimmen einen Büschel von Flächen 2. Ordnung, dem auch die gewählte Kugel angehört. K, C und C' liegen auf einem ebenen Schnitt durch diesen Büschel; folglich gehören sie selbst einem Büschel an.

Wir können also auch sagen: Von den Seiten des dem Kreise K einbeschriebenen geradlinigen Polygons wälzen sich p Seiten auf C und die übrigen $n-p$ Seiten auf C'; und da K, C und C' einen Büschel bilden, zeigt das Polygon stets diese Eigenschaft, von welchem Punkte auf K man auch ausgehen mag.

Die Seiten, die sich auf C wälzen, sind aber die Bilder der Kreisbogen von der einen Art, und die Seiten, die sich auf C' wälzen, sind die Bilder der Kreisbogen von der andern Art. Mithin gilt unser Satz auch in der Form, wie er im Eingang dieser Nummer ausgesprochen wurde.

Alzey, den 11. Februar 1902.

Digitized by Google

Neue Beiträge zur Dreiecksgeometrie.

Von G. Majcen in Agram.

Die in meinem Aufsatz: „Über gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie[1]) behandelten zwei Geraden α_1, α_2 zeigen einige merkwürdige Beziehungen zu den bereits bekannten besonderen Dreiecksgebilden. Im folgenden füge ich einige neue Sätze hinzu, welche auf synthetischem Wege gewonnen wurden.

Die Bezeichnung stimmt mit der im genannten Aufsatz überein. Man sehe dortselbst auch die Fig. 6.

1. Der Schnittpunkt M von α_1 und α_2 ist der Lemoinesche Punkt von ABC.

2. Die Mitten der sechs Strecken AA_1, AA_2; BB_1, BB_2; CC_1, CC_2 seien A_1', A_2'; ..., C_2'. Es liegen A_1', B_1', C_1' auf einer Geraden β_1, und A_2', B_2', C_2' auf einer Geraden β_2. Der Schnittpunkt von β_1 und β_2 ist ebenfalls der Lemoinesche Punkt.

3. Die Fufspunkte und die Mitten je eines zusammengehörigen Paares jener sechs Strecken liegen auf je einem Kreis, der durch den Lemoineschen Punkt geht.

4. Die Geraden α_1 und β_2, ebenso α_2 und β_1 bilden *denselben* Winkel ω, unter welchem die sechs Strecken gegen die Dreiecksseiten gezogen werden mufsten, um die zwei Geraden α_1 und α_2 zu liefern.

5. Die Verbindungslinien A_2A_1', B_2B_1', C_2C_1' gehen durch das Kollineationszentrum II, die anderen drei A_1A_2', B_1B_2', C_1C_2' durch I.

6. Die Geraden β_1 und β_2 schneiden eine jede Seite von ABC in *isotomischen* Punkten.

7. Die drei Kreise, welche aus den Eckpunkten A, B, C mit den von diesen ausgehenden Strecken (AA_1 oder AA_2 etc.) als Radien beschrieben werden, haben ihr Radikalzentrum im Lemoineschen Punkt.

8. Der Umkreis von ABC bestimmt mit den drei Kreisen (in Nummer 7) drei Radikalachsen, welche sämtlich durch den Lemoineschen Punkt gehen.

Man findet auf analytischem Wege:

$$\cos\omega = \sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Agram, den 25. September 1902.

1) Dieses Archiv (3) **4**, 76.

Digitized by Google

Die Grundgleichungen einer beliebigen Mannigfaltigkeit.

Von H. KÜHNE in Dortmund.

Die Fundamentalgleichungen einer Fläche sind auf die sogenannten Hyperflächen verallgemeinert worden[1]), und die Frenetschen Grundformeln für eine Raumkurve haben durch Herrn Landsberg[2]) eine Erweiterung auf die Kurven in einer beliebigen ebenen n-fachen Mannigfaltigkeit erfahren. Die vorliegende Arbeit leitet die *Grundgleichungen für eine beliebige ν-fache Mannigfaltigkeit M_ν, die in einer ebenfalls beliebigen n-fachen Mannigfaltigkeit M_n verläuft*, ab. Die Formeln, die so erhalten werden, umfassen die genannten Fälle als Spezialfälle. Diese Grundgleichungen ergeben sich aus allgemeinen Identitäten, die im ersten Abschnitt abgeleitet werden sollen. Der zweite Abschnitt spezialisiert die allgemeinen Identitäten zu den Grundgleichungen der M_ν. Der dritte Abschnitt behandelt die besonderen Fälle.

Im folgenden sollen die Zeiger

$$\begin{aligned} h, i, j, k, l &\text{ stets die Reihe } 1, \ldots, n, \\ f, g, m, p, q &\quad \text{„ } \quad \text{„ } \quad \text{„ } \quad 1, \ldots, \nu, \\ r, s, t &\quad \text{„ } \quad \text{„ } \quad \text{„ } \quad \nu+1, \ldots, n \end{aligned}$$

durchlaufen. Für die M_n sei das Quadrat des Linienelementes gegeben durch die quadratische Differentialform

$$C = \sum_{hi} c_{hi}\, dx_h\, dx_i,$$

und zur M_ν gehöre die Differentialform

$$A = \sum_{fg} a_{fg}\, dy_f\, dy_g,$$

die unter gewissen Voraussetzungen ebenfalls für M_ν das Quadrat des Linienelementes angiebt. Die M_ν wird also dadurch in der M_n bestimmt, dafs die x_h Funktionen der y_f sind. Die c_{hi} werden als gegebene Funktionen der x_h und die a_{fg} als gegebene Funktionen der

1) Man vergl. Bianchi: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899, S. 600 ff.

2) Journal für Math., **114.**

Digitized by Google

y_f vorausgesetzt. Die Christoffelschen 3- und 4-Indices-Symbole[1]) bezeichne ich in folgender Weise:

$$\left[\begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix}\right]_c = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial c_{hl}}{\partial x_k} + \frac{\partial c_{hk}}{\partial x_l} - \frac{\partial c_{kl}}{\partial x_h}\right),$$

$$\left\{\begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix}\right\}_c = \sum_i \left[\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right]_c \gamma_{hi}, \quad \left[\begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix}\right]_c = \sum_i \left\{\begin{matrix} k\,l \\ i \end{matrix}\right\}_c c_{hi},$$

$$\left\{\begin{matrix} h\,i \\ k\,l \end{matrix}\right\}_c = \frac{\partial}{\partial x_i}\left\{\begin{matrix} h\,k \\ i \end{matrix}\right\}_c - \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\begin{matrix} h\,l \\ i \end{matrix}\right\}_c + \sum_j \left(\left\{\begin{matrix} h\,k \\ j \end{matrix}\right\}_c \left\{\begin{matrix} j\,l \\ i \end{matrix}\right\}_c - \left\{\begin{matrix} h\,l \\ j \end{matrix}\right\}_c \left\{\begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix}\right\}_c\right),$$

$$\left(\begin{matrix} h\,i \\ k\,l \end{matrix}\right)_c = \sum_j c_{ij}\left\{\begin{matrix} h\,j \\ k\,l \end{matrix}\right\}_c, \quad \left\{\begin{matrix} h\,i \\ k\,l \end{matrix}\right\}_c = \sum_j \gamma_{ij}\left(\begin{matrix} h\,j \\ k\,l \end{matrix}\right)_c;$$

dabei bedeutet (γ_{hi}) das reziproke System zu (c_{ih}). Schliefslich mache ich hier gleich auf eine Operation aufmerksam, die im folgenden öfter vorkommen wird. Ich setze

$$\frac{\partial u_h}{\partial y_f} + \sum_{ki}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix}\right\}_c u_k \frac{\partial x_i}{\partial y_f} = D_f u_h.$$

Diese Operation ist eine Art kovarianter Differentiation; allerdings entspricht sie nicht vollständig der von Ricci[2]) aufgestellten Definition. Wir kommen nachher genauer darauf zurück.

1. *Die allgemeinen Identitäten.* — Es sei (x_{hk}) ein System von n^2 Gröfsen, sämtlich Funktionen der y_f. Ihre Determinante sei von 0 verschieden. Das zu (x_{hk}) reziproke System sei (ξ_{hk}); dann bestehen also die Gleichungen

$$(1) \qquad \sum_k x_{hk}\xi_{ki} = \sum_k \xi_{hk}x_{ki} = \delta_{hi} \qquad \left(\delta_{hi} = \begin{cases} 1 & h = i \\ 0 & h \neq i \end{cases}\right).$$

Aus den Systemen (c_{hi}) und (x_{hi}) komponieren wir ein System (a_{hi}) in der Weise:

$$(2) \qquad \sum_{hi} c_{hi}x_{hj}x_{ik} = a_{jk}.$$

Dieses System (a_{hi}) ist vorläufig noch verschieden von dem in der Einleitung angegebenen System (a_{fg}). Das zu (a_{hi}) reziproke System sei (α_{ih}). Es sei noch bemerkt, dafs die Systeme (c), (γ), (a), (α) symmetrisch sind, während das mit (x) und (ξ) nicht der Fall ist.

Es werden also, um es noch einmal hervorzuheben, die c_{hi} und γ_{hi} als Funktionen der x_h, diese, die x_{hi} und die a_{hi} als Funktionen der y_f betrachtet.

1) Journal für Math., **70**. Man vergl. auch Bianchi, S. 49.
2) Darboux Bull. (2) **16**, 175.

Digitized by Google

Wir differentiieren die Gleichungen (2), so kommt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_f} &= \sum_{hi} c_{hi}\Big(x_{ik}\frac{\partial x_{hj}}{\partial y_f} + x_{hj}\frac{\partial x_{ik}}{\partial y_f}\Big) + \sum_{hil}\frac{\partial c_{hi}}{\partial x_l}x_{ik}x_{hj}\frac{\partial x_l}{\partial y_f}\\
&= \sum_{hi} c_{hi}x_{ik}\frac{\partial x_{hj}}{\partial y_f} + \sum_{h_1 il}\begin{bmatrix} h_1 l \\ i \end{bmatrix}_c x_{ik}x_{h_1 j}\frac{\partial x_l}{\partial y_f}\\
&+ \sum_{hi} c_{hi}x_{hj}\frac{\partial x_{ik}}{\partial y_f} + \sum_{hi_1 l}\begin{bmatrix} i_1 l \\ h \end{bmatrix}_c x_{i_1 k}x_{hj}\frac{\partial x_l}{\partial y_f}\\
&= \sum_{hi} c_{hi}x_{ik}\Big[\frac{\partial x_{hj}}{\partial y_f} + \sum_{h_1 l}\begin{Bmatrix} h_1 l \\ h \end{Bmatrix}_c x_{h_1 j}\frac{\partial x_l}{\partial y_f}\Big]\\
&+ \sum_{hi} c_{hi}x_{hj}\Big[\frac{\partial x_{ik}}{\partial y_f} + \sum_{i_1 l}\begin{Bmatrix} i_1 l \\ i \end{Bmatrix}_c x_{i_1 k}\frac{\partial x_l}{\partial y_f}\Big]\\
&= \sum_{hi} c_{hi}x_{ik}D_f x_{hj} + \sum_{hi} c_{hi}x_{hj}D_f x_{ik}.
\end{aligned}$$

Nun setze ich

$$\sum_{hi} c_{hi}x_{ik}D_f x_{hj} = [jfk], \tag{3}$$

so wird

$$\frac{\partial a_{jk}}{\partial y_f} = [jfk] + [kfj]. \tag{4}$$

Aus (2) folgt

$$\sum_{hij} c_{hi}x_{hj}x_{ik}\xi_{ji} = \sum_j a_{jk}\xi_{ji},$$

also

$$\sum_i c_{ii}x_{ik} = \sum_i a_{ik}\xi_{ii}.$$

Mithin wird

$$[jfk] = \sum_{hi} a_{ik}\xi_{ih}D_f x_{hj}.$$

Daraus ergiebt sich wieder

$$D_f x_{hj} = \sum_{lk}[jfl]\alpha_{ik}x_{hk}.$$

Setzen wir noch

$$\sum_l [jfl]\alpha_{ik} = (jfk), \tag{5}$$

so wird schliefslich

$$D_f x_{hj} = \sum_k (jfk)x_{hk}. \tag{6}$$

Diese Gleichungen bilden ein System von Differentialgleichungen für die n^2 Gröfsen x_{hi}. Als gegeben sind hierbei die (jfk) als Funktionen

Digitized by Google

der y_f und die c_{hi} als Funktionen der x_h anzusehen. Die x_h können als Funktionen der y_f gegeben sein, aber sie können auch durch Bedingungen mit den Unbekannten x_{hi} verknüpft sein und damit erst selber noch bestimmt werden. —

Das Bestehen der Gl. (6) erfordert gewisse Bedingungen, die sich aus

$$\frac{\partial}{\partial y_g}\left(\frac{\partial x_{hi}}{\partial y_f}\right) = \frac{\partial}{\partial y_f}\left(\frac{\partial x_{hi}}{\partial y_g}\right)$$

ergeben.

Sie sollen jetzt abgeleitet werden. Die Gleichungen (6) lauten anders geschrieben:

$$\frac{\partial x_{hi}}{\partial y_f} = \sum_k (ifk) x_{hk} - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c x_{ki} \frac{\partial x_l}{\partial y_f}. \tag{6'}$$

Daraus folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_{hi}}{\partial y_f \partial y_g} = & \sum_k (ifk) \frac{\partial x_{hk}}{\partial y_g} + \sum_k x_{hk} \frac{\partial (ifk)}{\partial y_g} - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c \frac{\partial x_{ki}}{\partial y_g} \frac{\partial x_l}{\partial y_f} \\ & - \sum_{klj} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c x_{ki} \frac{\partial x_l}{\partial y_f} \frac{\partial x_j}{\partial y_g} - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c x_{ki} \frac{\partial^2 x_l}{\partial y_f \partial y_g}. \end{aligned}$$

Vertauscht man hierin f mit g und subtrahiert die entstehende Gleichung von dieser Gleichung, so erhält man unter Benutzung der Gl. (6):

$$\begin{aligned} 0 = & - \sum_{kl} [(ifk)(kgl) - (igk)(kfl)] x_{hl} \\ & + \sum_{klk'} \left[(ifk) \frac{\partial x_l}{\partial y_g} - (igk) \frac{\partial x_l}{\partial y_f} \right] \left\{ \begin{matrix} k'\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c x_{k'k} \\ & + \sum_k \left[\frac{\partial (ifk)}{\partial y_g} - \frac{\partial (igk)}{\partial y_f} \right] x_{hk} \\ & - \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c \left[\frac{\partial x_l}{\partial y_f} \sum_{k'} (igk') x_{kk'} - \frac{\partial x_l}{\partial y_g} \sum_{k'} (ifk') x_{kk'} \right. \\ & \left. - \frac{\partial x_l}{\partial y_f} \sum_{k'l'} \left\{ \begin{matrix} k'\,l' \\ k \end{matrix} \right\}_c x_{k'i} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_g} + \frac{\partial x_l}{\partial y_g} \sum_{k'l'} \left\{ \begin{matrix} k'\,l' \\ k \end{matrix} \right\}_c x_{k'i} \frac{\partial x_{l'}}{\partial y_f} \right] \\ & - \sum_{jkl} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} k\,j \\ h \end{matrix} \right\}_c \right] x_{ki} \frac{\partial x_l}{\partial y_f} \frac{\partial x_j}{\partial y_g}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = & - \sum_k x_{hk} \left[\frac{\partial (ifk)}{\partial y_g} - \frac{\partial (igk)}{\partial y_f} + \sum_l [(ifl)(lgk) - (igl)(lfk)] \right] \\ & - \sum_{jkl} x_{ki} \frac{\partial x_l}{\partial y_f} \frac{\partial x_j}{\partial y_g} \left[\frac{\partial}{\partial y_j} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \begin{matrix} k\,j \\ h \end{matrix} \right\}_c + \sum_{l'} \left[\left\{ \begin{matrix} k\,l \\ l' \end{matrix} \right\}_c \left\{ \begin{matrix} l'\,j \\ h \end{matrix} \right\}_c - \left\{ \begin{matrix} k\,j \\ l' \end{matrix} \right\}_c \left\{ \begin{matrix} l'\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c \right] \right]. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Wir setzen nun

$$(7) \qquad \frac{\partial(ifk)}{\partial y_g} - \frac{\partial(igk)}{\partial y_f} + \sum_l \begin{vmatrix} (ifl), & (igl) \\ (lfk), & (lgk) \end{vmatrix} = [ikfg],$$

so nimmt die Gleichung die Gestalt an:

$$0 = \sum_k x_{hk}[ikfg] - \sum_{jkl} \begin{Bmatrix} kh \\ lj \end{Bmatrix}_c x_{ki} \frac{\partial x_l}{\partial y_f} \frac{\partial x_j}{\partial y_g}.$$

Wir setzen weiter

$$(8) \qquad \sum_k a_{ki}[ikfg] = (ilfg),$$

also

$$[ikfg] = \sum_l \alpha_{kl}(ilfg),$$

so lautet die Gleichung

$$0 = \sum_{kl} x_{hk}\alpha_{kl}(ilfg) - \sum_{jkll'} \begin{pmatrix} kl' \\ lj \end{pmatrix}_c x_{ki} \frac{\partial x_l}{\partial y_f} \frac{\partial x_j}{\partial y_g} \gamma_{l'h};$$

daraus folgt

$$0 = (ilfg) - \sum_{hjkll'r'k'} \begin{pmatrix} kl' \\ r'j \end{pmatrix}_c \frac{\partial x_{r'}}{\partial y_f} \frac{\partial x_j}{\partial x_g} \gamma_{kl'} x_{ki} \xi_{k'h} a_{lk'},$$

$$0 = (ilfg) - \sum_{hjkk'l'r'} \begin{pmatrix} kl' \\ r'j \end{pmatrix}_c \frac{\partial x_{r'}}{\partial y_f} \frac{\partial x_j}{\partial y_g} \gamma_{kl'} x_{ki} c_{hk'} x_{k'l},$$

$$0 = (ilfg) - \sum_{jkl'r'} \begin{pmatrix} kl' \\ r'j \end{pmatrix}_c \frac{\partial x_{r'}}{\partial x_f} \frac{\partial x_j}{\partial y_g} x_{ki} x_{l'l},$$

sodafs wir schliefslich mit etwas anderer Bezeichnung erhalten:

$$(9) \qquad 0 = (hifg) - \sum_{k'i'kl} \begin{pmatrix} k'i' \\ kl \end{pmatrix}_c x_{k'h} x_{i'i} \frac{\partial x_k}{\partial y_f} \frac{\partial x_l}{\partial y_g}.$$

Wegen der alternierenden Eigenschaft der Christoffelschen Symbole gilt dieselbe Eigenschaft auch für die Symbole $(hifg)$. Es ist also

$$(ihfg) = -(hifg).$$

Fassen wir die Ergebnisse zusammen:

Sind die c_{hi} gegebene Funktionen der x_h und die a_{hi} nebst den (ifk) gegebene Funktionen der y_f, so bilden die Gl. (6)

$$(6) \qquad D_f x_{hi} = \sum_k (ifk) x_{hk}$$

Digitized by Google

ein System von Differentialgleichungen für die Größen x_{hi}. Diese Größen müssen aufserdem den Gleichungen

$$\sum_{hi} c_{hi} x_{hf} x_{ik} = a_{jk} \tag{2}$$

genügen. Ferner bestehen als Integrationsbedingungen die Gleichungen

$$0 = (hifg) - \sum_{h'i'kl} \binom{h'i'}{kl}_c x_{h'h} x_{i'i} \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \frac{\partial x_l}{\partial y_g}. \tag{9}$$

Die x_h können dabei entweder als Funktionen der y_f gegeben sein. Dann stellen die x_{hi} irgend ein n-eder dar, das in bestimmter, durch die Differentialgleichungen gegebener Weise längs der festen Mannigfaltigkeit M_r bewegt wird. Oder aber — und das wird der wichtige Fall sein, der uns nachher beschäftigt — die x_h hängen in gewisser Weise mit den x_{hi} zusammen und werden ebenso wie diese durch die Differentialgleichungen und Bedingungen bestimmt.

Es bleibt natürlich die Frage offen, ob bei irgendwie gegebenen c_{hi}, a_{hi}, (ifk) die Gl. (2), (6), (9) zusammen erfüllbar sind, und ob vielleicht noch aufser ihnen den unbekannten Gröfsen irgend welche Bedingungen auferlegt werden können, ferner wie viele solcher Lösungen möglich sind. Das läfst sich freilich nur in jedem Falle besonders entscheiden. Hier soll nur auf eine Eigenschaft dieser Gleichungen aufmerksam gemacht werden, die in dem folgenden Satz ihren Ausspruch findet:

Genügt ein System von Funktionen x_h, x_{hi} der Gröfsen y_f den Gl. (2), (6), (9), so genügt auch jedes andere Funktionensystem $\bar{x}_h$, $\bar{x}_{hi}$ denselben Gleichungen, wenn die $\bar{x}_h$ Funktionen der x_h sind und durch die Überführung der x_h in die $\bar{x}_h$ die Form C in sich selbst transformiert wird, wenn ferner die x_{hi} ebenso transformiert werden, wie die $\frac{\partial x_h}{\partial y_f}$, nämlich

$$\frac{\partial x_h}{\partial y_f} = \sum_k \zeta_{hk} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial y_f}, \quad x_{hi} = \sum_k \zeta_{hk} \bar{x}_{ki},$$

wobei

$$\zeta_{hk} = \frac{\partial x_h}{\partial \bar{x}_k} \qquad \textit{ist.}$$

Das soll jetzt gezeigt werden. Die c_{hi} waren gegebene Funktionen der x_h, für die neuen Lösungen $\bar{x}_h$ ist also formal x_h durch $\bar{x}_h$ in c_{hi} und in den Christoffelschen Symbolen zu ersetzen. Dadurch möge $\bar{c}_{hi}$, $\left\{ \begin{matrix} kl \\ h \end{matrix} \right\}_{\bar{c}} \cdots$ hervorgehen. Da die a_{hi} gegebene Funktionen der y_f waren,

Digitized by Google

also durch die Substitution nicht berührt werden, so müssen für die neuen Lösungen die Gleichungen (2) bestehen:

$$\sum_{hi} c_{hi}\bar{x}_{hj}\bar{x}_{ik} = \sum_{hi} c_{hi}x_{hj}x_{ik}$$
$$= \sum_{hih'i'} c_{hi}\zeta_{hh'}\zeta_{ii'}\bar{x}_{h'j}\bar{x}_{i'k}.$$

Diese Gleichungen sind aber erfüllt, weil die Transformationsbedingungen der Form C in sich selbst lauten:

$$\sum_{hi} c_{hi}\zeta_{hj}\zeta_{ik} = \bar{c}_{jk}.$$

Für die Gl. (9) gilt folgendes. Bei der Transformation der Form C wird[1])

$$\binom{h\ i}{k\ l}_{\bar{c}} = \sum_{h_1 i_1 k_1 l_1} \binom{h_1\ i_1}{k_1\ l_1}_{c} \zeta_{h_1 h}\zeta_{i_1 i}\zeta_{k_1 k}\zeta_{l_1 l},$$

also

$$\sum_{h'i'kl} \binom{h'\ i'}{k\ l}_{\bar{c}} \bar{x}_{h'h}\bar{x}_{i'i}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial \bar{y}_f}\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{y}_g}$$
$$= -\sum \binom{h_1\ i_1}{k_1\ l_1}_{c} \zeta_{h_1 h'}\zeta_{i_1 i'}\zeta_{k_1 k}\zeta_{l_1 l}\bar{\zeta}_{h'h_2}\bar{\zeta}_{i'i_2}\bar{\zeta}_{k k_2}\bar{\zeta}_{l l_2} x_{h_2 h}x_{i_2 i}\frac{\partial x_{k_2}}{\partial \bar{y}_f}\frac{\partial x_{l_2}}{\partial \bar{y}_g},$$

wenn $(\bar{\zeta}_{kh})$ das reziproke System zu (ζ_{kh}) ist. Wegen der deshalb bestehenden Gleichung

$$\sum \zeta_{hk}\bar{\zeta}_{kl} = \delta_{hl}$$

wird die rechte Seite der letzten Gleichung zu

$$\sum_{h'i'kl} \binom{h'\ i'}{k\ l}_{c} x_{h'h}x_{i'i}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{y}_f}\frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_g}.$$

Der in den Gleichungen (9) sonst noch vorkommende Ausdruck $(hifg)$ hängt von den gegebenen Größen ab. Somit ist gezeigt, daß auch die Gl. (9) für die neuen Lösungen $\bar{x}_{hi}$, $\bar{x}_{hi}$ erfüllt sind. Es bleibt nur noch der Nachweis für die Gl. (6) übrig. Es ist

$$\frac{\partial x_{hi}}{\partial y_f} + \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\ l \\ h \end{matrix} \right\}_{c} x_{ki}\frac{\partial x_l}{\partial y_f} - \sum_k (ifk)x_{hk}$$
$$- \sum_j \zeta_{hj}\left[\frac{\partial \bar{x}_{ji}}{\partial y_f} + \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\ l \\ j \end{matrix} \right\}_{\bar{c}} \bar{x}_{ki}\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial y_f} - \sum_k (ifk)\bar{x}_{jk}\right]$$
$$+ \sum_j \frac{\partial \zeta_{hj}}{\partial y_f}\bar{x}_{ji} + \sum_{klj} \left\{ \begin{matrix} k\ l \\ h \end{matrix} \right\}_{c} \zeta_{kj}\zeta_{li}\bar{x}_{ji}\frac{\partial x_l}{\partial \bar{y}_f} - \sum_{klj} \left\{ \begin{matrix} k\ l \\ j \end{matrix} \right\}_{\bar{c}} \zeta_{hj}\bar{x}_{ki}\frac{\partial \bar{x}_l}{\partial \bar{y}_f}.$$

1) Christoffel: Journal für Math. **70**.

Digitized by Google

Sollen nun x_h, x_{hi} und $\bar{x}_h$, $\bar{x}_{hi}$ Lösungen der Gl. (6) sein, so verschwinden die linke Seite und das erste Glied der rechten Seite. Es mufs also auch der Rest verschwinden. Der Rest ist

$$\sum_{jl} \bar{x}_{ji} \frac{\partial \bar{x}_l}{\partial y_f} \left[\frac{\partial \zeta_{hj}}{\partial x_l} + \sum_{kr} \left\{ \begin{matrix} k\,r \\ h \end{matrix} \right\}_c \zeta_{kj} \zeta_{rl} - \sum_k \left\{ \begin{matrix} jl \\ k \end{matrix} \right\} \zeta_{hk} \right].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer verschwindet aber gerade, weil die Form C in die Form $\bar{C}$, das heifst sich selbst, durch die Transformation übergeführt wird.[1])

Also genügen unter den Bedingungen des vorher genannten Satzes die Gröfsen $\bar{x}_h$, $\bar{x}_{hi}$ ebenfalls den Gl. (2), (6), (9).

Aus der letzten Entwickelung ziehen wir noch einige Schlüsse über das Verhalten der Operation D_f. Die letzte Gleichung lautet anders geschrieben:

$$D_f x_{hi} - \sum_k (ifk) x_{hk} = \sum_j \zeta_{hj} [D_f \bar{x}_{ji} - \sum_k (ifk) \bar{x}_{jk}];$$

daraus folgt

$$D_f x_{hi} = \sum_j \zeta_{hj} D_f \bar{x}_{ji},$$

d. h. die Gröfsen

$$\frac{\partial x_h}{\partial y_f},\ x_{hi},\ D_f x_{hi}$$

sind kovariant.

Deuten wir jetzt den abgeleiteten Satz geometrisch, so können wir sagen:

Genügt ein System x_h, x_{hi} den Gl. (2), (6), (9) bei gegebenen a_{hi} und (ifk) als Funktionen der y_f und c_{hi} als Funktionen der x_h, genügt also — kürzer ausgedrückt — eine M_r und ein mit ihr irgend wie ververbundenes n-eder E_n den Gl. (2), (6), (9), so genügt auch jede andere $\bar{M}_r$ und ein zugehöriges n-eder $\bar{E}_n$ denselben Gleichungen, wenn M_r und E_n durch eine Bewegung im Raume M_n in $\bar{M}_r$ und $\bar{E}_n$ übergeführt werden können.

Es sei noch bemerkt, dafs die Gl. (7) und (9) die einfachere Gestalt

$$(\bar{6}) \qquad \frac{\partial x_{hi}}{\partial y_f} = \sum_k (ifk) x_{hk}$$

$$(\bar{9}) \qquad 0 = (hifg)$$

annehmen, sobald die Mannigfaltigkeit M_n eben ist, also $c_{hl} = \delta_{hl}$ gesetzt werden kann.

1) Christoffel: Journal für Math. **70**, Gl. 9.

Digitized by Google

2. *Die ν-fache Mannigfaltigkeit.* — Um auf die Grundgleichungen der M_ν zu kommen, setzen wir die Verbindung des n-eders E_n mit der M_ν in der gewöhnlichen Weise dadurch fest, dafs wir verlangen, dafs die Richtungen f $(f=1,\ldots,\nu)$, bestimmt durch die Gröfsen x_{hf} $(h=1,\ldots,n)$, in der Tangentialmannigfaltigkeit der M_ν liegen sollen. Ferner sollen die übrigen Richtungen r $(r=\nu+1,\ldots,n)$ auf der Tangentialmannigfaltigkeit senkrecht stehen. Dann wird

$$a_{fr}=\alpha_{fr}=0,\quad a_{rs}=\alpha_{rs}=\delta_{rs}.$$

Wählt man die x_{hf} noch als $\dfrac{\partial x_h}{\partial y_f}$, so gehen die Gröfsen a_{fg} über in die Koeffizienten der quadratischen Form A, die das Quadrat des Linienelementes der M_ν angiebt. Diese Besonderheit soll aber vorläufig noch nicht statthaben, sodafs also die x_{hf} noch in gewisser Weise beliebig sind. Wegen der besonderen Werte, die die Gröfsen a jetzt erlangen, wird aber trotzdem

$$(hfr)=[hfr].$$

Wir setzen

$$[fgr]=(fgr)=b^{(r)}_{fg}, \tag{10}$$

$$[rfs]=(rfs)=c^{(r)}_{rs}; \tag{11}$$

dann wird

$$(rfg)=\sum_m[rfm]\alpha_{gm}=\sum_m\alpha_{gm}\left(\frac{\partial a_{rm}}{\partial y_f}-[mfr]\right)=-\sum_m\alpha_{gm}b^{(r)}_{mf},$$

aufserdem

$$(sfr)=[sfr]=\frac{\partial a_{rs}}{\partial y_f}-[rfs]=-[rfs]=-c^{(r)}_{rs},$$

$$[fmg]=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\partial a_{gm}}{\partial y_f}+\frac{\partial a_{fg}}{\partial y_m}-\frac{\partial a_{mf}}{\partial y_g}\right\}=\left[\begin{matrix}fm\\g\end{matrix}\right]_a,$$

$$(fmg)=\left\{\begin{matrix}fm\\g\end{matrix}\right\}_a,$$

$$[p_1p_2f_1f_2]=\left\{\begin{matrix}p_1\,p_2\\f_1f_2\end{matrix}\right\}_a-\sum_{rp}\begin{vmatrix}b^{(r)}_{p_1f_1}&b^{(r)}_{p_1f_2}\\b^{(r)}_{p_2f_1}&b^{(r)}_{p_2f_2}\end{vmatrix}\alpha_{pp_2}.$$

Setzen wir nun

$$\sum_r\begin{vmatrix}b^{(r)}_{p_1f_1}&b^{(r)}_{p_1f_2}\\b^{(r)}_{p_2f_1}&b^{(r)}_{p_2f_2}\end{vmatrix}=B_{p_1p_2f_1f_2}, \tag{12}$$

so kommt

$$(p_1p_2f_1f_2)=\left(\begin{matrix}p_1\,p_2\\f_1f_2\end{matrix}\right)_a-B_{p_1p_2f_1f_2}.$$

Digitized by Google

Weiter erhält man

$$(prfg) = [prfg] = \frac{\partial b^{(r)}_{pf}}{\partial y_g} - \frac{\partial b^{(r)}_{pg}}{\partial y_f} + \sum_m \left[\left\{ \begin{matrix} pf \\ m \end{matrix} \right\}_a b^{(r)}_{mg} - \left\{ \begin{matrix} pg \\ m \end{matrix} \right\}_a b^{(r)}_{mf} \right] - \sum_s \begin{vmatrix} b^{(s)}_{pf} b^{(s)}_{pg} \\ c^{(r)}_{rs} c^{(g)}_{rs} \end{vmatrix},$$

$$(rpfg) = -(prfg), \quad [rpfg] = -\sum \alpha_{pq} (qrfg)$$

und schließlich

$$(rsfg) = [rsfg] = \frac{\partial c^{(t)}_{rs}}{\partial y_g} - \frac{\partial c^{(g)}_{rs}}{\partial y_f} - \sum_{mp} \alpha_{mp} \begin{vmatrix} b^{(r)}_{pf} b^{(r)}_{pg} \\ b^{(s)}_{mf} b^{(s)}_{mg} \end{vmatrix} - \sum_t \begin{vmatrix} c^{(t)}_{rt} c^{(g)}_{rt} \\ c^{(t)}_{st} c^{(g)}_{st} \end{vmatrix}.$$

Nach diesen Vereinfachungen nehmen die Gl. (2), (6), (9) die Gestalten an:

$$(2^a) \qquad \sum_{hi} c_{hi} x_{hf} x_{ig} = a_{fg},$$

$$(2^b) \qquad \sum_{hi} c_{hi} x_{hf} x_{ir} = 0,$$

$$(2^c) \qquad \sum_{hi} c_{hi} x_{hr} x'_{is} = \delta_{rs},$$

$$(6^a) \qquad D_f x_{hp} = \sum_m \left\{ \begin{matrix} pf \\ m \end{matrix} \right\}_a x_{hm} + \sum_r b^{(r)}_{pf} x_{hr},$$

$$(6^b) \qquad D_f x_{hr} = -\sum_m x_{hm} \sum_p \alpha_{pm} b^{(r)}_{pf} + \sum_s c^{(f)}_{rs} x_{hs},$$

$$(9^a) \qquad B_{f_1 f_2 g_1 g_2} = \begin{pmatrix} f_1 f_2 \\ g_1 g_2 \end{pmatrix}_a - \sum_{h_1 h_2 i_1 i_2} \begin{pmatrix} h_1 h_2 \\ i_1 i_2 \end{pmatrix}_c x_{h_1 f_1} x_{h_2 f_2} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{g_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_{g_2}},$$

$$(9^b) \qquad \frac{\partial b^{(r)}_{pf}}{\partial y_g} - \frac{\partial b^{(r)}_{pg}}{\partial y_f} = \sum_m \left[b^{(r)}_{mf} \left\{ \begin{matrix} pg \\ m \end{matrix} \right\}_a - b^{(r)}_{mg} \left\{ \begin{matrix} pf \\ m \end{matrix} \right\}_a \right] + \sum_s \begin{vmatrix} b^{(r)}_{pf} b^{(r)}_{pg} \\ c^{(f)}_{rs} c^{(g)}_{rs} \end{vmatrix} + \sum_{hikl} \begin{pmatrix} hi \\ kl \end{pmatrix}_c x_{hp} x_{ir} \frac{\partial x_k}{\partial y_f} \frac{\partial x_l}{\partial y_g},$$

$$(9^c) \qquad \frac{\partial c^{(f)}_{rs}}{\partial y_g} - \frac{\partial c^{(g)}_{rs}}{\partial y_f} = \sum_{mp} \alpha_{mp} \begin{vmatrix} b^{(r)}_{pf} b^{(r)}_{pg} \\ b^{(s)}_{mf} b^{(s)}_{mg} \end{vmatrix} + \sum_t \begin{vmatrix} c^{(f)}_{rt} c^{(g)}_{rt} \\ c^{(f)}_{st} c^{(g)}_{st} \end{vmatrix} + \sum_{hikl} \begin{pmatrix} hi \\ kl \end{pmatrix}_c x_{hr} x_{is} \frac{\partial x_k}{\partial y_f} \frac{\partial x_l}{\partial y_g}.$$

Die Gleichungen (9^a) sind die Verallgemeinerung der Gaußischen Gleichung, die Gleichungen (9^b) die Verallgemeinerung der Mainardischen Gleichungen der gewöhnlichen Flächenlehre. Die sämtlichen Gl. (9) treten nicht auf, wenn die Mannigfaltigkeit M_r eine Kurve ist. Die Gl. (9^c) treten nicht auf im Fall der Hyperflächen, auch verschwinden hierfür die $c^{(f)}_{rs}$.

Digitized by Google

Die Größen a_{fg}, $b^{(r)}_{fg}$, $c^{(f)}_{rs}$, können als Fundamentalgrößen der Mannigfaltigkeit M_r bezeichnet werden.

Für den Fall einer *ebenen* M_n fallen die von den c_{hi} abhängigen rechten Glieder in den Gl. (9^a), (9^b), (9^c) weg; die Gleichungen enthalten dann nicht mehr die unbekannten Größen x_{hi}, x_h und die Gl. (9^a), (9^b), (9^c) werden zu *Relationen zwischen den Fundamentalgrößen.* Setzt man in diesem Fall noch $x_{hf} = \frac{\partial x_h}{\partial y_f}$, so wird das System $(b^{(r)}_{fg})$ für festes r symmetrisch. $(c^{(f)}_{rs})$ bleibt für festes f wie im allgemeinen Fall ein schiefes System.

3. *Die besonderen Fälle. — I. Hyperflächen.* Wie schon bemerkt, fallen die Gl. (9^c) weg. Die Gl. (9^a) und (9^b) sind die Verallgemeinerungen der Gaufsischen und der Mainardischen Gleichungen. Ersetzt man die von mir gewählten Buchstaben c, a, b durch a, b, Ω, wählt man ferner $x_{hf} = \frac{\partial x_h}{\partial y_f}$, so erhält man genau die in der Differentialgeometrie von Bianchi S. 602 angegebene Gestalt der Gleichungen.

II. Kurve (M_1) in M_n. Die Koordinaten x_h sind die Funktionen einer Variablen y. Die Gl. (9) treten nicht auf. Durch geeignete Wahl der Richtungen r $(r=2,\ldots,n)$, die in der Normalmannigfaltigkeit von M_1 verlaufen, können die Gl. (6) vereinfacht werden. Nimmt man die Richtungen in den aufeinanderfolgenden geodätischen Schmiegungsmannigfaltigkeiten an, so gelangt man für die x_{hi} zu Ausdrücken, die ich hier ohne Beweis mitteilen will, weil die Herleitung etwas mühsam ist

Es sei

$$\frac{\partial x_h}{\partial y} = x'_h = \omega_{h1},$$

$$D\omega_{h1} = Dx'_h = \frac{\partial \omega_{h1}}{\partial y} + \sum_{kl} \left\{ \begin{matrix} k\,l \\ h \end{matrix} \right\}_c \omega_{k1} x'_l = \omega_{h2},$$

und allgemein

$$D\omega_{hi} = \omega_{hi+1}.$$

Ferner sei

$$\sum_{hi} c_{hi} \omega_{hj} \omega_{ik} = w_{jk},$$

$$W_i = |w_{i_1 i_2}|_{(i_1 i_2 = 1 \ldots i)}, \quad W_{ir} = \frac{\partial W_i}{\partial w_{ir}}, \quad W_1 = w_{11} = a, \quad W_0 = 1, \quad W_{11} = 1,$$

so wird

$$x_{hi} = \frac{\sum_r W_{ir} \omega_{hr}}{\sqrt{W_{i-1} W_i}} \qquad \begin{pmatrix} r=1,\ldots,i \\ i=1,\ldots,n \end{pmatrix}.$$

Digitized by Google

Setzt man ferner

$$\varrho_i = \frac{W_i \sqrt{W_1}}{\sqrt{W_{i-1} W_{i+1}}} \qquad (i=1, \ldots, n-1),$$

dann lauten die Gl. (6)

$$D x_{hi} = \frac{\sqrt{a}}{\varrho_i} x_{h,i+1} - \frac{\sqrt{a}}{\varrho_{i-1}} x_{h,i-1}.$$

Das sind die *verallgemeinerten Frenetschen Formeln.*

Wählt man M_n als eben, so verwandelt sich die Operation D in $\frac{d}{dy}$, und es wird einfach

$$\omega_{hi} = \frac{\partial^i x_h}{\partial y^i} = x_h^{(i)}.$$

Wählt man ferner als unabhängige Veränderliche die Bogenlänge s, so tritt für den Faktor a noch die Zahl 1 ein, und die eben abgeleiteten Gleichungen nehmen genau die Gestalt an, die Herr Landsberg[1]) angegeben hat:

$$\frac{d x_{hi}}{ds} = \frac{1}{\varrho_i} x_{h,i+1} - \frac{1}{\varrho_{i-1}} x_{h,i-1}.$$

Im allgemeinen Fall der Kurve in M_n werden, das sei noch erwähnt, die Fundamentalgrößen:

$$a_{11} = a, \; a_{1r} = 0, \; a_{rs} = \delta_{rs} \qquad (r, s = 2, \ldots, n)$$

$$b_{11}^{(2)} = \frac{1}{\varrho_1}, \; b_{11}^{(r)} = 0 \qquad (r = 3, \ldots, n)$$

$$c_{r,r+1}^{(1)} = (r, 1, r+1) = \frac{1}{\varrho_r}, \; c_{r,r-1}^{(1)} = -\frac{1}{\varrho_r}, \; c_{rs}^{(1)} = 0 \qquad (r-1+s+r+1).$$

Die Größe ϱ_1 ist die geodätische Krümmung der Kurve.[2]) Die übrigen Größen ϱ sind von Herrn Landsberg zweite, dritte, ... Krümmung der Kurve genannt worden; vielleicht empfiehlt es sich, sie als erste, zweite, ... Torsion zu bezeichnen, teils damit man sich in Einklang mit der für Raumkurven gewöhnlich angewandten Bezeichnung setzt, teils auch deshalb, weil ϱ_1 zu den Fundamentalgrößen b und die übrigen ϱ zu den Fundamentalgrößen c gehören.

Dortmund, den 2. Februar 1902.

1) Journal für Math. **114**. (Vgl. auch E. Jahnke, Journ. f. Math. **118**, 229, und Leipziger Berichte 1900, S. 147, wo die *allgemeinen* Systeme von Differentialidentitäten aufgestellt worden sind, welche zwischen den *Elementen* eines orthogonalen Sechzehnersystems bestehen. Red.)

2) Voss: Math. Ann. **16**. [cit. nach Bianchi].

Digitized by Google

Über das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl.

Von GUSTAV KOHN in Wien.

Nach der Debatte, welche sich dem Schubertschen Vortrag auf der Karlsbader Mathematikerversammlung anschloſs, bin ich von verschiedenen Seiten ersucht worden, die gegen das Schubertsche Prinzip von der Erhaltung der Anzahl geäuſserten Bedenken im Zusammenhange darzulegen. Dieser Anregung verdanken die folgenden Zeilen ihre Entstehung.

1. Um einen festen Anhalt für die Kritik zu haben, setze ich das fragliche Prinzip in dem Wortlaut hierher, in welchem es von Herrn Schubert in seinem Buche, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879, ausgesprochen wurde. Dem Wesen nach nicht verschieden war der Wortlaut, in welchem es Herr Schubert seinem Karlsbader Vortrag vorausschickte.

Das Prinzip lautet:

„Ist ein algebraisches Gebilde Γ mit der Konstantenzahl c einer einzelnen oder zusammengesetzten c-fachen Bedingung z unterworfen, so giebt es im allgemeinen eine *endliche Anzahl* N räumlicher Individuen, welche sowohl der Definition des Gebildes Γ, als auch der c-fachen Bedingung z genügen. Ist nun z eine räumliche Bedingung, werden also durch z gewisse andere räumliche Gebilde Γ' als *gegeben* vorausgesetzt, so bleibt die Zahl N, wenn sie nicht unendlich wird, *immer gleich groſs*, gleichviel, ob man die Gebilde Γ' ihre Lage zu einander ändern läfst, oder sie vielleicht unter Aufrechthaltung ihrer Definition *spezialisiert*."

2. Ich beginne der Vollständigkeit wegen mit einem Einwand, der das Prinzip in der vorangestellten Schubertschen Fassung gar nicht trifft, sondern sich gegen Darstellungen wendet, die das Prinzip mitunter erfahren hat.

Wenn einem Gebilde Γ, das von c Konstanten abhängt, n Bedingungen auferlegt werden und $n > c$ ist, so wird es im allgemeinen eine endliche Anzahl, nämlich null, Gebilde Γ geben, welche diese Bedingungen befriedigen. Im besonderen können aber die n Bedingungen verträglich sein und im Widerspruch mit unrichtigen Formulierungen des Prinzips von einer endlichen und von null verschiedenen Anzahl von Gebilden Γ befriedigt werden.

Digitized by Google

Beispiel. Es giebt i. a. keine Gerade, welche mit 5 beliebig gegebenen Strahlen des Raumes inzident ist, aber man kann 5 Strahlen eine solche spezielle Lage erteilen, dafs es eine oder dafs es zwei solche Geraden giebt.

3. Ein zweiter Einwand, der sich noch immer nicht gegen das Prinzip selbst, aber schon gegen die vorangestellte Schubertsche Fassung desselben kehrt, bezieht sich auf das Fehlen der Voraussetzung im Wortlaute des Prinzips, dafs sowohl die Gebilde Γ als auch die Bedingungen, von denen im Prinzipe die Rede ist, eine im Cantorschen Sinne des Wortes abgeschlossene Menge bilden müssen. Wird diese Voraussetzung unterlassen, so kann es beim Übergange vom allgemeinen Falle zu Spezialfällen augenscheinlich vorkommen, dafs Grenzfälle von Lösungen des allgemeinen Falles im Spezialfalle nicht mehr als Lösungen mitzählen. Für solche Spezialfälle bliebe die Anzahl dem Schubertschen Prinzip entgegen nicht erhalten, sondern erschiene vermindert.

Erstes Beispiel. Die Aufgabe, die Geraden zu finden, welche 4 gegebene Strahlen des Raumes in 4 *verschiedenen* Punkten treffen, hat im allgemeinen 2 Lösungen, wenn aber zwei von den vier Strahlen sich schneiden, nur *eine*.

Zweites Beispiel. Man hat die Anzahl der Punkte anzugeben, welche drei durch denselben Kegelschnitt gehende Flächen 2. O. *aufserhalb dieses Kegelschnittes* noch gemein haben. Im allgemeinen Falle ist diese Anzahl $= 2$, sie ist aber $= 1$, wenn die drei Flächen einander in einem Punkte des Kegelschnittes berühren, und $= 0$, wenn die Berührung in zwei Punkten des Kegelschnittes statt hat.

4. Eine dritte, im Wortlaute des Prinzips von der Erhaltung der Anzahl nicht enthaltene, aber wohl stillschweigend hinzugedachte Voraussetzung besagt, dafs die Anwendung des Prinzips auf Fragen von *algebraischer* Natur beschränkt bleiben solle. Ohne eine ähnliche Einschränkung ist das Prinzip entschieden unrichtig. Aber es bleibt auch mit dieser Einschränkung unrichtig, wie jetzt erläutert werden soll.

5. Man kann die Frage aufwerfen nach der Anzahl von Gebilden Γ, welche von mehreren wohldefinierten Bedingungen *eine* erfüllen. Es können von diesen Bedingungen die einen so beschaffen sein, dafs sie einzeln von einer endlichen und von null verschiedenen Anzahl von Gebilden Γ befriedigt werden, während die anderen von der in Nr. 2 betrachteten Art sind, so dafs einer beliebigen von ihnen wohl im allgemeinen *kein* Gebilde Γ genügt, in passend gewählten Spezialfällen aber eine endliche, von null verschiedene Anzahl. Für diese speziellen Fälle stimmt dann das Prinzip von der Erhaltung der Anzahl nicht,

Digitized by Google

die Anzahl des allgemeinen Falles bleibt nicht erhalten, sondern erhöht sich um einen bestimmten Betrag.

Erstes Beispiel. Man fragt nach der Anzahl der Geraden des Raumes, welche *entweder* drei beliebig gegebene Strahlen und zugleich einen willkürlich angenommenen Kegelschnitt schneiden, *oder* 5 beliebig gegebene Strahlen treffen. Diese Anzahl ist = 4, denn so viel Geraden giebt es i. a., welche zugleich die drei Strahlen und den Kegelschnitt schneiden, während es i. a. keine Gerade giebt, welche die 5 Strahlen trifft. Die 5 Strahlen kann man aber speziell so annehmen, dafs sie eine der zwei Transversalen zulassen, und liegt ein solcher Spezialfall vor, so erhält man 5 bez. 6 als die fragliche Anzahl und nicht 4, wie das Prinzip es fordert.

Zweites Beispiel. Dem trivialen, aber deswegen um so durchsichtigeren ersten Beispiel lasse ich ein zweites folgen, das immer noch völlig durchsichtig ist und nicht mehr trivial genannt werden kann. Ich verdanke dasselbe einer gelegentlichen mündlichen Mitteilung meines verehrten Freundes E. Study.[1]) — Das Problem lautet: Wie viele Projektivitäten transformieren ein Quadrupel von vier beliebig auf einer Geraden gegebenen Punkten A, B, C, D in sich selbst? Da durch eine solche Projektivität die Punkte A, B, C, D in irgend eine ihrer $4! = 24$ möglichen Anordnungen übergeführt werden könnten, so zerfällt das Problem dementsprechend in 24 Aufgaben. Von diesen Aufgaben haben im allgemeinen Falle 4 eine endliche, von null verschiedene Anzahl von Lösungen, nämlich je *eine*, die übrigen 20 aber *keine* Lösung. In besonderen Fällen haben aber auch gewisse von den 20 Aufgaben je eine Lösung, nämlich dann, wenn das Punktquadrupel $ABCD$ harmonisch oder aequianharmonisch ist. I. a. besitzt das Punktquadrupel 3 Projektivitäten in sich abgesehen von der Identität, nämlich die drei Involutionen, welche sich durch die drei möglichen Zerfällungen des Quadrupels in zwei Paare bestimmen; jedoch läfst sowohl ein harmonisches als auch ein aequianharmonisches Quadrupel im Widerspruch mit dem Prinzip von der Erhaltung der Anzahl *mehr* als drei Projektivitäten in sich zu.

6. Die Hoffnung, den Einwand der letzten Nummer, wie die früheren, durch eine einfache Anderung im Wortlaut des Prinzips beseitigen zu

1) Seit langer Zeit ist E. Study im Besitze von Beispielen, welche dem Prinzip von der Erhaltung der Anzahl widersprechen, auch K. Rohn besitzt solche Beispiele. D. Hilbert hat sogar die strenge Begründung von Schuberts Abzählungsergebnissen unter seine nun schon berühmt gewordenen mathematischen Probleme aufgenommen. (Vgl. Gött. Nachr. 1900 und dieses Arch. (3) 1.) — Der Einwand von Nr. 3 dürfte im Wesen Study angehören.

Digitized by Google

können, schwindet bei näherer Überlegung. Der Fall, auf welchen der Einwand sich bezieht, erweist sich keineswegs als ein Ausnahmefall, sondern er hat in gewissem Sinne umgekehrt als der reguläre, der allgemeine Fall zu gelten. Die Sache liegt einfach folgendermafsen.

Werden einem Gebilde Γ gewisse algebraische Bedingungen B auferlegt, welche zu seiner Bestimmung nicht ausreichen, so brauchen die diesen Bedingungen genügenden Gebilde Γ durchaus nicht ein System Σ_d von bestimmter Stufe (Dimension) d zu bilden, sondern — und dem Algebraiker sind diese Verhältnisse geläufig — diese Gebilde können und werden im allgemeinen eine Reihe von Systemen verschiedener Stufen $\Sigma_d, \Sigma_{d-1}, \Sigma_{d-2}, \ldots, \Sigma_0$ bilden, wo Σ_i $(i = 0, 1, \ldots, d)$ ein System i-ter Stufe bedeutet. Fügt man jetzt den Bedingungen B noch solche von Parametern abhängende Bedingungen B' hinzu, dafs bei allgemeiner Wahl der Parameter eine bestimmte, von Null verschiedene Zahl N von Gebilden Γ den Bedingungen B *und* B' genügt, so haben wir genau den in Nummer 5 besprochenen Fall vor uns. Wir können nämlich das vorliegende Problem folgendermafsen formulieren: Wie viele Gebilde Γ, gehören einem der Systeme $\Sigma_d, \Sigma_{d-1}, \ldots, \Sigma_0$ an und befriedigen die Bedingung B'? Im allgemeinen wird es nur im System Σ_d solche Gebilde geben und zwar in der Anzahl N, im besonderen kann auch jedes der übrigen Systeme solche Gebilde enthalten, wodurch dann das Schubertsche Prinzip verletzt erscheint. Das folgende einfache Beispiel setzt, wie mir scheint, die Verhältnisse, auf die es ankommt, ins hellste Licht.

Beispiel: Das Problem lautet: Wie viele Punkte hat eine beliebige Ebene mit drei denselben Kegelschnitt enthaltenden, aber sonst beliebigen Flächen 2. O. gemein? Die Antwort ist: *zwei*, nämlich ihre beiden Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt. Nun haben aber die drei zunächst in allgemeiner Lage vorausgesetzten Flächen neben dem Kegelschnitt noch zwei Punkte gemein. Wählt man die Ebene so, dafs sie durch einen von diesen beiden Punkten hindurchgeht, oder durch beide, so liegt offenbar ein Spezialfall vor, in welchem das gestellte Problem nicht zwei, sondern drei bez. vier Lösungen besitzt. Hier könnte man vielleicht, um das Schubertsche Prinzip zu retten, auf den Einfall kommen, den zu den zwei Lösungen des allgemeinen Falles neu hinzugetretenen die Vielfachheit null zuzuschreiben. Wie aber, wenn man den Spezialfall vornimmt, in welchem die drei Flächen 2. O. *zwei* gemeinsame Kegelschnitte haben? Jetzt hat das Problem vier Lösungen, und alle sind gleichberechtigt!

Ich halte durch das Vorhergehende die folgende Schlufsfolgerung für gerechtfertigt:

Digitized by Google

Das Schubertsche Prinzip von der Erhaltung der Anzahl, als Prinzip mathematischer Beweisführung, ist krank, unheilbar krank sogar in gewissem Sinne; allein als heuristisches Prinzip von allzeit frischer Kraft wird es fortleben in der Wissenschaft.

Marienbad in Böhmen, den 3. Oktober 1902.

Über Brechung und Dispersion des Lichts auf der Sonne.

Von E. PRINGSHEIM in Berlin.

Den bedeutendsten Fortschritt auf dem Gebiete der Sonnenphysik — seit der Entdeckung der Spektralanalyse — verdanken wir A. Schmidt.

Der Befund der spektralanalytischen Sonnenbeobachtung erschien sehr klar und vollkommen eindeutig: die weifsglühende Photosphäre — der für gewöhnlich allein sichtbare Sonnenball — umgeben von der aus leuchtenden Gasen bestehenden Chromosphäre, welche dem blofsen Auge nur bei totalen Sonnenfinsternissen sichtbar wird. Die Gase der Chromosphäre berauben das durch sie hindurchgehende Photosphärenlicht gerade derjenigen Strahlen, welche sie selbst aussenden. Sie fügen ihm dabei zwar Strahlen der gleichen Qualität bei, wie sie ihm nehmen, aber in viel geringerer Intensität. Daher erscheinen die der Eigenstrahlung der chromosphärischen Gase angehörigen Stellen des Sonnenspektrums dunkel auf dem hellen Grunde des ungeschwächten Photosphärenspektrums; wir sehen die Fraunhoferschen Linien dem hellen Sonnenspektrum schwarz aufgeprägt, eine Schrift, in welcher die Gase der Chromosphäre ihre Existenz, ihre chemische Natur und ihre physikalische Beschaffenheit dem irdischen Beobachter verkünden.

Würden wir das Photosphärenlicht allein auf den Spalt des Spektralapparates werfen können, bevor es die Chromosphäre passiert hat, so würde es uns ein vollkommen ununterbrochenes kontinuierliches Spektrum zeigen, wie wir es bei unseren gebräuchlichen Lichtquellen z. B. der elektrischen Glühlampe oder der Petroleumlampe sehen. Könnten wir das Licht der Chromosphäre allein ohne das ihm beigesellte, so viel stärkere Photosphärenlicht untersuchen, so würden wir das für leuchtende Gase charakteristische Spektrum erblicken, helle Linien auf dunklem Grunde.

Jenen Fall werden wir wohl nie verwirklichen können, diesen bietet uns die Natur selbst dar bei den totalen Sonnenfinsternissen.

Digitized by Google

Im Momente der beginnenden und der endenden Totalität, wo der Mondrand die Photosphäre gerade zu berühren scheint, schneidet uns der Mond das Photosphärenlicht vollkommen ab, während das Licht der über ihn hinausragenden Chromosphäre ungehindert zu uns gelangt. Daher erscheint in diesen Momenten das blitzartig nur auf ganz wenige Sekunden aufleuchtende „Flash"-Spektrum, ein aus unzähligen hellen Linien bestehendes Spektrum leuchtender Gase. Diese Erscheinung wurde von jeher als glänzende Bestätigung der aus den spektralanalytischen Beobachtungen folgenden Kirchhoffschen Anschauung von der Konstitution der Sonne angesehen. Schliefst man sich dieser Anschauung an, nach welcher die Photosphäre eine weifsglühende feste oder flüssige Oberfläche darstellt, so sind in der That die allgemeinen Sonnenerscheinungen vollkommen erklärt.

Aber diese Theorie bietet eine unseren physikalischen Begriffen vollkommen unüberwindliche Schwierigkeit dar. Aus der Farbe des Sonnenlichtes, aus den ungeheuren Energiemengen, welche die Sonne in den Weltraum hinausstrahlt, geht ohne Zweifel hervor, dafs die Temperatur der strahlenden Schichten sehr hoch sein mufs. Wir können jetzt mit ziemlicher Sicherheit sagen, dafs sie etwa 6000—7000° C beträgt. Das ist eine Temperatur, welche für die allermeisten, wo nicht für alle auf der Sonne nachgewiesenen chemischen Elemente oberhalb derjenigen Grenze liegt, welche man als die *kritische* Temperatur bezeichnet. Bei Temperaturen oberhalb der kritischen kann ein Stoff nicht mehr neben einander im flüssigen und im gasförmigen Aggregatzustand bestehen. Auch hier kann man ein Gas durch starken Druck so weit komprimieren, dafs es der Dichte des flüssigen Zustandes und auch in manchen Beziehungen den Eigenschaften der Flüssigkeiten sich nähert, aber es tritt niemals ein plötzlicher, sichtbarer Übergang zwischen der gasförmigen und der flüssigen Phase ein, es kann keine räumliche Grenze zwischen Flüssigkeit und Gas, keine Flüssigkeits*oberfläche* auftreten. Eine scharfe Grenze zwischen einem flüssigen und einem gasförmigen Teil der Sonne ist daher physikalisch schlechterdings unerklärlich. Diese Schwierigkeit, über welche die Sonnenphysik stillschweigend hinweggegangen ist, wurde beseitigt durch die Schmidt*sche Sonnentheorie*. Sie erklärt die scharfe Abgrenzung zwischen der weifsglühenden Photosphäre und der Chromosphäre unter der physikalisch vollständig verständlichen Annahme, dafs die Sonne ein leuchtender Gasball mit von aufsen nach innen kontinuierlich zunehmender Dichte ist.

Es ist mehr als wahrscheinlich, dafs Gase bei grofser Dichte, wie sie die inneren Schichten der Sonne haben müssen, ein kontinuierliches

Digitized by Google

Spektrum aussenden, wie feste und flüssige Körper von ähnlicher Dichtigkeit. Wegen der von Ort zu Ort variablen Dichte ändert sich auf der Sonne der Brechungsexponent so, dafs er von innen nach aufsen hin abnimmt; das von den inneren Schichten ausgehende Licht wird sich daher nicht geradlinig fortpflanzen, sondern es wird — ebenso wie die in der Erdatmosphäre sich bewegenden Lichtstrahlen — gekrümmte Bahnen verfolgen, deren Konkavität nach der Seite des wachsenden Brechungsexponenten, also nach dem Mittelpunkt der Sonne hinzeigt Es wird also in der Sonne eine Refraktion auftreten, welche der atmosphärischen Refraktion auf der Erde vollkommen analog ist. Wegen des grofsen Durchmessers der Sonne wird die Krümmung der Lichtbahnen für die mittleren Zonen der Sonne gröfser sein, als die der größten Kreise dieser Zonen, aus ihnen wird in tangentialer Richtung gar kein Licht austreten. Eine Sphäre — *die kritische* — ist dadurch charakterisiert, dafs in ihr der Krümmungsradius tangentialer Lichtstrahlen mit dem Radius der Sphäre übereinstimmt. Ein einmal genau tangential verlaufender Strahl würde also diese Sphäre niemals verlassen, sondern dauernd ihre Peripherie umkreisen. Diese kritische Sphäre ist daher die äufsere Grenze desjenigen Teils der Sonne, von welchem aus dem inneren stammende Strahlen nach aufsen hin noch in nahezu tangentialer Richtung austreten können.

Die aus den vom Mittelpunkte entfernteren Zonen tangential austretenden Strahlen stammen nicht mehr aus der inneren Gegend der Sonne, in welcher weifsglühende Gase sich befinden, sondern aus dem äußeren Teil, welcher von den dünnen Gasen der Chromosphäre erfüllt ist. Die kritische Sphäre bildet also eine scharfe Grenze zwischen dem Gebiet, aus welchem das Licht des weifsleuchtenden Sonneninnern zu uns gelangt, und den Gebieten, aus welchem nur Licht der ein Linienspektrum aussendenden Chromosphärengase den irdischen Beobachter erreicht. Der scharfe Sonnenrand, den wir erblicken, ist also nach der Schmidtschen Theorie keine reale Grenze zwischen zwei ganz verschieden leuchtenden Teilen der Sonne, sondern eine optische Täuschung hervorgebracht durch die Strahlenbrechung auf der Sonne. Wie grofs der Radius derjenigen Kugel ist, in welcher sich die dichten, weifsglühenden Gase befinden, wie sich in der Gasmasse, deren Dichte von innen nach aufsen hin stetig abnimmt, der Übergang der Lichtemission von den mit kontinuierlichem Spektrum leuchtenden Gasen im Innern zu den mit linearem Spektrum leuchtenden Gasen der Chromosphäre vollzieht, das sind Fragen, welche der Lösung noch harren. Wieweit die Schmidtsche Sonnentheorie richtig ist, darüber sind gewifs verschiedene Ansichten möglich; aber sicher ist sie bisher die einzige Theorie,

Digitized by Google

welche die allgemeinen Erscheinungen der Sonne vollkommen erklärt aus Annahmen, die nirgends im Widerspruch stehen zu bekannten physikalischen Wahrheiten.

In der Schmidtschen Theorie spielt die *Dispersion* nur eine sekundäre Rolle. Die im allgemeinen sehr kleine Dispersion der Gase, deren Brechungsexponent für alle Strahlen sehr nahe gleich Eins ist, würde zur Folge haben, dafs der Durchmesser der kritischen Sphäre für die verschiedenen farbigen Strahlen ein wenig verschieden ist. Doch ist diese Verschiedenheit wohl zu gering, um wahrgenommen zu werden, wenigstens so lange man die Untersuchung auf das sichtbare Gebiet des Spektrums beschränkt.

Aber ein Gas, dessen Spektrum in Emission und Absorption durch scharfe Linien charakterisiert ist, besitzt nicht für alle Strahlen diese allgemeine, geringe Brechung und Dispersion; sondern für solches Licht, dessen Schwingungsdauer derjenigen der Spektrallinien des Gases unmittelbar benachbart ist, können ganz andere Erscheinungen auftreten, nämlich die der *anomalen Dispersion*.

Die Geschichte der anomalen Dispersion der Gase ist sehr eigentümlich. Die erste Substanz, an welcher die Erscheinung der anomalen Dispersion überhaupt beobachtet wurde, war ein Gas, nämlich der Joddampf. Die erste Beobachtung, welche darauf hindeutet, dafs dieser Dampf merkwürdige Brechungseigenschaften besitzt, machte Le Roux[1]) im Jahre 1860. Im Jahre 1862 konnte Le Roux[2]) mit aller Sicherheit aussprechen: „La vapeur d'iode disperse la lumière en sens inverse de toutes les substances étudiées jusqu'ici, c'est-à-dire qu'un prisme rempli de vapeur d'iode réfracte les rayons rouges d'une quantité plus grande que les rayons bleus.“ Obwohl er die Pariser Akademie auf die Merkwürdigkeit dieser Erscheinung aufmerksam machte, welche schon er als anomale Dispersion bezeichnete, blieb seine Beobachtung doch lange vereinzelt und, wie es scheint, wenig bemerkt. Erst nachdem Christiansen 1870 die anomale Dispersion einer Fuchsinlösung entdeckt hatte, wurde die Bedeutung dieser Erscheinung durch A. Kundt aufgeklärt. Mit dem scharfen Blick für den theoretischen Zusammenhang der Dinge, welcher diesen grofsen Experimentator auszeichnete, hatte Kundt[3]) schon früher erkannt, dafs solche Körper, welche Oberflächenfarben zeigen, welche also ausgezeichnete Maxima der Absorption und Reflexion besitzen, auch ungewöhnliche Brechungseigenschaften haben müfsten: „Ich vermutete in diesen Körpern den allgemeinsten Fall der

1) Le Roux. Comptes rendus **51**, 171—172, 1860.
2) Derselbe. ibid. **55**, 126—128, 1862.
3) A. Kundt. Pogg. Ann. **142**, 163—171, 1871.

Digitized by Google

Dispersion, bei dem der Brechungsexponent für abnehmende Wellenlängen in Luft in den Körpern nicht nur beliebig zu- und abnehmen, sondern auch ein oder mehrere mal kleiner als eins werden könne". Kundts Bemühungen, diese vermuteten Anomalien der Brechung mit Hilfe von Interferenz-Erscheinungen sichtbar zu machen, mifslangen. Sobald aber die Christiansensche Entdeckung bekannt wurde, gelang es Kundt, die anomale Dispersion für eine grofse Anzahl von Substanzen mit Oberflächenfarben direkt nachzuweisen. Es ist zu vermuten, dafs er auf die Idee dieses direkten Nachweises schon früher gekommen sein würde, wenn ihm die Le Rouxsche Beobachtung bekannt gewesen wäre.

Kundt wandte bei seinen Versuchen die schon von Newton benutzte Methode der gekreuzten Spektren an, welche den Verlauf der Brechung mit der Wellenlänge unmittelbar zur Anschauung bringt. Er kam zu dem Resultat, dafs die Brechungsexponenten in der Nachbarschaft der Absorptionslinien aufserordentlich zunehmen, wenn sich die Schwingungsdauer durch allmähliche *Abnahme* derjenigen der absorbierten Schwingungen nähert. Nähert man sich den absorbierten Schwingungen dagegen durch allmähliche *Zunahme* der Schwingungsdauer, so nehmen die Brechungsexponenten aufserordentlich schnell ab, und zwar so, dafs die Wellen gröfserer Schwingungsdauer, welche durch das Absorptionsband von jenen kleinerer Schwingungsdauer getrennt sind, stärker abgelenkt werden können, als die letzteren.

Der von Kundt theoretisch vermutete und experimentell nachgewiesene Zusammenhang zwischen Brechung und Absorption ist die Grundlage aller neueren Dispersionstheorien geworden. Sie alle, sowohl diejenigen, welche auf dem Boden der Undulationstheorie stehen, als auch diejenigen, welche von der elektromagnetischen Theorie des Lichts ausgehen, machen veranlafst durch diesen Zusammenhang die Annahme, dafs die Brechung des Lichts auf einer Wechselwirkung zwischen dem Äther und den ponderablen Molekülen beruht, so dafs die Ätherbewegungen von den körperlichen Molekülen beeinflufst werden. Aus dieser Anschauung ergiebt sich, dafs nur solche Absorptionsstreifen einen starken Einfluſs auf die Dispersion ausüben können, welche Eigenschwingungen der Körpermoleküle entsprechen, welche also scharf ausgeprägt und sehr intensiv sind.

Nirgends aber sind die Absorptionslinien schärfer ausgeprägt, als bei leuchtenden Gasen, z. B. Natriumdampf, und es hätte daher sehr nahe gelegen, bei ihnen anomale Dispersion zu vermuten und zu suchen. Und in der That weist Kundt[1]) 1872 bei der Erwähnung der Le Roux-

1) A. Kundt. Pogg. Ann. **144**, 128—137, 1872.

Digitized by Google

schen Beobachtung darauf hin, dafs anomale Dispersion bei leuchtenden Gasen wahrscheinlich sei. Er fügt hinzu: „Ob es aber jemals gelingen wird, die Brechungsanomalien an jedem der einzelnen Absorptionsstreifen der Gase und glühenden Dämpfe, von denen einzelne eine so grofse Anzahl von sehr schmalen Absorptionsstreifen zeigen, nachzuweisen, mufs dahin gestellt bleiben". Erst 1880 machte Kundt[1]) ganz zufällig, als er den Vorlesungsversuch der Umkehr der Natriumlinien anstellte, die Entdeckung, dafs der leuchtende Na-Dampf in unmittelbarer Nachbarschaft der *D*-Linien anomale Dispersion zeigt. Er liefs das Licht einer Bogenlampe durch eine Bunsenflamme hindurchgehen, in welcher er metallisches Na verdampfte, und entwarf ein objektives Spektrum davon auf einem Projektionsschirm. Dabei beobachtete er die in Fig. 1 wiedergegebene Erscheinung, und erklärte sie durch die anomale Dispersion des Na-Dampfes, welcher in der Flamme eine prismatische Gestalt mit horizontaler brechender

Fig. 1.

Kante besafs. Als notwendig für das Gelingen des Versuches bezeichnete es Kundt, dafs der Dampf eine grofse Dichte besitzt, so grofs, dafs die Absorptionslinien stark verbreitert sind und der ganze Zwischenraum zwischen den beiden *D*-Linien im Absorptionsgebiet liegt. Durch diese irrtümliche Ansicht wurde er verhindert, die sehr interessante Erscheinung der anomalen Dispersion im Gebiete zwischen den beiden *D*-Linien nachzuweisen. Das gelang erst H. Becquerel.[2])

Er benutzte die Anordnung der gekreuzten Spektren in folgender Form. Durch eine Linse wurde das Bild des positiven Kraters einer Bogenlampe auf den horizontalen Spalt eines Spektralapparates geworfen. Die durch die Kollimatorlinse parallel gemachten Strahlen passierten anstatt eines Prismas eine Bunsenflamme, in welche auf einem dünnen rechteckig gebogenen Platinblech an passender Stelle ein Natriumsalz eingeführt war. Durch das Blech nimmt die Flamme die in Fig. 2

1) A. Kundt. Wied. Ann. **10**, 321—325, 1880.

2) H. Becquerel. Comptes rendus **127**, 647—651, 899—904, 1898; **128**, 145—151, 1899.

Digitized by Google

dargestellte Gestalt an; die schraffierten Stellen bedeuten zwei von glühendem Na-Dampf gelb gefärbte Teile der Flamme, welche eine doppel-prismatische Gestalt haben. Mit Hilfe des Beobachtungsfernrohres, dessen Okular herausgeschraubt war, wurde nun ein Bild des horizontalen Spaltes auf dem vertikalen Spalt eines zweiten Spektralapparates entworfen, bei welchem das Spektrum mit Hilfe eines Rowlandschen Gitters erzeugt wurde.

Fig. 2.

Die beobachtete Erscheinung zeigt Fig. 3. Geht das Licht durch denjenigen Teil der prismatischen Flammen, bei welchem die horizontale brechende Kante oben liegt, so werden die Strahlen mit etwas gröfserer Wellenlänge als D_1 und D_2 nach unten, die Strahlen mit etwas kleinerer Wellenlänge als D_1 und D_2 nach oben abgelenkt. Dieser Fall ist in Fig. 3a so dargestellt, wie man ihn in dem Beobachtungsfernrohr des zweiten Spektralapparates sieht, also umgekehrt. Die durch die untere Hälfte der Flammenprismen hervorgebrachte Erscheinung, bei welcher die

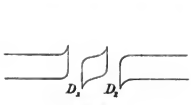


Fig. 3a.

Fig. 3b.

brechende Kante unten liegt, zeigt Fig. 3b. Diese Beobachtungen lehren, dafs der Brechungsindex der an die Linie D_1 und D_2 nach rot hin sich unmittelbar anschliefsenden Gebiete ungewöhnlich grofs ist, derjenige der nach violett hin gelegenen Gebiete ungewöhnlich klein, kleiner als 1. Das enge Spektralgebiet zwischen beiden D-Linien nimmt daher die eigentümlich gekrümmte Gestalt an.

Noch näher an die D-Linien heran als Becquerel konnte W. H. Julius[1]) mit der analogen Versuchsanordnung die anomale Dispersion des Natriumdampfes verfolgen, die am meisten abgelenkten Strahlen des Spektrums in unmittelbarer Nähe der D-Linien gingen bis dicht an diese Linien heran, die Differenz der Wellenlängen zwischen den äufsersten Ausläufern des abgelenkten Bogenlampenlichts und den D-Linien selbst betrug nach seinen Messungen weniger als 0,01 $\mu\mu$. Das von ihm beobachtete Spektralbild ist in Fig. 4 wiedergegeben.

1) W. H. Julius. Phys. Z.-S. **2**, 348—353 und 357—360, 1901.

Digitized by Google

Für die Hauptabsorptionslinien der anderen Elemente gelten die gleichen theoretischen Gründe für das Vorhandensein der anomalen Dispersion wie für das Natrium, und es ist wohl keine zu kühne Hypothese, dafs bei ihnen allen anomale Dispersion vorhanden ist. Nachgewiesen ist eine solche bis jetzt aufser bei Na nur bei K, Tl und Li. Dabei wird wahrscheinlich die Gröfse der Dispersion für die verschiedenen Elemente und für verschiedene Linien des gleichen Elements sehr verschieden sein. So ist schon bei Na deutlich zu sehen, dafs die anomale Dispersion bei der Linie D_2 gröfser ist als bei D_1.

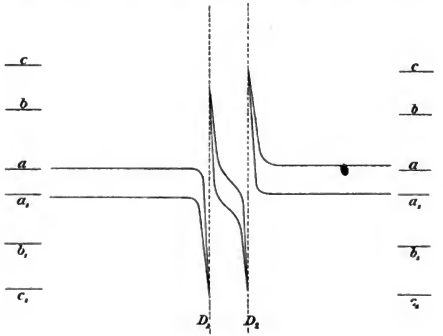


Fig. 4.

Ebenso wie eine prismatische Gestalt des Gases mufs eine von Ort zu Ort veränderliche Dichte wirken, und zwar ist eine von unten nach oben abnehmende Dichte einem Prisma äquivalent, dessen brechende Kante horizontal und oben liegt.

Von der gröfsten Bedeutung für die Sonnenphysik sind die Schlüsse, welche Julius aus diesen Beobachtungen zieht. Denken wir uns einen Beobachter, der mit seinem Spektralapparat so weit von der Na-Flamme entfernt ist, dafs er nicht die ganze in Fig. 4 dargestellte Erscheinung zu überblicken vermag, sondern nur einen Teil davon. Diesem Beobachter wird es sehr schwer fallen, die Erscheinungen, die er sieht, richtig zu erklären.

Wenn er nur den zwischen den horizontalen Linien a und a_1 liegenden Teil der Erscheinungen sieht, so hat er ein Spektrum vor sich, in welchem die D-Linien als sehr breite dunkle Banden ausgebildet sind.

Digitized by Google

Er wird wahrscheinlich annehmen, dafs diese dunklen Banden verbreiterte Absorptionslinien sind, dafs also das hier fehlende Licht durch Na-Dampf von grofser Dichte absorbiert worden ist. Und doch ist, wie wir wissen, dieses Licht in Wirklichkeit nicht absorbiert worden, sondern es ist durch Brechung an einen anderen Ort gelangt, nämlich zwischen die Linien a und c, resp. a_1 und c_1. *Die anomale Dispersion kann uns also eine Verbreiterung von Absorptionslinien vortäuschen.*

Im Spektrum der *Sonnenflecken* nun sehen wir die Fraunhoferschen Linien teilweise sehr stark verbreitert, so daß ganze Teile des Spektrums wie weggelöscht erscheinen. Während ein Teil der dunklen Linien nahe das gleiche Ansehen zeigt wie im Spektrum der normalen Photosphäre, sind andere Linien fast ganz unsichtbar, und Linien werden stark und breit, welche sonst schwach und dünn sind. Bisher hat man alle diese Erscheinungen als Absorptionsvorgänge betrachtet und darauf zurückgeführt, dafs in den Sonnenflecken einige Substanzen, deren Linien stark verbreitert sind, in besonders grofser Dichte vorhanden sind, während die übrigen teils normale, teils eine geringere Dichte besitzen, als in der umgebenden Sonnenatmosphäre. Aber vielleicht befinden wir uns hier in der Lage des oben angenommenen Beobachters, vielleicht beruht die beobachtete Verbreiterung der Fraunhoferschen Linien nicht auf Absorption sondern auf anomaler Dispersion, und das fehlende Licht ist nach Stellen hingebrochen worden, wo wir es nicht sehen. Dann müfsten wir annehmen, dafs die Sonnenflecken Stellen sind, an welchen die Dichtigkeit der gasförmigen Sonnenmaterie von Ort zu Ort stark variiert. Eine solche Dichtigkeitsänderung — und zwar zunehmende Dichte von innen nach aufsen — würde sich z. B. ergeben, wenn man die Flecken als Wirbelbewegungen in der Sonnenatmosphäre auffafst, wie Faye, oder als stark absteigende Strömungen, wie Spörer. Aus dieser Annahme würde sich nach der Schmidtschen Sonnentheorie auch die Lichtverteilung in den Sonnenflecken, der Kern- und der Halbschatten, erklären lassen.

Wenn nur derjenige Teil der Erscheinung (Fig. 4) in das Gesichtsfeld gelangt, welcher zwischen den Linien b und c resp. b_1 und c_1 liegt, so wird der Beobachter zwei feine helle Linien sehen, die in unmittelbarer Nähe der D-Linien liegen und nur mit grofser Schwierigkeit von diesen zu unterscheiden sind. Sehr wahrscheinlich wird er glauben die D-Linien selbst zu erblicken und Licht vor sich zu haben, welches als Eigenlicht von leuchtendem Na-Dampf ausgesendet wird. *Die anomale Dispersion kann uns also ein Linienspektrum vortäuschen*, während in Wirklichkeit das Licht, das wir sehen, nicht von Na-Dampf emittiert wird, sondern von einer mit kontinuierlichem Spektrum leuchtenden Strahlungsquelle herrührt.

Digitized by Google

Auf der Sonne sehen wir ein aus hellen Linien bestehendes Spektrum einmal als das oben erwähnte Flashspektrum, dann als Spektrum der Chromosphäre und der Protuberanzen. Obwohl kein Zweifel besteht, dafs in der Chromosphäre auch leuchtende Gase vorhanden sind, so wollen wir doch einmal versuchen, diese Erscheinungen unter der Annahme zu betrachten, dafs das von uns beobachtete Licht nicht das Eigenlicht der leuchtenden Gase ist, sondern ganz oder wenigstens zum gröfsten Teil aus dem weifsleuchtenden Sonneninnern stammt und durch anomale Dispersion so gebrochen ist, dafs wir es aufserhalb des scheinbaren Sonnenrandes sehen. Sei ZZ (Fig. 5) die kritische Sphäre, so wird im allgemeinen ein Lichtstrahl, der bei A nahe tangential aus ihr austritt, auf dem infolge der allgemeinen Strahlenbrechung schwach gekrümmten Wege AO nach O gelangen, wo der Beobachter sich befinden möge. Ist über A eine glühende Gasmasse, z. B. Na-Dampf, von ungleicher Dichte, so wird dasjenige Licht, dessen Schwingungszahl denen

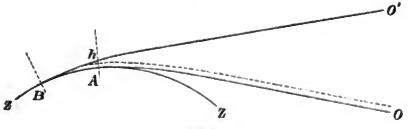


Fig. 5.

der Spektrallinien des Gases sehr nahe liegt, z. B. das den D-Linien benachbarte Licht, infolge der anomalen Dispersion eine stärkere Ablenkung erfahren als das übrige Licht. Es werden also von diesen Wellenlängen Strahlen von h nach O gelangen, welche die kritische Sphäre nahe tangential etwa in B verlassen haben, in einem Punkte, von welchem das gewöhnlich gebrochene Licht nicht nach O, sondern nach O' wandert, dem Beobachter in O daher unsichtbar ist. Dieser wird also über dem scheinbar durch die kritische Sphäre ZZ begrenzten Sonnenball ein Gebiet sehen, welches ein helles Linienspektrum zeigt.

Das Chromosphärenspektrum ist im allgemeinen desto einfacher, desto ärmer an Linien, je weiter wir uns vom Sonnenrande entfernen, am linienreichsten ist das Flashspektrum, welches den unmittelbar an den Sonnenrand angrenzenden Teilen zu entstammen scheint. Bei der alten Auffassung, dafs es sich ausschliefslich um Emissionsspektren leuchtender Gase handelt, mufs man daher annehmen, dafs die verschiedenen Substanzen in der Chromosphäre schichtenweise über einander liegen. Wenn wir dagegen das Chromosphärenlicht wesentlich als durch anomale Dispersion uns zugesandtes Photosphärenlicht ansehen, so

Digitized by Google

können wir uns die gasförmige Sonnenmaterie im wesentlichen als ein chemisch homogenes Gemisch vorstellen, ein Produkt vollkommener Diffusion. Dies erscheint als ein grofser Vorzug der Juliusschen Auffassung. Bei ihr ergiebt sich die Thatsache, dafs die verschiedenen Linien des Chromosphärenspektrums in verschiedener Entfernung vom Sonnenrande sichtbar sind, als eine Folge der verschieden starken anomalen Dispersion, der verschiedenen absoluten Dichtigkeit und daher verschiedenen Dichtigkeitsänderung der einzelnen mit einander gemischten Stoffe.

Wie ein Blick auf Fig. 4 zeigt, müssen die durch anomale Dispersion entstandenen Linien nach dem Sonnenrande hin dicker werden und in der That haben die Chromosphärenlinien eine eigentümliche nach' oben hin zugespitzte Gestalt. Ferner ist es fast allen Beobachtern aufgefallen, dafs die hellen Linien des Flashspektrums zwar im allgemeinen den Fraunhoferschen Linien entsprechen, aber doch einen anderen Charakter in Bezug auf ihre relative Intensität und auf ihre Lage im Spektrum haben. Dies würde sich nach der Juliusschen Hypothese ohne weiteres erklären. Da ferner lokale Dichtigkeitsabnahmen sowohl vom Sonneninnern nach aufsen hin, als auch — wenn auch wahrscheinlich etwas weniger häufig — von aufsen nach innen vorkommen werden, so werden sowohl die Strahlen, deren Brechungsindex ungewöhnlich groß ist, als auch die, deren Brechungsindex erheblich kleiner ist als 1, nach Art des Strahls BhO (Fig. 5) gebrochen werden. Daher hat Julius schon in seiner ersten Abhandlung darauf aufmerksam gemacht, dafs die Chromosphärenlinien eigentlich als feine Doppellinien erscheinen müfsten. Später ist es ihm gelungen[1]), auf Photographien des Flashspektrums, welche die holländische Expedition zur Beobachtung der Sonnenfinsternis vom 28. 5. 1901 auf Sumatra aufgenommen hatte, eine Verdoppelung sämtlicher Chromosphärenlinien zu entdecken. Nach alledem mufs man sich der Juliusschen Ansicht anschliefsen, dafs es mindestens möglich ist, alles Chromosphärenlicht als abgelenktes Photosphärenlicht aufzufassen, wenn auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen ist, dafs aufserdem noch Eigenlicht der Chromosphäre zu uns gelangt.

Wenn endlich nur der zwischen den Linien a und b, resp. a_1 und b_1 (Fig. 4) liegende Teil der Erscheinung zur Beobachtung gelangt, so sieht man zwei helle, ziemlich breite, gekrümmte Linien, deren Lage im Spektrum von der der D-Linien wenig, aber merklich abweicht. Wie würde ein Beobachter, der nichts von anomaler Dispersion weifs, die gesehene Erscheinung erklären?

1) W. H. Julius. Physik. Z. S. 3, 154—158, 1902.

Digitized by Google

Auf der Sonne sehen wir häufig solche verschobene und gekrümmte Linien im Spektrum der Chromosphäre, der Protuberanzen und in der Nähe von Sonnenflecken. Für sie gab es eine sehr einfache und wie es schien eindeutige Erklärung durch das Dopplersche Prinzip nach welchem die Linien eines leuchtenden Gases im Spektrum nach der violetten Seite hin verschoben sein müssen, wenn das Gas sich uns mit grofser Geschwindigkeit nähert, nach rot hin, wenn das Gas sich von uns entfernt. Man schlofs daher aus der Verschiebung der Spektrallinien auf sehr schnelle Bewegungen der leuchtenden Gasmassen auf der Sonne, und aus der Gröfse der Verschiebung konnte man die Geschwindigkeit der Bewegung berechnen. Diese Berechnung ergab für die Protuberanzen häufig Geschwindigkeiten bis zu mehr als 200, in einzelnen Fällen sogar bis zu 500 km in der Sekunde. Diese ungeheuren Zahlen sind der Gegenstand grofser Verwunderung gewesen, so spricht Roscoe von der „beinahe unglaublichen Heftigkeit, mit welcher die Bewegungen in der Sonnenatmosphäre auftreten", aber man hat doch an sie geglaubt und mufste wohl oder übel an sie glauben, so lange man keine andere Erklärung für die Verschiebung der Linien hatte. Das Dopplersche Prinzip, an dessen Richtigkeit nicht gezweifelt werden kann, löste das optische Problem der Linienverschiebung zwar vollkommen, aber es setzte an seine Stelle ein mechanisches Problem, welches unseren physikalischen Begriffen als vollständig unlösbar erscheint. Denn woher sollen diese ungeheuren Geschwindigkeiten kommen? Explosionen, welche durch plötzliche Auslösung labiler chemischer Kräfte hervorgebracht werden, sind in dem Gasozean der Sonne wohl ausgeschlossen. Es bleibt also nur die Annahme plötzlicher Ausdehnung übrig, welche durch eine gewaltige lokale Temperatursteigerung hervorgebracht wird. Der für die Erreichung grofser Geschwindigkeiten günstigste Fall wäre dabei der, dafs ein Gas aus einem geschlossenen Raum durch eine kleine Öffnung in das Vacuum ausströmt. Die maximale Geschwindigkeit, welche die Gasmasse als Ganzes dabei erreichen kann, wird durch die Gröfse gegeben, welche man in der kinetischen Gastheorie als die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Gasmoleküle bezeichnet. Diese würde für Wasserstoff den Wert von 200 km pro Sekunde aber erst bei einer Temperatur von 4 800 000° C erreichen!

Aus der anomalen Dispersion erklären sich die Verschiebungen der Spektrallinien ganz von selbst, ja die hellen gekrümmten Linien, welche häufig in unmittelbarer Nähe der Sonnenflecken auftreten, können ungezwungen als ein Teil desjenigen Lichtes aufgefafst werden, welches im Spektrum der Sonnenflecken an den Stellen der scheinbar verbreiterten Absorptionslinien fehlt.

Digitized by Google

Auch die Verzerrungen und Verschiebungen der dunklen Fraunhoferschen Linien, wie sie manchmal in der Nähe von Sonnenflecken und in der Nähe des Sonnenrandes auftreten, lassen sich ohne Zwang als Refraktionsanomalien auffassen.

Aber die Linienverschiebungen sind nicht das einzige Phänomen, aus welchem man auf so ungeheure Geschwindigkeiten der Sonnengase geschlossen hat. Bei den Protuberanzen sieht man im Telespektroskop direkt Änderungen der Gestalt und des Ortes, welche auf sehr grofse Bewegungen dieser Objekte hinweisen. Es werden hier für die Geschwindigkeiten in Richtung senkrecht zum Visionsradius Zahlen von der gleichen ungeheuren Gröfse gefunden, wie sie sich für die Geschwindigkeit im Visionsradius aus dem Dopplerschen Prinzip ergeben. Dabei tritt häufig, — darauf macht Julius aufmerksam — ein ganz unerklärlicher, sprunghafter Wechsel der beobachteten Geschwindigkeit ein. So nahm bei einer von Fenyi am 15. 7. 1889 beobachteten Protuberanz im Verlauf von 10 Minuten die Geschwindigkeit die Werte von 72, 6, 65, 24, 154 km in der Sekunde an! Diese direkt beobachteten Bewegungen hätte man wohl nicht als wirkliche Bewegungen betrachtet, sondern durch einen schnellen Ortswechsel des leuchtenden Zustandes[1]) erklärt, wäre die Linienverschiebung nicht gewesen, für welche keine andere Erklärung vorhanden war, als die, dafs es sich um wirkliche Bewegungen handelt.

Nachdem die Juliussche Hypothese eine andere, plausiblere Erklärung der Linienverschiebung gestattet, können wir auch die direkten Protuberanzenbewegungen als scheinbare betrachten. Im Anschlufs an die Helmholtzsche Theorie der Luftwellen in der Erdatmosphäre hat R. Emden[2]) eine Theorie der Sonne gegeben, welche die Sonnenflecken als Wirbel auffafst, die in gewisser gesetzmäfsiger Anordnung durch das Zusammenwirken der Wärmeausstrahlung und der Rotation der Sonne entstehen. Während Emden aber die Sonne als eine begrenzte Kugel behandelte, fafst sie Julius[3]) als kontinuierlichen Gasball im Sinne der Schmidtschen Theorie auf und betrachtet die Protuberanzen als die durch ihre anomale Lichtbrechung sichtbaren Teile der Wirbel oder „Schaumwellen“ des Sonnenozeans. „Wenn also eine Protuberanz aufzusteigen scheint, bedeutet dies nur, dafs die Brandung sich an verschiedenen Stellen nach einander zeigt. Die unteren, dem Rande näheren Partien werden nach Ausgleichung der in den Wirbeln bestehenden

1) Vgl. z. B. C. A. Young: Die Sonne. Leipzig 1883. p. 208.
2) R. Emden. Ann. d. Physik. 7, 176—197, 1902.
3) W. H. Julius Phys. Z. S. 4, 85—90 und p. 132—136, 1902.

Digitized by Google

Dichtigkeitsunterschiede wieder unsichtbar, höhere Partien, wo die Wirbelung im allgemeinen später eintritt, leuchten auf, und weil es also nicht die nämliche Materie ist, welche man in den aufeinanderfolgenden Phasen einer Protuberanz erblickt, sondern weil immer andere Teile der Gasmasse durch anomale Dispersion sichtbar werden, giebt es gar kein Aufsteigen mit riesenhafter Geschwindigkeit."

Ob diese Theorie richtig ist, und ob ein so schnelles Fortschreiten der Wirbelung und Brandung auf der Sonne wahrscheinlich ist, möge dahin gestellt bleiben. Jedenfalls aber bietet die Annahme der anomalen Dispersion auch ohne eine so spezielle Hypothese über die Natur der Protuberanzen eine einfache Erklärung der scheinbar so schnellen Ortsänderungen. Denn bei der gekrümmten Bahn der Lichtstrahlen genügt eine kleine Änderung des Dichtigkeitsgefälles in Gröfse oder Richtung, um den an einer Stelle anomal abgelenkten Strahlen in den entfernteren Teilen der ungleich dichten Gasschicht ganz andere Bahnen anzuweisen als vorher und sie in einer merklich geänderten Richtung dem Fernrohr des Beobachters zuzuführen.

Vielleicht die rätselhafteste Thatsache der Sonnenphysik ist die, dafs im Spektrum derselben Protuberanz oder derselben Stelle in der Nähe eines Sonnenflecks nicht nur die Linien eines Elements starke Verschiebungen und Verzerrungen zeigen, während die Linien der anderen Elemente unverschoben sind, sondern dafs auch die verschiedenen Linien eines und desselben Elementes mitunter ein ganz verschiedenes Verhalten zeigen. Einige erscheinen in ihrer gewöhnlichen geraden Gestalt an ihrem richtigen Platze im Spektrum, andere sind verzerrt und verschoben. Diese Erscheinung glaubte Lockyer nicht anders erklären zu können als durch die sehr kühne und radikale Hypothese, dafs auf der Sonne die Atome unserer chemischen Elemente dissoziiert sind, daß sie in Uratome zerlegt sind. Was allen Bemühungen der irdischen Chemiker bisher nicht gelungen ist, die chemischen Elemente in einfachere Bestandteile zu zerlegen, das soll auf der Sonne infolge der hohen Temperatur von selbst eingetreten sein. Auch zur Erklärung dieses verschiedenen Verhaltens der verschiedenen Spektrallinien giebt die Juliussche Hypothese zum wenigsten die prinzipielle Möglichkeit. Die Erklärung gestaltet sich am einfachsten, wenn man annimmt, dafs ein Teil der sichtbaren Linien der Eigenstrahlung der Gase angehört, ein Teil durch anomale Dispersion erzeugt ist.

Die Berücksichtigung der Brechung und Dispersion auf der Sonne ist somit im stande den gröfsten Teil der auf der Sonne beobachteten Erscheinungen einfach und einheitlich zu erklären, ohne sich irgendwo in Widerspruch mit bekannten physikalischen Thatsachen zu setzen.

Digitized by Google

In dieser Beziehung ist die neue Theorie allen früheren Anschauungen über das Wesen der Sonne und ihrer Phänomene wesentlich überlegen. Aber noch ist eine grofse Arbeit zu thun, ehe sich entscheiden läfst, wie weit die neue Anschauung im stande ist und genügt, alle Einzelheiten der Beobachtung verständlich zu machen. Dafür können einerseits Versuche im Laboratorium herangezogen werden, welche uns die anomale Dispersion der Gase genauer und bei einer gröfseren Anzahl von Elementen kennen lehren als bisher, andererseits lassen sich aus den Grundlagen der Theorie Schlüsse auf die zu erwartenden Phänomene ziehen, welche durch eine genauere Durchführung der Sonnenbeobachtung geprüft werden können. Wenn man aber das bisher schon Geleistete überblickt, wird man es als zum mindesten nicht unbescheiden bezeichnen müssen, wenn Julius seine grundlegende Arbeit mit den Worten schliefst: „Zweifellos darf in Zukunft keine Theorie der Sonne die Gesetze der Refraktion aufser Acht lassen".

Es ist bemerkenswert, dafs schon Kundt in seiner Arbeit über anomale Dispersion leuchtenden Na-Dampfes darauf aufmerksam gemacht hat, dafs diese Erscheinung wichtige astrophysikalische Anwendungen zuläfst. Denn mit der Dispersion und Absorption gehe die Reflexion Hand in Hand, und die anomal dispergierenden Gase müssen daher ein besonders starkes Reflexionsvermögen für Licht derjenigen Wellenlängen haben, welche sie absorbieren. „Man könnte sich sogar als extremsten Fall eine nicht leuchtende, sehr dichte Gasmasse in unserem Sonnensystem denken, welche auswählende Absorption und mithin für viele einzelne Strahlenpartien auswählendes Reflexionsvermögen besitzt. Eine solche Gasmasse, von der Sonne intensiv beleuchtet, würde ohne selbstleuchtend zu sein, ein diskontinuierliches Spektrum durch Reflexion zeigen." Dieser Gedanke Kundts, welcher unbeachtet geblieben zu sein scheint, wird vielleicht noch einmal eine grofse Bedeutung gewinnen. Jedenfalls ist es interessant, wie nahe Kundt schon bei der Entdeckung der anomalen Dispersion des Na-Dampfes an dem Gedanken gewesen ist, den Julius 20 Jahre später bei der genaueren Untersuchung dieser Erscheinung zur Grundlage seiner Sonnentheorie gemacht hat. Der Fermatsche Satz, welcher allen Lichtstrahlen diejenigen Bahnen anweist, auf denen sie ihr Ziel so schnell wie möglich erreichen, scheint keine Macht zu haben über das Licht, welches der Fackel der Wissenschaft entströmt.

Berlin, den 30. November 1902.

Digitized by Google

Rezensionen.

E. Bardey. Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Fünfte Auflage bearbeitet von F. Pietzker. Leipzig 1902, B. G. Teubner. 8^0. XVI u. 420 S. geb. *M*. 8. —

Es ist sehr erfreulich, dafs die algebraischen Gleichungen von Bardey in einer neuen Auflage, der fünften, erscheinen konnten. Man erkennt hieraus, dafs das Buch noch heute, wie vor 30 Jahren, gern benutzt wird. Es kann gemäfs dem von Pietzker im Vorwort der neuen Auflage geäufserten Wunsche, und wie es Erler in der Zeitschrift für das Gymnasialwesen N. F. Bd. VI S. 843 ff. ausführlicher begründet hat, in der Hand des Lehrers ganz aufserordentlichen Nutzen stiften. Ref. möchte das Buch aber besonders auch den Studierenden empfehlen. Bardeys algebraische Gleichungen sind äufserst geeignet, die Lust an der niederen Mathematik wach zu erhalten, die Lust an einem frischen, fröhlichen Rechnen.

Die Bearbeitung der neuen Auflage hat Pietzker in höchst dankenswerter Weise durchgeführt. Er hat sich dabei unter Festhaltung alles Wesentlichen der bewährten Aufgabensammlung auf Verbesserungen im einzelnen beschränkt, Verbesserungen, welche die Brauchbarkeit des Buches indes noch erhöht haben.

Zunächst ist der sprachliche Ausdruck vielfach berichtigt. Undeutsche Partizipialkonstruktionen wie z. B. „Die Wurzeln aus dem Nenner im 3. Gliede fortgeschafft, erhält man ...“ S. 19 IV. Aufl. oder „Hiernach und für $\frac{1}{t}$ die zweite Formel in (3) benutzt, hat man ...“ S. 168 IV. Aufl. sind beseitigt, eine Reihe solcher Konstruktionen ist freilich noch stehen geblieben, z. B. S. 118 V. Aufl. „Hier x in der gewöhnlichen Weise bestimmt, kommt die angegebene Form der Lösung“ und S. 175 V. Aufl. „Dies mit (7) multipliziert, fällt λ heraus.“ Weitere Verbesserungen sprachlicher Natur betreffen einzelne Ausdrücke. So heifst es in der neuen Auflage S. 70 „Man verfahre entsprechend wie“ statt „ganz, wie“, S. 100 „Strecken“ statt „Linien“, S. 135/6 „Die ganzzahligen Teile“ statt „Die Ganzen“, S. 202 und an anderen Stellen „man drücke aus mittels“ statt „man suche, unbekümmert um“, S. 284 „um zu ermitteln“ statt „um zu wissen“. „Dividieren in“ ist vermieden, während sich früher „dividieren in“ und „dividieren durch“ fand. Auch mehrere Kapitelüberschriften zeigen Ausdrucksberichtigungen. Es sei gestattet, noch zwei kleine Wünsche auszusprechen: Bei Gleichungssystemen für mehrere Unbekannte ist der Singularis Gleichung zu vermeiden (z. B. S. 378 unten). Bei „einsetzen“ und „sub-

Digitized by Google

stituieren" dürfte es sich empfehlen, einheitlich die Frage „wohin" zu stellen und nicht „einsetzen" mit „wohin", substituieren dagegen mit „wo" zu konstruieren.

Was die sachlichen Verbesserungen der neuen Auflage anbetrifft, so sind im II. Teil mehrfach die Lösungen 0 hinzugefügt. Die Lösung ∞ wurde nicht mehr angeführt, wenn nicht schon die Aufgabe Brüche enthielt. Zu beseitigen ist noch bei Gleichung 100 S. 220 die Lösung $x = y = 0$, welche nur die abgeleiteten Gleichungen $x^2 + y^2 = ax^2y^2$; $axy = y + x$ befriedigt, dagegen nicht das ursprüngliche Gleichungssystem: $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = axy = x + y$. Sehr dankenswert ist auch die sorgfältige Durchsicht der bei vielen Aufgaben angegebenen Lösungsmethoden und die Vermehrung der diesbezüglichen Angaben. Hervorgehoben sei, dafs neben den von Bardey so stark bevorzugten Methoden der „korrespondierenden Addition" und des „Korrespondenzsatzes", auf die ja so viele Aufgaben geradezu zugeschnitten sind, von Pietzker mehrfach andere Lösungswege geebnet werden, dafs insbesondere verschiedentlich trigonometrische Behandlungen hinzugefügt sind, und dafs die Entwickelungen über symmetrische Gleichungen wesentlich verbessert sind. Eine Klarstellung hätte Ref. noch hinsichtlich der Mehrdeutigkeit des Wurzelzeichens gewünscht. Bardey-Pietzker sagt S. XII: „2) Die Quadratwurzeln sind fast durchgehends nur mit einem Zeichen versehen, ihre Doppeldeutigkeit wird als selbstverständlich angenommen." Gilt das auch für die Wurzeln in den Aufgaben, und es wird ja ganz allgemein ausgesprochen, so stellt eine Aufgabe wie 301 S. 94 $\sqrt{x-1} - \sqrt{a-1} = \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$ vier Gleichungen dar. Hierauf wäre hinzuweisen gewesen. Weshalb ist aber vor einer der Wurzeln das Minuszeichen gewählt? Soll die Bemerkung 2), S. XII dagegen nur bei den Lösungen gelten, so ist dies klarzustellen und zu unterscheiden zwischen der allgemeinen $n$ten Wurzel mit $n$wertigem Argument und der besonderen mit dem kleinsten positiven Argument. Auch vermifst Ref. dann einen Hinweis auf die Notwendigkeit der Untersuchung, ob die Wurzeln der abgeleiteten Gleichungen (ganze rat. $F. = 0$) auch die ursprüngliche Aufgabe befriedigen. — Die 5. Auflage bringt ferner an verschiedenen Stellen Vermehrungen des Aufgabenmaterials. Endlich ist der innere Zusammenhang der Aufgaben mehrfach durch einleitende Bemerkungen schärfer hervorgehoben und zum Teil eingehender begründet, so für die Aufgaben zur „korrespondierenden Addition" und zum „Korrespondenzsatz".

Der Druck ist ausgezeichnet klar und noch besser als früher. Leider finden sich zuviel Druckfehler, weit mehr als in der alten Auflage. Die vier auf S. 420 angegebenen bilden nur einen kleinen Bruchteil der vom Ref. bemerkten. Wenn auch die meisten sofort in die Augen fallen, so dürfte es sich doch empfehlen, ein erweitertes Druckfehlerverzeichnis auszugeben.

Ref. schliefst mit dem Danke gegen den neuen Herausgeber und dem Wunsche, dafs Bardeys algebraische Gleichungen auch in Zukunft recht viele Freunde finden mögen, so wie sie es verdienen.

Schöneberg. E. Kullrich.

Digitized by Google

Riem's Rechentabellen für Multiplikation. Hülfsbuch für Handel und Gewerbe mit einem Vorwort von Kinkelin. Zweite Stereotypauflage. München 1901. Ernst Reinhardts Verlag. XI u. 196 S. ungeb. *M.* 6, geb. *M.* 7,50.

Die recht praktischen und, soweit es die angestellten Stichproben den Ref. erkennen ließen, durchaus zuverlässigen Rechentabellen von Riem sind in der 2. Auflage insofern vermehrt, als Tafeln für die Einer zugefügt sind, während man bei der 1. Auflage hier auf die bezüglichen Tafeln für die Zehner angewiesen war; hinzugefügt ist auch eine Tafel für 10. Da die Erweiterung „infolge geäußerter Wünsche" geschehen ist, so sind die Tafeln für manchen Benutzer wohl bequemer zum Gebrauch geworden; als störend dürfte andererseits die geringe Vermehrung von dem, dem sie keine Dienste leistet, kaum empfunden werden. Ausstattung und Druck sind gut und machen die Benutzung der Tabellen im Bedarfsfalle empfehlenswert.

Schöneberg. E. Kullrich.

L. E. Dickson. Linear groups with an exposition of the Galois field theory. B. G. Teubners Lehrbücher der mathematischen Wissenschaften VI. Leipzig, 1901. 8^0. X u. 312 Seiten, geb. *M.* 12.—

Das vorliegende Werk zerfällt in zwei Teile, von denen der erste der Theorie des Galoisschen Feldes gewidmet ist. Ein System von s verschiedenen Elementen $u_1, u_2, \cdots, u_s$, welche nach den vier Fundamentaloperationen, — Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division [ausgenommen die Division durch die dem System notwendig angehörige Null], — mit einander verknüpft werden, so daß bei der Verknüpfung alle gewöhnlichen Regeln der Algebra befolgt werden:

$$u_i + u_j = u_j + u_i, \quad u_i u_j = u_j u_i,$$

$$u_i (u_i + u_j) = u_i u_i + u_i u_j, \quad \text{u. s. w.}$$

und das Resultat der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division stets ausnahmslos eines und nur eines der s Elemente des Systemes ergibt, heißt nach Herrn Moore (Mathematical papers read at the international mathematical congress. 1893, p. 210) ein Feld (field) $F[s]$. Ein derartiges System ist übrigens gleichzeitig von Herrn H. Weber (Math. Annalen **43**, 527) als endlicher Körper bezeichnet worden.

Bedeutet p im folgenden ausnahmslos eine Primzahl, und betrachtet man die Gesamtheit aller ganzzahligen positiven und negativen Zahlen mod p, so repräsentieren die durch die p inkongruenten Reste 0, 1, 2, ..., $p-1$ dargestellten Zahlklassen ein Feld $F[p]$. Erweitert man das Gebiet der ganzen, mod p genommenen Zahlen zu dem der ganzen, ganzzahligen Funktionen einer Variablen x, die bezüglich des Modulsystemes $[p, P(x)]$ betrachtet werden, und nimmt dabei an, daß $P(x)$ eine ganze, ganzzahlige, mod p irreduzible Funktion ist, $P(x)$ ist also nicht von der Form $P_1(x) \cdot P_2(x) + p \cdot P_3(x)$, wobei $P_i(x)$ $(i=1, 2, 3)$ ganze ganzzahlige Funktionen von x bedeuten und $P_1(x)$, $P_2(x)$ niedrigeren Grad als $P(x)$ haben,

Digitized by Google

so erhält man statt der früheren p Zahlen die p^n bezüglich des Modulsystemes inkongruenten Reste:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1};$$

hierbei nehmen die a_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ alle Werte 0, 1, 2, $\cdots$, $p-1$ an, n bedeutet den Grad von $P(x)$. Die gefundenen p^n Funktionen, die Imaginären von Galois, in denen eine jede ganze, ganzzahlige Funktion ihren Vertreter hat, bilden auch ein Feld $F[p^n]$, das von Moore sogenannte Galoissche Feld $GF[p^n]$. Verfasser beweist im ersten Kapitel den interessanten Mooreschen Satz: Jedes mögliche $F[s]$ hat in einem $GF[p^n]$ seinen Vertreter, $s = p^n$; das $GF[p^n]$ ist unabhängig von der speziellen Wahl der irreduziblen Funktion $P(x)$; es wird durch p und n völlig charakterisiert. Letzteres Resultat war übrigens, wie ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Stickelberger entnehme, bereits im Grunde Galois (Oeuvres, p. 17) bekannt.

Ehe Referent in der Berichterstattung fortfährt, möchte er darauf hinweisen, dafs man auch statt der Theorie des Galoisschen Feldes die Idealtheorie in ganz gleichwertiger Weise herbeiziehen könnte. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal $f$ten Grades eines Körpers k, also die Norm von $\mathfrak{p}$ gleich der $f$ten Potenz der rationalen Primzahl p, so ist die Anzahl der nach dem Ideal $\mathfrak{p}$ unter einander inkongruenten ganzen Zahlen des Körpers k gleich p^f; diese p^f Zahlen bilden offenbar, wie aus dem Begriff des Primideals hervorgeht, ein $F[p^f]$. Ferner kann man auch stets einen Körper k mit Primidealen $\mathfrak{P}$ finden, deren Norm einen vorgegebenen Wert p^n hat; im Kreiskörper der (p^n-1)ten Einheitswurzeln nämlich ist die Primzahl p in Primideale $n$ten Grades zerlegbar. (Vgl. Hilbert, die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht, erstattet der deutschen Mathematikervereinigung. 1897, Satz 125, p. 333).

Doch kehren wir zu dem vorliegenden Werke zurück! Kapitel II liefert den Existenzbeweis, dafs für jede Primzahl p und jede beliebige ganze positive Zahl n ein $GF[p^n]$ vorhanden ist, Kapitel III und IV handeln von verschiedenen Eigenschaften der Gröfsen des Galoisschen Feldes. Kapitel V beschäftigt sich zunächst in Ausdehnung Hermitescher Ideen mit den ganzen Funktionen $\Phi(\xi)$ mit Koeffizienten aus dem $GF[p^n]$ für welche, wenn $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{p^n-1}$ alle Elemente des $GF[p^n]$ bedeuten, auch $\Phi(\mu_0), \Phi(\mu_1), \Phi(\mu_2), \cdots, \Phi(\mu_{p^n-1})$ ebenfalls alle Elemente des $GF[p^n]$ nur eventuell in anderer Reihenfolge ergeben. Diese Funktionen sind zur analytischen Darstellung von Permutationen unter den p^n Elementen des $GF[p^n]$ geeignet; sie führen den Verfasser auf eine von Betti und Mathieu untersuchte Gruppe, die sich im $GF[p^{mn}]$ mit Jordans linearer homogener Gruppe in m Variablen, deren Koeffizienten dem $GF[p^n]$ angehören, als identisch erweist. Hiermit schliefst der erste einleitende Teil.

Den Inhalt des gröfseren zweiten Teiles, der mehr als $^3/_4$ des Buches umfafst, kann man wohl, wie mir scheint, am besten charakterisieren, wenn man ihn mit den entsprechenden Teilen von C. Jordans Traité des substitutions et des équations algébriques (1870) (S. 91—249) vergleicht. Jordan behandelt im wesentlichen von Kongruenzgruppen aufser der linearen homogenen Gruppe, deren Substitutionen durch:

$$x_i' = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)$$

Digitized by Google

dargestellt werden und deren Elemente a_{ik} mit nicht verschwindender Determinante $|a_{ik}|$ dem $GF[p]$ angehören, von den Untergruppen der linearen homogenen Gruppe, die orthogonale Gruppe, die Abelsche lineare Gruppe, deren Substitutionen eine alternierende bilineare Form in sich transformieren, sowie die zwei hypoabelschen Gruppen. (Vgl. auch zur Orientierung die Encyklopädie der math. Wiss. Bd. I, S. 214 No. 10 u. S. 216, No. 12.) Bei Dickson wird die Untersuchung bald für das $GF[p^n]$ geführt, aufser der Verallgemeinerung weicht auch die Darstellung sowohl im Beweisverfahren als auch in der Anordnung, vielfach und wesentlich von Jordans Traité ab, ferner hat sich der Stoff in reichstem Mafse vermehrt. Ich möchte da zunächst die Untersuchung der Gruppen linearer homogener Substitutionen mit Koeffizienten aus dem $GF[p^n]$, welche eine quadratische Form nicht verschwindender Determinante mit Koeffizienten aus dem $GF[p^n]$ in m Variablen invariant lassen, hervorheben. (Kap. VII u. VIII des zweiten Teiles.) Für $p > 2$ und ungerades m führt dieses Problem zwar nicht über die orthogonale Gruppe heraus, wohl aber für $p > 2$ und gerades m, wodurch ein vom Verfasser gefundenes neues dreifach unendliches System einfacher Gruppen der Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}\left[p^{m(m-1)} + \varepsilon^{\frac{m}{2}} p^{n\left(\frac{m}{2}-1\right)}\right] \cdot (p^{n(m-2)} - 1) \cdot p^{n(m-3)} \cdots (p^{2n} - 1) \cdot p^{n}$$

$$(p > 2;\ m > 2;\ \varepsilon = \pm 1,\ \text{je nachdem } p^n = 4l \pm 1;\ m = 2r)$$

definiert wird. Die durch die Behandlung der quadratischen Formen im $GF[p^n]$ erzielten Resultate sind auch vorzüglich deswegen interessant, weil sie im Falle $p = 2$ und eines geraden m auf zwei Scharen einfacher Gruppen führen, und diese für den Spezialfall $n = 1$ sich als identisch mit den zwei Jordanschen hypoabelschen Gruppen erweisen. Von weiterem neuen Material, das wir dem Verfasser verdanken, fallen die von ihm sogenannte hyperabelsche Gruppe (Kap. IV), die hyperorthogonale Gruppe (Kap. V), die detaillierte Behandlung einer bei Jordan (a. a. O. p. 219) erwähnten, auf Kronecker zurückgehenden Gruppe (Kap. III), die linearen Gruppen mit Invarianten von höherem als zweitem Grade (Kap. IX) auf.

Ein Kapitel (XII) handelt von den Untergruppen der linear gebrochenen Gruppe:

$$z' = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

wobei a, b, c, d dem $GF[p^n]$ angehören; die vollzählige Aufzählung aller Untergruppen dieser für $n = 1$ in Galois' berühmtem Briefe (Oeuvres de Galois, p. 27) auftretenden Gruppe wird Gierster (Math. Annalen **18**) verdankt; für das $GF[p^n]$ hatte Dickson eingehende Untersuchungen von Moore, Burnside und Wiman als Vorarbeiten. Moores bereits oben zitierter Aufsatz hat, wie mir aus der Vorrede scheint, den Verfasser die Bedeutung des $GF[p^n]$ für die Gruppentheorie erkennen gelehrt und ihn veranlasst, dieses fruchtbare Gebiet zu durchforschen.

Mit grofsem Interesse wird man auch den Darlegungen über die einfache Gruppe der Ordnung 25 920 folgen; dieselbe bietet sich, wie zuerst Jordan gefunden hat, als Untergruppe vom Index 2 bei der Gruppe der Gleichung der 27 Geraden einer kubischen Fläche dar. Dickson behandelt

Digitized by Google

auch diese Aufgabe (Kap. XIV) und zeigt den Isomorphismus der sich ergebenden Gruppe der Ordnung 25 920 mit einer von ihm konstruierten abstrakten Gruppe, die zu der quinären orthogonalen Gruppe im $GF[3]$ (Kap. XIII, p. 292) und zu drei weiteren Untergruppen der linearen homogenen Gruppe mit Koeffizienten aus dem Galoisschen Felde isomorph ist.

Weisen wir noch auf den Inhalt des letzten Kapitels hin! Dasselbe enthält einen summarischen Bericht über die bekannten Systeme einfacher Gruppen unter Angabe des zwischen einigen von ihnen bestehenden holoedrischen Isomorphismus; bemerkenswert erscheint der Nachweis von der Existenz zweier Systeme einfacher Gruppen der gleichen Ordnung:

$$\tfrac{1}{2}\,(p^{n(2m)}-1)\,p^{n(2m-1)}\,(p^{n(2m-2)}-1)\,p^{n(2m-3)}\cdots(p^{3n}-1)\cdot p^{n}$$

($m>2$; $p>2$ und Primzahl), die nicht isomorph sind (p. 309). Zu den in dem Werke aufgezählten einfachen Gruppen kommen übrigens nach einer Arbeit des Verfassers in den Transactions of the American Math. Society (Vol. II, p. 364) jetzt noch solche der Ordnung:

$$p^{6n}\,(p^{6n}-1)\,(p^{2n}-1) \text{ hinzu} \qquad (p \text{ Primzahl} > 2).$$

Das Werk schliefst mit der Aufzählung aller bekannten einfachen Gruppen, deren Ordnungszahl kleiner als eine Milliarde ist. Zu den aufgezählten 78 Gruppen ist jetzt noch eine der Ordnung 4 245 696 beizufügen. (Transactions, Vol. II, p. 389).

Vielleicht bin ich im vorstehenden Berichte schon zuviel in Einzelheiten, die allerdings den reichen Stoff nicht erschöpfen, eingegangen. Dem Kenner von Dicksons zahlreichen Originalarbeiten werden die angegebenen Resultate, — die Beweise des Buches weichen übrigens mehrfach von denjenigen der Arbeiten ab, — bekannt sein; jedoch wollte ich versuchen, auch dem Fernerstehenden ein Bild von Tendenz und Inhalt des trefflichen Werkes zu entwerfen.

Als Gesamturteil darf wohl gesagt werden: Dicksons Werk liefert eine vollständige, systematische und wohlgelungene Darstellung von dem ganzen Umfange unseres heutigen Wissens auf dem Gebiete der Kongruenzgruppen im Galoisschen Felde und zwar von seiten eines Gelehrten, der diese Theorie seit einigen Jahren mit glücklichstem Erfolge in eindringender Weise in einer grofsen Zahl von Publikationen durchforscht hat. Dafs von dem Buche viel Anregung, vorzüglich für die englisch sprechenden Länder, in denen ja die Gruppentheorie besonders gepflegt wird, ausgehen wird, erscheint mir sicher; hoffentlich führt aber Dicksons Werk auch in Deutschland diesem in seinen Ursprüngen zwar alten und bekannten, aber in neuer hoffnungsvoller Entwicklung befindlichen Gebiete Freunde zu, die sich bemühen werden, die reichen Schätze zu heben, welche das Feld noch unzweifelhaft in sich birgt.

Freiburg i. B. ——— Alfred Loewy.

E. Lemoine. Géométrographie ou art des Constructions géométriques. Collection Scientia, Phys.-Math. No. 18, Paris, C. Naud, Februar 1902, 87 Seiten, 2 Frcs.

Die ersten Anfänge dieser jungen Lehre reichen bis zum Jahre 1888 zurück, wo Herr Lemoine dem Congrès de l'Association française pour

Digitized by Google

l'Avancement des Sciences in Oran[1]) allgemeine Prinzipien über die Einfachheit in der Mathematik vorlegte; aus deren Anwendung auf die Geometrie hat sich die Geometrographie entwickelt. Herrn Lemoines Untersuchungen, an denen sich bald die Herren G. Tarry und E. Bernès beteiligten, gingen zunächst darauf hinaus, die bekannten Konstruktionen einer geometrischen Aufgabe in Bezug auf die Einfachheit ihrer Ausführung mit einander zu vergleichen und die geometrographische Konstruktion aufzusuchen, d. h. diejenige, welche bei Allgemeingültigkeit die geringste Anzahl von Operationen erfordert. Durch diese Untersuchungen ergab sich bald die merkwürdige Thatsache, dafs bei fast sämtlichen geometrischen Aufgaben der gebräuchlichen, seit über zwei Jahrtausenden gelehrten Konstruktion neue, einfachere an die Seite gestellt werden können. In diesen wird entweder das ursprüngliche Lösungsprinzip beibehalten, häufig freilich so, dafs es nur bei genauerer Prüfung wiederzuerkennen ist, oder es treten wenig bekannte oder neu entdeckte Lösungen zu Tage. Es ist zu verwundern, wie Verf. hervorhebt, dafs ein so einfacher und natürlicher Gedanke, wie der, aus dem sich die Geometrographie entwickelt hat, den Geometern aller Zeiten entgehen konnte, und er findet eine ansprechende Erklärung dafür. Die Griechen pflegten ihre geometrischen Figuren nur zu skizzieren, nicht auszuführen, es konnte ihnen also eine Vereinfachung der Zeichnung gar nicht in den Sinn kommen; die späteren Geometer haben sich zunächst an den Griechen herangebildet, ihre Untersuchungen erhielten hierdurch von vornherein eine bestimmte Richtung; so erklärt es sich, dafs niemand auf den Gedanken kam, einen Rückblick zu werfen und eine Spur zu verfolgen, die für die Griechen nicht vorhanden war. In der That konnte sich nur ein starker, unabhängiger Geist von dieser suggestiven Einwirkung der Alten frei machen; während schon Jakob Steiner[2]) auf die Notwendigkeit hingewiesen hatte, die geometrischen Konstruktionen auf ihre Einfachheit zu untersuchen, war es Herrn Lemoine vorbehalten, der Schöpfer dieser neuen Disziplin zu sein, weil er ein objektives Mafs für die Einfachheit der Ausführung entdeckt hatte.

Die Untersuchungen hatten des weiteren das überraschende Ergebnis, dafs die Einfachheit der Darstellung (und auch des Beweises) von der Einfachheit der Ausführung wesentlich verschieden ist. Es kann für eine Aufgabe manche Konstruktion eine sehr einfache Ableitung oder Beschreibung (durch Zurückführung auf andere Aufgaben) besitzen, aber eine umständliche Zeichnung verlangen; ebenso gut aber kann das Umgekehrte eintreten. Diese Thatsache, die sich erst bei den geometrographischen Untersuchungen herausstellte, ist gerade der Grund, weshalb die geometrographischen Konstruktionen bisher verborgen blieben; früher hatte man stets die Einfachheit der Entwickelung und Darstellung angestrebt; erst mit der Entdeckung der Geometrographie richtete man das Augenmerk auf die Einfachheit der Ausführung und fand neue Lösungen, die hierin die bisher gebräuchlichen in den meisten Fällen bei weitem übertrafen. Aus dem Gesagten erhellt un-

1) AFAS, **17**, 1888, 75—95.

2) J. Steiner, Die geometrischen Konstruktionen etc., Ges. W. I, 509, 510, oder Ostwalds Klassiker Nr. 60, 64—66. Hieran erinnert schon Herr J. Lange in seinem Referat über Geometrographie, F. d. M. **24**, 1892, 524. Vgl. auch dieses Archiv (3) **1**, 332.

Digitized by Google

mittelbar, dafs die geometrographischen Konstruktionen nicht bestimmt sind, die bisher gebräuchlichen klassischen ohne weiteres zu ersetzen; wohl aber stehen sie ihnen gleichberechtigt gegenüber.

Herr Lemoine stellt (S. 52) für geometrographische Untersuchungen folgende Regeln auf. Man ziehe keine entbehrliche Linie und ändere nötigenfalls den logischen Verlauf der Konstruktion ab. Unter den verschiedenen Lösungen einer Aufgabe wähle man diejenige aus, welche zum einfachsten Symbol führt. Man prüfe für jede Aufgabe alle speziellen Fälle und vereinfache alsdann das allgemeine Symbol für jeden. Man verwende beim Aufsuchen geometrographischer Symbole allgemeine Lösungen; vorteilhaftere partikuläre Lösungen ziehe man jedoch dann vor, wenn ihre Bedingungen für das vorliegende Problem stets erfüllt sind.[1])

Das vorliegende Büchlein bietet nun den Stand zahlreicher geometrographischer Konstruktionen, wie er sich Anfang 1902 darstellt; schon ein flüchtiger Vergleich läfst erkennen, welchen gewaltigen Fortschritt diese Kunst seit 1888, dem Geburtsjahr der Geometrographie, und 1892, in dem die ersten vereinfachten Konstruktionen veröffentlicht wurden[2]), gemacht hat. Es zerfällt in zwei Teile. Der erste behandelt auf etwa 35 Seiten die klassischen Aufgaben, wie sie in jedem Elementarbuch der Planimetrie zu finden sind. Ihre geometrographischen Lösungen sind naturgemäfs zu einem erheblichen Teil identisch mit denen, welche Herr Lemoine in seinem in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatze[3]) auseinandersetzt. Für manche Aufgaben ist jedoch der in Scientia angegebene Einfachheitsgrad geringer als in jener Abhandlung. Vor allem gilt dies von dem wichtigen Problem XXXVII, dem der *gemeinsamen Tangenten zweier Kreise*. In der angeführten Abhandlung beschreibt Herr Lemoine eine Konstruktion, die von Herrn C. Moreau herrührt; sie besitzt die Einfachheit 36. Diese wird auch in Scientia beschrieben, aber mit einer Vereinfachung um eine Einheit, die ihr Autor an ihr vorgenommen hat. Dieselbe Einfachheit besitzt eine in Scientia mitgeteilte Konstruktion von Herrn G. Tarry. Diese letztere hat Herr Moreau noch während der Drucklegung des Buches (s. S. 87) auf 34 reduziert; dies ist augenblicklich wohl noch der Stand des Problems. Für den Fall, dafs die Kreise sich schneiden, wird eine von Herrn Moreau gefundene Konstruktion mit dem Einfachheitsgrad 26, die auf einem ganz anderen Lösungsprinzip beruht, beschrieben. — Zu XXXVI (*Kreisabschnitt über einer gegebenen Strecke bei gegebenem Peripheriewinkel*) wird

1) Bei dieser Gelegenheit möchte ich dem Verf. ein Bedenken zu erwägen geben, das mir bei dem Durchlesen seines in Band 3 des Arch. enthaltenen sehr interessanten Aufsatzes: „Transformation continue dans le triangle" entgegengetreten ist. Er sagt daselbst S. 247: „La transformation continue d'une construction géométrographique d'un problème conduit aussi à la construction géométrographique du problème qui résulte de la transformation continue du premier." Trifft dies ohne Einschränkung zu, oder kann es vorkommen, dafs die geometrographische Konstruktion eine partikuläre Konstruktion verwendet, deren Bedingungen im ursprünglichen Falle stets erfüllt sind (z. B. unter Benutzung der Längenbeziehungen zwischen Inkreisradius und Seite), aber nicht mehr in dem durch *stetige Transformation* abgeleiteten Falle?

2) AFAS zu Pau, **21**, 1892, 36—100.

3) E. Lemoine, Principes de la Géométrografie ou Art des constructions géométriques, Arch. (3), **1**, 1901, 99—115, 323—341; dort findet man auch die Grundlinien des Systems dargelegt.

Digitized by Google

die sinnreiche Konstruktion von Herrn G. Tarry mitgeteilt, die den Einfachheitsgrad von 22, auf den er vor etwa 10 Jahren von demselben Geometer gebracht worden war[1]), auf 21 reduziert.

Einige auf den ersten Teil bezügliche Bemerkungen mögen hier Erwähnung finden. S. 27, XXIII. Zwei sich schneidende gleich grofse Kreise liefern zwei beliebige Parallele schon mit der Einfachheit 8 statt 9. — S. 31, XXX. *Dreieck aus BC, A und B.* Die klassische Konstruktion liefert bei ökonomischer Behandlung schon den Einfachheitsgrad 27 statt 28. — Erwünscht wäre an dieser Stelle des Buches auch das Symbol der Aufgabe: *Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.* — S. 34. XXXV, 1^0 und 2^0. *Eine Strecke nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen.* Die klassische Konstruktion (S. 35) läfst sich statt mit dem Einfachheitsgrad 20 mit dem um $2\,C_1$ niedrigeren, also 18, ausführen. — S. 35. XXXV, 3^0 und 4^0. *Eine Strecke AB in C so zu teilen, dafs $3^0\,AC : AB = p : q$ und $4^0\,AC : BA = p : q$ ist.* Die geometrographische Konstruktion für 3^0 *oder* 4^0 (S. 35 unten) läfst sich um $2\,C_1$ reduzieren. — S. 38. XXXVI (s. o.), vorletzter Absatz. Die dritte Konstruktion ist nicht tauglich, wenn AB nicht gezogen ist, da sie des Linienzugs AB bedarf. — S. 40. XXXVII (s. o.), dritte Konstruktion. Die Benutzung der Diagonale des Rechtecks $OSS'T$ bietet ohne Änderung des Lösungsprinzips eine kleine Ersparnis. — S. 45. XXXVIII, Remarque. *Partikuläre Konstruktion der vierten Proportionale.* Die Worte: „C, A, B se suivant dans cet ordre sur $O(M)$" können fallen, da auch bei Benutzung des zweiten Schnittpunktes von $A(P)$ und $O(M)$, B', die Aufgabe gelöst wird. — S. 45. XXXIX. *Dritte Proportionale.* $A(M)$ schneide CD in I', AI' den Kreis $O(\varrho)$ in R'; AR' giebt ebenfalls eine Lösung; der erste Kreis mufs hinreichend grofs gewählt werden. — S. 49. XLI. Remarque. *Zwei Strecken zu konstruieren, von denen man die Summe BC und das Produkt ab kennt.* Die Konstruktion der mittleren Proportionale läfst sich unter Beibehaltung des Lösungsprinzips auf 24 vereinfachen, wie Ref. gezeigt hat[2]) (vgl. unten). — S. 50. XLII. *Zwei Strecken zu konstruieren, von denen man die Differenz BC und das Produkt A^2 kennt.* Entweder ist die Strecke BC auch der Lage nach gegeben, dann ist sie auch selbst zu teilen, oder sie ist es nur der Gröfse nach, dann dürfen an ihr nach der auf S. 16 gegebenen Vorschrift nur Hülfskonstruktionen ausgeführt werden. Im übrigen gilt eine ähnliche Bemerkung wie für XLI. — Erwünscht wäre die Aufnahme noch einiger fundamentaler Aufgaben, vor allem der *Kreisteilung* gewesen.

Es mögen aufser den oben erwähnten noch einige seit dem Erscheinen der Scientia eingetretene Vereinfachungen angeführt werden, soweit sie dem Ref. bekannt geworden sind; hierbei soll von den neuen geometrographischen Konstruktionen, die den Einfachheitsgrad nicht verringern, abgesehen werden. S. 20. X°. *Einen Winkel von 45^0 zu zeichnen,* Einfachheitsgrad 13 laut Scientia. Herr G. Tarry giebt zwei Konstruktionen mit dem Einfachheitsgrad 11 an, von denen die eine mit der von dem Ref.[2]) mitgeteilten im wesentlichen übereinstimmt. — S. 21. XII. *Den Mittelpunkt eines Kreises zu zeichnen, wenn dieser Mittelpunkt nicht gegeben ist,* S.: 12;

1) AFAS, **22**, 1893, 118, Aufg. XXVIII.
2) Unt.-Bl. f. Math. u. Naturw. **8**, 1902, Heft 4.

Digitized by Google

XIII. *Den Radius eines Kreises zu finden, wenn der Mittelpunkt nicht gegeben ist*, S.: 7. Die Einfachheit ist vom Ref. um je eine Einheit verringert worden.[1]) — S. 22. XV. *Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden eine Gerade zu ziehen, die mit ihr einen Winkel von gegebener Größe bildet*, S.: 16. Herr G. Tarry reduziert die Einfachheit um eine Einheit. — S. 30. XXVIII. *Durch einen Punkt eine Gerade nach dem unzugänglichen Schnittpunkte zweier Geraden zu ziehen*, S.: 16. S.: 15 nach Herrn Tarry. — S. 36. XXXVI (s. o.) S.: 21. Die Einfachheit ist vom Ref. um eine Einheit reduziert worden.[1]) — S. 49 und 50. XLI Remarque und XLII Remarque. S.: 28 (vgl. o.). Herr Moreau hat zwei Konstruktionen mit dem Einfachheitsgrad 21 gefunden; eine weitere Reduktion auf 16 hat kürzlich der Ref. vorgenommen. — Eine Vereinfachung der Konstruktion der *vierten Proportionale* (XXXVIII, S.: 21) auf 19 hat Herr Moreau aufgedeckt; ihr Grundgedanke wird auf viele andere Konstruktionen von Einfluß sein, z. B. läßt sich die der *mittleren Proportionale* (XL, S.: 14) mit S.: 13 ausführen.

Der zweite Teil des Werkchens (33 Seiten) enthält mehrere Aufgaben aus der Theorie der Pole und Polaren, der Radikalachsen und -zentren und das Problem des Apollonius, ferner eine Reihe von Aufgaben über das Doppelverhältnis und die Involution, über Doppelpunkte und Fluchtpunkte von Punktreihen, über Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsachsen von Kreisen und über Doppelpunkte ähnlicher Figuren. — Einer der interessantesten Abschnitte dieses Teils ist das viel umworbene *Problem des Apollonius*. Während die Konstruktion von Bobillier und Gergonne, die gemeinhin als besonders einfach gilt, nach der gewöhnlichen Vorschrift ausgeführt, einen Einfachheitsgrad von ca. 500 hat, besitzt die von Fouché angegebene[2]), die im wesentlichen auch Herr Mafsfeller in Band 3 des Arch. beschreibt, bei ökonomischer Behandlung nur den Grad 247; Herrn L. Gérard ist es gar vor einigen Jahren gelungen, eine neue und in Ableitung, Beschreibung und Ausführung überraschend einfache Konstruktion aufzufinden, deren Grad er in Scientia auf 154 angiebt; seit dem Erscheinen von Scientia ist überdies diese Zahl von Herrn Moreau auf 152 reduziert worden.

Wie man schon aus den Kapitelüberschriften vermuten kann, stimmt der letzte Teil im wesentlichen mit einer früheren Abhandlung[3]) des Verf. überein. Hier könnten wohl einige Errungenschaften der Geometrographie noch mehr verarbeitet werden. Eine unmittelbare Anwendung der schönen unter XXXV gegebenen Konstruktion der Teilung einer Strecke nach einem gegebenen Verhältnis liefert für mehrere *Aufgaben über das Doppelverhältnis* erhebliche Vereinfachungen, nämlich für LI, 4. Konstruktion, von 18 auf 13, für LIII von 20 auf 15, und für LIV von 28 auf 24. Auch für LIX *(zu n gegebenen Punkten in Bezug auf B und C die konjugierten harmonischen Punkte zu suchen)* ermöglicht eine bekannte Konstruktion bei $n \geq 2$ die beträchtliche Reduktion von $9n + 6$ auf $6n + 9$.

---

1) Beiträge zur Geometrographie I, Arch. (3), **3**, 1902, 191—194.

2) Nouv. Ann. d. M. 1892; s. auch Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie, 1900, I, p. 297 ff. und p. 546—547.

3) AFAS zu Caen, **23**, 1894, 55—82.

Digitized by Google

Doch fehlt es auch in diesem Kapitel nicht an mehrfachen bedeutenden und sehr interessanten Verbesserungen jener Abhandlung gegenüber, z. B. LXIII *(auf BC, auf der A gegeben ist, Punkt A_1 so zu bestimmen, dafs $AB : AC = A_1B^2 : A_1C^2$ ist)* hat in Scientia für den Fall, dafs A ein äufserer Punkt ist, den Einfachheitsgrad 10 gegen 29, und wenn er ein innerer ist, 23 statt 24, ferner ist der Grad von LXV *(die Doppelpunkte zweier Punktreihen zu bestimmen)* durch Herrn Bernès auf 36 reduziert worden. Auch auf die schon länger bekannte wichtige Konstruktion LXX (*Doppelpunkt zweier ähnlicher Figuren* S.: 29 bezw. 30), die ebenfalls von Herrn Bernès herrührt, sei aufmerksam gemacht.

Eine Vereinfachung im zweiten Teil ist neben dem oben Erwähnten seit dem Erscheinen von Scientia vorgenommen worden durch Herrn Moreau an LXVIII *(Ähnlichkeitsachsen dreier Kreise)* von 38 auf 37, ferner vom Ref. an XLVII *(Radikalachse zweier Kreise)* von 16 auf 15, an XLVII, bes. Fall *(Radikalachse zwischen Kreis und Punkt)* von 16 auf 14, an LV und LVI *(Aufgaben über das Doppelverhältnis)* von 25 auf 21 resp. von 30 auf 23, an LXVI *(Fluchtpunkte)* von 29 auf 28.

Einige Druckfehler: S. 57, Z. 15 lies C_3 statt $2\,C_3$; ebda. Z. 13 v. u. (am Ende) l. O'' st. O'; S. 62, Z. 8 l. Δ' st. A'; ebda. Z. 21 D_i' st. D'; Z. 67, Z. 12—9 v. u. mufs an mehreren Stellen C_1 stehen; S. 69, Z. 1 sind p und n vertauscht; S. 71, Z. 21 l. B_1 statt B; S. 72, Z. 13 l. I st. L; S. 73, Z. 6 und 7 kann wohl etwas anders gefafst werden; S. 74, Z. 17 füge man „Band II“ hinzu.

Es werden mitunter[1]) Bedenken gegen das Verfahren des Herrn Lemoine erhoben. Es ist keine Frage, dafs die Einheiten R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 ganz heterogene Dinge sind und ihrer Natur nach ein messendes Vergleichen im eigentlichen Sinne nicht zulassen. Das hindert aber nicht, eine Theorie aufzustellen, bei der sie als vergleichbar angenommen werden, bei der aufserdem die Genauigkeit, mit der ein Punkt als Schnittpunkt zweier sich schneidender Linien bestimmt ist, von dem Winkel der Linien unabhängig ist, bei der ferner die Genauigkeit, mit der eine Gerade als Verbindungslinie zweier Punkte bestimmt ist, von der Entfernung der Punkte unabhängig ist, und bei der die Gröfse des Zeichenblattes und der Instrumente keiner Beschränkung unterliegt. Diese Theorie ist nicht müfsig, sondern sie hat eine sehr reale Bedeutung, denn sie dient dem Zeichner als Kriterium in Bezug auf Einfachheit und Genauigkeit, und bietet als solche ein getreueres Abbild der Wirklichkeit, als z. B., wie der Verf. bemerkt, die theoretische Mechanik dem Techniker, der dieser auch nicht entraten kann, obgleich sie der Wirklichkeit nicht vollkommen adäquat ist. Es ist wohl nicht zu bestreiten, dafs eine Konstruktion bei der praktischen Ausführung einfacher und im allgemeinen auch genauer wird, wenn sie mit der Hälfte oder (auch hierfür giebt es Beispiele) mit dem dritten oder gar einem noch geringeren Teil der Anzahl der Linien ausgeführt wird. Ich möchte daher auf das Büchlein die Aufmerksamkeit aller lenken, die wirklich geometrische Zeichnungen auszuführen haben; auf dem Gebiet der „Zeichnenden Geometrie“ dürfte es berufen sein, eine neue Epoche einzuleiten.

1) Vgl. z. B. Unt.-Bl. f. Math. u. Naturw. 8, 1902, Heft 2, S. 38.

Digitized by Google

Die obigen Bemerkungen des Ref. sollen Anregungen sein, zum Teil Vorschläge zu Änderungen und Zusätzen, die vielleicht nicht durchweg den Beifall des Verf. finden werden, zum geringsten Teil Ausstellungen; diese verschwinden, wenn man den reichen hochinteressanten Inhalt des Büchleins bedenkt; besonders wer sich mit geometrographischen Untersuchungen beschäftigt hat und weifs, wie subtil sie sind, wird die Sorgfalt anerkennen, durch die sich das Buch in Inhalt wie in Form auszeichnet. Gerade das macht einen Hauptreiz der Geometrographie aus, dafs sie fortwährend der Verbesserung zugänglich sein kann; denn wenn auch viele Aufgaben ihre äufserste Einfachheit erreicht zu haben scheinen, kann man das doch von keiner mit völliger Sicherheit behaupten. Die obigen Mitteilungen zeigen, wie die geometrographischen Untersuchungen noch fortwährend im Flufs sind, und es wäre eine gröfsere Beteiligung an denselben in Deutschland lebhaft zu wünschen, zumal da durch das Erscheinen des vorliegenden zusammenfassenden Werkchens das Studium dieses Gegenstandes wesentlich erleichtert worden ist. So wie das Buch vorliegt, stellt es in seiner unscheinbaren Gestalt das Ergebnis von mehrjährigen tiefgehenden Untersuchungen einer Reihe namhafter Geometer der Gegenwart dar, von denen aufser dem Begründer Herrn E. Lemoine selbst und seinen ersten Mitarbeitern Herrn G. Tarry und Herrn E. Bernès, sowie den oben genannten Herren C. Moreau und L. Gérard noch Herr Chr. Beyel in Zürich, Herr J. St. Mackay in Edinburg, Herr Jung in Mailand genannt werden mögen, mit dem Hinzufügen, dafs diese Liste weit davon entfernt ist, vollständig zu sein. Dafs diese rege Thätigkeit auch auf die theoretische Geometrie befruchtend gewirkt hat, ist natürlich, da sie ein tiefes Durchdringen der geometrischen Figuren erfordert; in der That giebt es Fälle genug, wo durch die geometrographischen Untersuchungen neue Eigenschaften der Figuren entdeckt wurden. Es wird daher auch niemand, der sich nur mit theoretischer Geometrie beschäftigt, das Büchlein ohne vielfache Anregung aus der Hand legen, zumal wohl auch unter den gelehrten Mathematikern die Zahl derer seltener geworden ist, die es verschmähen, einen Zirkel zu berühren.

Vor allem liegt mir am Herzen, die Herren Fachkollegen an höheren Lehranstalten zu einer gelegentlichen Einflechtung der Geometrographie in den Unterricht zu gewinnen, wo es, wie etwa in Vertretungsstunden, ohne Mehrbelastung geschehen kann; ihre Grundlinien sind in wenigen Minuten beizubringen; den ziemlich erstarrten Formen der Elementarplanimetrie gegenüber besitzt sie den Reiz eines neuen Elementes; sie giebt dem begabten Schüler Gelegenheit, hervorzutreten; sie bewirkt zwanglos und in anregender Form eine Wiederholung der früheren Pensen; auf jeder Unterrichtsstufe bietet sie, ohne besondere Vorkenntnisse zu erfordern, eine Fülle von interessanten Übungen. Das Büchlein „Scientia, Phys.-Math., No. 18“ sollte daher — ich sage das mit gutem Bedacht — in der Hand eines jeden sein, der geometrischen Unterricht zu erteilen hat; auch für Lehrer- und Schülerbibliotheken sei es zur Anschaffung angelegentlich empfohlen. (Wie wir hören, plant Herr Lemoine die Herausgabe eines gröfseren Abrisses der Geometrographie in *deutscher* Sprache; doch sind die Verhandlungen mit dem Verlag noch in der Schwebe. Die Red.)

Berlin, September 1902. R. Güntsche.

Digitized by Google

Bernhard, Max. Darstellende Geometrie mit Einschluss der Schattenkonstruktionen. Als Leitfaden für den Unterricht an technischen Lehranstalten, Oberrealschulen und Realgymnasien, sowie zum Selbststudium herausgegeben. Mit 229 Figuren im Texte. Stuttgart 1901, Heinrich Enderlen (vorm. Karl Aue). 8°. VIII u. 195 S.

Der Verfasser (Professor an der Kgl. Baugewerkschule zu Stuttgart) gab das vorliegende Lehrbuch als Leitfaden heraus, weil es aus dem Bedürfnisse entstanden ist, unter Vermeidung des zeitraubenden Diktierens, dem Schüler zum Wiederholen und Nachschlagen das erforderliche Material in die Hand zu geben. Das Buch steht jedoch auf eigenen Füßen und ist infolge der zahlreichen, mustergiltigen Figuren, deren Verständnis durch einheitliche Beschreibung und Verwendung verschiedenartiger Hilfslinien wesentlich erleichtert wird, sowie eines klaren Textes, der die gründliche Vertrautheit des Verfassers sowohl mit der wissenschaftlichen Seite des Gegenstandes als auch mit seinen unterrichtlichen Schwierigkeiten erkennen läßt, nicht nur für mittlere technische Schulen und Oberrealschulen, sondern auch, bei einiger Ausdauer des Lernenden, zum Selbststudium empfehlenswert. Insbesondere sind die Schattenkonstruktionen in diesem Buche vollständiger und dem praktischen Bedürfnis entsprechender behandelt als in manchem umfangreichen Werke, und es dürften auch Lehrer des Faches mehr Neues darin finden, als sie vermuten.

Für die Zwecke der preußischen Baugewerkschulen geht das Buch an vielen Stellen in theoretischer Beziehung weiter, als man dem Verständnis ihres Schülermaterials im allgemeinen zumuten darf.

Das Buch besteht aus drei Teilen. Nachdem im ersten Teile (Stereometrie, S. 5—16) die später zur Verwendung kommenden stereometrischen Sätze bewiesen und der Projektionsbegriff geometrisch erklärt sind, behandelt der zweite Teil (Projektionslehre, S. 17—158) die Darstellung von Punkten, Linien, Ebenen und Körpern in rechtwinkliger Projektion, und die Lösung der üblichen, sich daranschließenden Aufgaben. Außerdem ist die schiefe Projektion erläutert, jedoch nur soweit, als es zum Zeichnen einfacher Skizzen nötig ist. Ein Paragraph (S. 61—72) ist der Ableitung der für den Zeichner wichtigsten Kegelschnitteigenschaften gewidmet, indem diese Kurven als Schnitte des geraden Kreiskegels betrachtet werden. Ungern vermisse ich hierin die Ermittlung der Achsen einer durch zwei konjugierte Durchmesser gegebenen Ellipse. Von Körpern bezw. Flächen kommen zur Behandlung: Prismen und Pyramiden, Cylinder und Kegel, Drehkörper und Schraubenflächen. Verhältnismäßig viel Raum (34 S.) ist mit Recht den Durchdringungen, insbesondere krummflächiger Körper gewidmet, die an technischen, vor allem Baugewerkschulen bei der Konstruktion von Gewölben (Stichkappen) eine wichtige Rolle spielen. Vielleicht hätte hier die kegelförmige Stichkappe in ein Kuppelgewölbe noch eine Stelle finden können.

Der dritte Teil (Schattenkonstruktionen, S. 159—195) lehrt die Bestimmung der Eigen- und Schlagschatten an ebenflächigen oder durch Cylinder-, Kegel-, Kugel- oder Drehflächen begrenzten Körpern in rechtwinkeliger Projektion für die in der Technik gebräuchliche Lichtstrahlenrichtung. Die Vertrautheit des Verfassers mit den Bedürfnissen der Praxis zeigt der zu Fig. 224 gehörige Hinweis, daß man die Schattenkonstruktion

Digitized by Google

an Drehflächen auch ohne besondere Benutzung einer zweiten Projektionsebene durchführen könne. Die Erhebung dieser Bemerkung zum Konstruktionsprinzip ist in einem demnächst in der Zeitschrift f. Math. u. Phys. erscheinenden Aufsatze von O. Unger[1]) befürwortet. Das Kugelverfahren zur Ermittlung der Eigenschattengrenze einer Drehfläche für 45^0-Lichtstrahlenrichtung auf so wenig Linien zurückgeführt wie in Fig. 226 ist auch dem Referenten bekannt gewesen, dürfte sich aber seines Wissens sonst nur noch in der erwähnten Ungerschen Abhandlung finden. Die auf S. 191 (unten) etwas zu knapp angemerkte Bestimmung des Schlagschattens eines Parallelkreises auf die Drehfläche gestaltet sich meines Erachtens ebenso einfach, wenn man unmittelbar den Schatten dieses Kreises auf den Hilfsparallelkreis und nicht die dort erwähnten symmetrischen Kreise verwendet. In derselben Fig. 227 läfst sich der höchste Punkt (a_u'') meist bequemer mittels des Schnittpunktes des gedrehten Lichtstrahles mit der Drehachse $(a_0''a_u'' \times D'')$ finden. Ferner dürfte die auf S. 193 angeführte, kürzlich von R. Mehmke veröffentlichte Konstruktion des Schlagschattens einer quadratischen Platte auf eine Drehfläche sich für Schüler verständlicher und anschaulicher mittels des auf S. 179 bewiesenen Satzes erklären lassen, dafs der Schatten einer zur Projektionsachse parallelen Geraden auf einen zur Grundrifsebene senkrecht stehenden geraden Kreiscylinder im Aufrifs als Kreis erscheint.

Die schiefe Projektion ist, meiner Meinung nach, insofern etwas stiefmütterlich behandelt, als das axonometrische Zeichnen ganz fehlt. Die Angabe auf S. 26, dafs die häufigst angewandte Verkürzung für die zur Bildebene senkrechten Strecken $^1/_2$ sei, scheint mir unzutreffend. In den schiefen Projektionen der Figg. 21 und 126 sind die Viertelkreise, welche die Umlegung des Grundrisses bezw. Seitenrisses eines Punktes anschaulich machen sollen, nicht als Ellipsen, sondern fälschlich als Kreisbogen gezeichnet, was gegen die Korrektheit aller sonstigen Figuren absticht. Die Verwendung des auf S. 28 gebrauchten Ausdrucks „Obersicht“ im Gegensatze zu „Untersicht“ statt der sonst gebräuchlichen Ausdrücke „Aufsicht“ oder „Draufsicht“ erscheint nachahmenswert. Jedoch läfst sich nicht das gleiche von den zweideutigen Ausdrücken „Horizontal- und Vertikalabstand“ eines Punktes für seine Entfernungen von den Projektionsebenen sagen.

Druckfehler habe ich nur einen bemerkt: Auf S. 159, Z. 16 v. u. soll es wohl „Medium“ statt „Mantel“ heifsen.

Da auch Druck und Ausstattung volles Lob verdienen, so kann dieses Lehrbuch in jeder Hinsicht warm empfohlen werden.

Königsberg i. Pr., April 1902. E. Müller.

---

1) Der Aufsatz ist inzwischen im 47. Bd. S. 467—479 unter dem Titel: „Über ein Konstruktionsprinzip und seine Verwertung bei der Schattenbestimmung an Drehflächen“ erschienen. (1. X. 1902.)

Digitized by Google

Wilhelm, J. Die Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt in ihrem Zusammenhang mit den Kreisen der Ebene. Inaug. Dissert. Straßburg 1901. 8°. 40 S.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie das System der monokonfokalen[1]) Kegelschnitte, also das System von Kurven 2. Kl., die die beiden durch einen reellen Punkt f gehenden Minimalgeraden berühren, aus dem System der Kreise einmal durch eine negative Fußpunkttransformation mit dem Centrum (Pol) f, das andere Mal durch Polarisation an einem Kreise vom Centrum f hervorgehen. Diese beiden Transformationen werden zum Beweise verschiedener, meist bekannter Kegelschnittsätze verwendet. Außerdem werden die Fußpunktkurven betreffende Eigenschaften und Konstruktionen abgeleitet. Ganz im Sinne von Reyes Geometrie der Lage findet der Begriff der imaginären Kreispunkte keine Verwendung, obgleich die Arbeit dadurch bedeutend kürzer und übersichtlicher geworden wäre.

Die Litteraturangaben sind spärlich. Es hätte bezüglich der Fußpunkttransformation z. B. auf das allbekannte Buch Lie-Scheffers „Geometrie der Berührungstransformationen" (Leipzig 1896) verwiesen werden müssen, wo auf S. 20 die Hauptgedanken der beiden ersten Abschnitte vorliegender Arbeit angedeutet sind, jedenfalls aber die Arbeit von O. Hesse „Die Reziprozität zwischen Kreisen, welche dieselbe gemeinschaftliche Sekante haben, und den konfokalen Kegelschnitten" (Abh. d. k. bayr. Akademie d. W. II. Kl. XI. Bd. III. Abth. München 1874 = Ges. Werke S. 599—616) erwähnt werden müssen, die mit dem dritten Abschnitte der vorliegenden in engster Beziehung steht.

Königsberg i. Pr., April 1902. E. Müller.

Börnstein, R. Leitfaden der Wetterkunde. Braunschweig, 1901. Friedrich Vieweg & Sohn. VIII u. 181 S. mit 52 Textabbildungen und 17 Tafeln. Preis 5 ℳ, geb. 6 ℳ.

Die beiden letzten Jahrzehnte sind für die Meteorologie äußerst fruchtbar gewesen. Durch das Zusammenwirken der in kurzem emporgeblühten ausgedehnten internationalen und staatlichen Organisationen, sowie durch die Thätigkeit einzelner fleißiger und begabter Forscher ist das Material der Thatsachen, der aus ihren folgenden Gesetze, sowie der mehr oder weniger vertrauenswürdigen Hypothesen zu einer solchen Fülle gediehen, daß es fast unmöglich erscheint, in dem engen Rahmen von 156 Textseiten dasselbe in genügender Vollständigkeit darzustellen. Um so anerkennenswerter ist das Geschick des Verfassers, dem die Aufgabe zu lösen sehr wohl gelungen ist. Um aus der Fülle neuerer Thatsachen nur einiges hervorzuheben, so sind die Ergebnisse der Ballonfahrten für die Beobachtung der Temperaturwerte, der Feuchtigkeit, der elektrischen Erscheinungen u. s. w. in größerer Höhe berücksichtigt; der Staub erscheint als meteorologischer Faktor für die Kondensation und die optischen Erscheinungen; Langleys Untersuchungen über die selektive Absorption und seine Bestimmung der Solarkonstante, Pettersons

1) So benannt von J. Keller „Über monokonfokale Kegelschnitte", Vierteljahrsschr. d. naturf. Gesellsch. in Zürich, Bd. 27, S. 1—29.

Digitized by Google

Studien über die meteorologischen Einflüsse des Golfstroms, die Arbeiten des Verfassers über das Fortschreiten der Gewitter, Wettins Wolkenforschungen, sowie die der internationalen Kommission, Bezolds und Assmanns Erörterungen über die gestrengen Herren sind berücksichtigt. Von neueren Hypothesen seien nur hervorgehoben: Elster und Geitels Ionentheorie der Luftelektrizität und Margules' Ansicht über die Schwingungen der Atmosphäre und ihren Zusammenhang mit der täglichen Periode des Luftdrucks. Daneben kommt der praktische Teil der Wetterkunde nicht zu kurz. Dieser ist es ja, der dem Buche Verbreitung bei allen Interessierten an der Gestaltung des Wetters — und wer wäre das nicht — verschaffen soll. In der That ist all den Folgerungen, die aus den Beobachtungsthatsachen für die Wetterprognose sich ergeben, insbesondere aus den Erscheinungen in den Cyklonen und Anticyklonen, weiteste Berücksichtigung zu teil geworden. Die meteorologischen Instrumente und ihre Aufstellung sind eingehend behandelt. Die Zusammenstellung von Wettertypen wird sich für die Praxis äufserst nützlich erweisen. Der in den einzelnen Ländern übliche Witterungsdienst erfährt eine eingehende Schilderung. Trotz der Kürze des Buches läfst die Darstellung keineswegs Klarheit und volkstümliche Fassung vermissen. Die Behandlung des Luftdrucks, des Schwebens der Wolken, der adiabatischen Zustandsänderungen bei der Konvektion, die fortwährende Heranziehung von einfachen Beispielen und die zahlenmäfsige Verfolgung vieler Erscheinungen lassen den guten Lehrer erkennen. Einige eingeflochtene, der eigentlichen Meteorologie fremde Gegenstände, wie die Erklärung der Gletscher durch die Regelation und die der Ebbe und Flut zeigen, wie der Verfasser bemüht ist, „von einer Scienz in die andere blicken zu lassen" — auch bekanntlich eine Eigenschaft des guten Unterrichtes. Die Zahlentabellen und Literaturangaben, sowie das sorgfältige Register sind sehr nützliche Zugaben. Für die reiche Ausstattung mit klimatischen und Wetterkarten, sowie mit mehrfarbigen, der Natur ziemlich adäquaten Wolkenbildern gebührt der Verlagsbuchhandlung besonderer Dank. Wir können das Buch auch besonders den Lehrern der Physik warm empfehlen, die daraus mannigfache Anregung für ihren Unterricht erhalten werden.

Charlottenburg. H. Samter.

---

van Bebber. Anleitung zur Aufstellung von Wettervorhersagen für alle Berufsklassen, insbesondere für Schule und Landwirtschaft. Braunschweig 1902, Friedrich Vieweg u. Sohn. 38 S. Preis 60 Pfg.

Diese kleine Schrift des auf dem Gebiete der praktischen Meteorologie äufserst fruchtbaren Verfassers fafst das Wissenswerteste über die Wettertelegraphie, die Wetterkarten und die in der Luftdruckverteilung sich ergebenden Grundlagen der Wettervorhersage zusammen, stellt dann eine Reihe von Wettertypen auf und knüpft an eine Charakteristik derselben die Regeln der rationellen Wetterprognose. Eine tabellarische Übersicht der in den Typen herrschenden Wettererscheinungen erleichtert die Anwendung für die Vorhersage. Wir wünschen dem nützlichen Büchlein weiteste Verbreitung, insbesondere auch bei Lehrern, die mit Rücksicht auf die praktischen Bedürfnisse des Lebens ein paar Physikstunden den Grundlagen dieser Vorhersagen widmen sollten.

Charlottenburg. H. Samter.

Digitized by Google

Musil, A., und J. A. Ewing. Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes „The Steam-Engine and other Heat-Engines" von J. A. Ewing. Leipzig 1902, B. G. Teubner. gr. 8°. X u. 794 S. geb. *M* 20.—

Bis in die letzten Jahre des vergangenen Jahrzehnts zerfiel an unseren technischen Hochschulen das eigentliche Maschinenwesen im Unterricht fast allgemein in zwei scharf von einander getrennte Gebiete: die sog. theoretische Maschinenlehre und die Konstruktionslehre, an welch letztere sich die Übungen im Entwerfen von Maschinen direkt anschlossen. Diese Trennung spiegelte sich naturgemäfs auch in der technischen Literatur wieder, in der die theoretischen Werke schon durch die Namen ihrer Verfasser (z. B. Grashof, Zeuner u. a.) weit gröfsere Bedeutung beanspruchten, als Schriften rein konstruktiven Inhaltes.

Die zunehmende Spezialisierung im Maschinenwesen hat diese seinerzeit sehr nützliche Scheidewand zwischen Theorie und Praxis beseitigt und uns dafür eine weitgehende Selbständigkeit der einzelnen Spezialgebiete gebracht, innerhalb deren man von ihren Vertretern die vollste Beherrschung nach der theoretischen und konstruktiven Seite hin verlangt. So bestehen jetzt an unseren Hochschulen besondere Lehrstühle für Maschinenelemente, Hebezeuge, Wärmekraftmaschinen, hydraulische Motoren u. s. w., während diejenigen für theoretische Maschinenlehre und Kinematik in Wegfall kommen und nirgends mehr wie früher einem Dozenten die konstruktive Behandlung der ganzen Maschinentechnik zugemutet wird. Kann auf diese Weise der akademische Lehrer jetzt mehr wie früher eigene praktische Erfahrungen im Unterrichte verwerten, so ist andererseits dem studierenden Techniker Gelegenheit geboten, wenigstens ein Spezialgebiet auf der Hochschule gründlich durchzuarbeiten, was ihm in der Praxis später stets von gröfstem Nutzen sein wird.

In England, wo bis vor kurzem ein systematischer technischer Hochschulunterricht überhaupt nicht existierte, wurde der junge Techniker auf dem Bureau einer Fabrik oder eines Civilingenieurs im Spezialfache lehrlingsmäfsig ausgebildet und war zur späteren Erlangung gründlicher theoretischer Kenntnisse ganz auf die Literatur angewiesen. Wir finden darum in diesem Lande eine Reihe guter Werke über die verschiedensten Zweige der Technik und zwar in allen Darstellungsformen, vom gemeinverständlichen Leitfaden bis zum wissenschaftlich und konstruktiv vollendeten Handbuche. Eines der besten Beispiele ist das Werk von Prof. J. A. Ewing in Cambridge „The Steam-Engine and other Heat-Engines", welches Prof. Musil in Brünn unter weitgehender Berücksichtigung unserer Zeitschriften-Literatur deutsch bearbeitet und erweitert hat, wodurch der Umfang allerdings nahezu bis auf das Doppelte des Originals angewachsen ist.

In diesem Buche ist der Stoff in einer unserem Hochschulunterrichte nach Form und Inhalt ungefähr angepafsten Weise dargestellt, wobei das Wesentliche sowohl der mechanischen und wärmetheoretischen Grundlagen, wie auch die konstruktiven Haupttypen eine eingehende Besprechung gefunden haben. Bemerkenswert ist die Heranziehung zahlreicher Versuchsergebnisse, deren chronologische Zusammenstellung z. B. für die Dampfmaschine auf S. 216 (bei der übrigens die Zeitangaben fehlen) eine lehrreiche Übersicht über die Fortschritte in der Wärmeausnützung mit dieser Maschinengattung bietet. Auch die Besprechung der Untersuchungsmethoden (VI. Abschnitt)

Digitized by Google

ist in hohem Maſse als gelungen zu bezeichnen. Die Regulierung, welche sich an die Behandlung der Steuerungen anschliefst, ist allerdings nach der theoretischen Seite etwas knapp ausgefallen. Wahrscheinlich haben die Verfasser angenommen, dafs man im Rahmen eines solchen zusammenfassenden Werkes überhaupt diesen Gegenstand nicht hinreichend erschöpfend behandeln kann. Immerhin verdienen auch hier, wie an vielen anderen Stellen, einige englische, bei uns kaum bekannte graphische Methoden das Interesse deutscher Leser.

In dem sehr klar gehaltenen Kapitel „Die Arbeit an der Kurbel" hat u. a. auch der Schlicksche Massenausgleich einen Platz und eine volle Würdigung gefunden, während die ebenfalls praktisch bewährte Methode des Referenten zum Ausgleich der Drehmomente durch geeignete Arbeitsverteilung auf die einzelnen Cylinder (Institution of Naval Architects 1900) den Verfassern wohl entgangen ist. Dasselbe gilt von der Beurteilung des mechanischen Wirkungsgrades aus dem Indikatordiagramm, welche Referent in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure 1894 angegeben hat. Im Kapitel „Dampferzeugung" ist u. a. der natürliche und künstliche Zug verständlich abgehandelt; unter den besprochenen Kesseltypen dagegen vermissen wir die in Deutschland so verbreiteten Wellrohrkessel. Im Abschnitte „Dampfmaschinentypen" hat die Dampfturbine eine zwar gedrängte, aber doch recht instruktive Darstellung gefunden, welche wiederum durch Versuchsergebnisse ergänzt wird.

Mit Recht sehr kurz ist das den Luftmaschinen gewidmete Kapitel ausgefallen, da denselben neben den später eingehend behandelten Verbrennungsmotoren doch nur mehr eine untergeordnete Bedeutung zukommt. Die von älteren Autoren mit grofser Vorliebe verfolgten Kreisprozesse der Luftmaschinen sind, soweit sie nicht im II. Kapitel schon Erwähnung gefunden haben, ganz übergangen worden; diejenigen der Gas- und Ölmaschinen dagegen, soweit dies überhaupt auf Grund unserer unzureichenden Kenntnis des Verbrennungsvorgangs möglich, besprochen worden. In konstruktiver Beziehung geht das Buch bis zu den Sauggas- und den grofsen Gichtgasmotoren einerseits und andererseits bis zum Dieselmotor neuester Bauart, überall unter Anführung von Versuchsergebnissen.

Somit haben wir ein Werk von seltener Vollständigkeit und Abrundung vor uns, welches zur Einführung in das Gebiet der Wärmekraftmaschinen nicht blofs dem angehenden Ingenieur, sondern auch jedem mit einigen physikalischen Kenntnissen ausgerüsteten Gebildeten warm empfohlen werden kann. Insbesondere dürften dieses Buch solche Physiker und Mathematiker begrüfsen, welche den Anwendungen mit Rücksicht auf eine spätere Lehrthätigkeit an technischen Anstalten ihre Aufmerksamkeit zuwenden. Das Studium des Werkes wird jedenfalls durch eine grofse Zahl gut ausgewählter und sauber gezeichneter Figuren erleichtert, wie denn überhaupt die ganze Ausstattung als mustergiltig zu bezeichnen ist.

Göttingen, im Dezember 1902. H. Lorenz.

Digitized by Google

Vermischte Mitteilungen.

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze.

68. Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par les extrémités du grand axe d'une ellipse et qui sont tangentes à l'ellipse en un point variable.

Constantinople. E. N. Barisien.

69. On considère un point M situé sur un cercle Σ de diamètre fixe AB.

I°. Le lieu du centre des hyperboles équilatères circonscrites au triangle AMB est un cercle Σ'.

II°. Lorsque M se déplace sur Σ, chacun des cercles Σ' est tangent au cercle Σ.

Constantinople. E. N. Barisien.

70. Von der Spitze O einer Kardioide ziehe man nach einem beliebigen Punkte P derselben den Radius OP und beschreibe über OP als Durchmesser in einer zur Ebene der Kurve senkrechten Ebene den Kreis. Welches ist die Gleichung der krummen Oberfläche, die durch alle so konstruierten Kreise erzeugt wird. Welches ist das Volumen dieser Oberfläche?

Berlin. E. Lampe.

71. Die Entfernung einer Geraden von ihrem Lotpunkt inbezug auf ein Dreieck ist gleich dem Durchmesser des Umkreises multipliziert mit dem Produkt der Cosinus der 3 Winkel, welche sie mit den Seiten bestimmt:

$$\delta = 2r \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3.$$

Lemberg. Kaz. Cwojdziński.

72. a) In der Ebene sind ein Punkt P und ein Kreis $\mathfrak{K}$ gegeben; man soll P mit $\mathfrak{K}$ durch einen Kreisbogen PQ verbinden, welcher $\mathfrak{K}$ unter rechtem Winkel schneidet und ein Maximum oder Minimum der Länge darbietet.

Digitized by Google

b) Dieselbe Aufgabe unter der Voraussetzung, dafs P, $\mathfrak{K}$ und der gesuchte Kreisbogen auf einer gegebenen Kugelfläche liegen.

Die Lösung und Diskussion dieser Aufgaben ist von Bedeutung für die isoperimetrische Aufgabe in der Ebene und auf der Kugel. Erwünscht ist besonders eine Antwort auf folgende Frage: Wird $\mathfrak{K}$ im Punkte Q von irgend einem Kreise $\mathfrak{K}_1$ geschnitten; wie mufs dann der Punkt P auf $\mathfrak{K}_1$ gewählt werden, damit der Bogen PQ das oben geforderte Extremum darbiete?

Berlin. A. Kneser.

---

73. *Osterrechnung nach gregorianischem Kalender.* — Es sei für das Jahr N das Datum des Ostersonntags zu berechnen.

Es werde die Zahl	dividiert durch	der Quotient sei	der Rest sei
N	100	A	B
$A+8$	25	a	
$A+1-a$	3	b	
A	4	c	
N	19		d
$11d+1$	30		f
$46+A-b-c-f$	30		g
B	4	h	
$5A+B+h+c$	7		k
$39-k-g$	7		m

Ist dann $g+m \leqq 9$, so ist das Osterdatum der $(22+g+m)^{\text{te}}$ März.
Ist $g+m > 9$, so ist das Osterdatum der $(g+m-9)^{\text{te}}$ April.

Einzige Ausnahme: Ist $g=29$ und zugleich $m=6$, so ist das Osterdatum nicht, wie es nach obiger Regel sein sollte, der 26. April, sondern der 19. April.

Darmstadt, den 9. Okt. 1902. Paul Wolfskehl.

---

74. A und B nehmen von einem Haufen von Gegenständen abwechselnd nach Belieben weniger als eine festgesetzte Anzahl ($n > 0$), aber mindestens einen weg; wer zuerst die letzten wegnehmen kann, gewinnt. Welche Chancen hat B, wenn A beginnt und, die Anzahl der Gegenstände kennend, so vorteilhaft als möglich spielt für den Fall, wo dieselbe (s) eine Primzahl ist?

Raumetengrün. G. Olitsch.

Digitized by Google

75. Auf welcher Kurve mufs sich eine Lemniskate wälzen, damit sich ihr Mittelpunkt auf der Geraden $O\xi$, welche in der Anfangsstellung senkrecht zur Hauptachse steht, weiterschiebe?

Sagan. P. Kokott.

---

76. Trägt man in jedem Punkte P einer ebenen Kurve C an die Tangente eine Gerade g_γ unter konstantem Winkel γ an, so umhüllen die Geraden g_γ eine Kurve E_γ, die im Falle, dafs γ ein Rechter ist, in die Evolute E von C übergeht.

„Hält man einen Punkt P von C fest, so liegen die Berührungspunkte aller von P ausgehenden Geraden g_γ auf dem Kreise, der über dem Krümmungsradius von P als Durchmesser beschrieben ist."

Man beweist diesen Satz entweder mit Benutzung schiefwinkliger Parallelkoordinaten oder auch direkt geometrisch als eine Konsequenz des elementaren Kreissatzes über die Konstanz des Peripheriewinkels auf demselben Bogen.

Königsberg i. Pr., Nov. 1902. W. F. Meyer.

---

77. Sei $|a_{ik}| = A$ eine n-reihige Determinante, unter n eine gerade Zahl 2ν verstanden. Durch einen mittleren horizontalen und einen mittleren vertikalen Strich werde A in vier ν-reihige Determinanten zerlegt, die resp. mit $D_{1,2,\ldots,\nu}$; $D_{\nu+1,\ldots,2\nu}$; $\Delta_{\nu+1,\ldots,2\nu}$; $\Delta_{1,2,\ldots,\nu}$ bezeichnet seien, so dafs also $\Delta_{1,2,\ldots,\nu}$ die Unterdeterminante von $D_{1,2,\ldots,\nu}$ und $\Delta_{\nu+1,\ldots,2\nu}$ die Unterdeterminante von $D_{\nu+1,\ldots,2\nu}$ ist.

Dann ist leicht zu beweisen, dafs, wenn man jedes Element von $D_{1,2,\ldots,\nu}$ mit seiner Unterdeterminante in A multipliziert und die Summe bildet: $S = a_{11}\alpha_{11} + \cdots + a_{\nu\nu}\alpha_{\nu\nu}$, derselbe Wert resultiert, als wenn man den entsprechenden Prozefs mit $\Delta_{1,2,\ldots,\nu}$ vornimmt:

$$S = a_{11}a_{11} + \cdots + a_{\nu\nu}\alpha_{\nu\nu} = a_{\nu+1}\alpha_{\nu+1} + \cdots + a_{2\nu}\alpha_{2\nu}.$$

(Diese Formel ist mit einer gewissen Modifikation auf irgend eine Unterdeterminante einer beliebigen Determinante ausdehnbar).

Tiefer liegt jedoch folgende merkwürdige Relation:

$$2S = \nu\,(D_{1,2,\ldots,\nu}\cdot\Delta_{1,2,\ldots,\nu} - D_{\nu+1,\ldots,2\nu}\cdot\Delta_{\nu+1,\ldots,2\nu} + A),$$

deren Herleitung gewünscht wird.

Königsberg i. Pr., Nov. 1902. W. F. Meyer.

---

78. Sei $|a_{ik}|$ eine n-reihige Determinante.

Durch Multiplikation der Elemente der i^{ten} Reihe mit den entsprechenden Elementen der k^{ten} Kolonne $(i \neq k)$ entstehen die $n(n-1)$ Ausdrücke:

$$F_{ik} = a_{i1}a_{1k} + a_{i2}a_{2k} + \cdots + a_{in}a_{nk}. \qquad \left(\begin{smallmatrix} i+k \\ i,k=1,2,\ldots,n \end{smallmatrix}\right)$$

Digitized by Google

Bezeichnet man dann mit Φ_{ik} die Bildung:

$$\Phi_{ik} = a_{ki}P_{ik} - a_{ik}F_{ki} = -\Phi_{ik},$$

so bestehen zwischen den Φ_{ik} die n numerischen Identitäten (und keine andern):

$$\Psi_i \equiv \Phi_{i1} + \Phi_{i2} + \cdots + \Phi_{in} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

die selbst wieder an die eine numerische Identität (und keine andere):

$$\sum_i \Psi_i = 0$$

gebunden sind.

Der vorstehende Satz soll bewiesen werden. Man wendet ihn mit Vorteil auf die Frage an, wann eine vorgelegte Kollineation:

$$\varrho y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Involution ist.

Königsberg i. Pr., Nov. 1902. W. F. Meyer.

B. Lösungen.

Zu **37.** (Bd. II, S. 356) (S. Gundelfinger). Die Priorität der Publikation dieses Theorems gebührt, wie ich aus Fortschr. d. Math. **31**, 570 ersehe, Herrn F. P. Ruffini. (Bologna Rend. (2) **4**, 23—29.) Ich selbst habe das von mir seit Jahren gefundene Theorem schon seit 1897 in meinen Übungen an der hiesigen technischen Hochschule behandeln lassen; wie ich aus einem Eintrag ersehe, den ich durch meinen damaligen Assistenten Herrn Prof. Dr. Brückel in mein Übungsbuch machen liefs.

Darmstadt, 9. Oktober 1902. S. Gundelfinger.

Nachtrag: Wie mir soeben Herr Lampe mitteilt, hat Herr Ruffini das fragliche Theorem bereits 1889 behandelt in einer Arbeit: „Delle curve piane algebriche etc.“. Bologna Mem. (4) **10**, 337—360. (Cfr. Fortschritte der Math. **21**, 696, 1889.

Darmstadt, 30. November 1902. S. Gundelfinger.

Zu **60** (Bd. III, S. 309) (S. Gundelfinger). Nach einem wohl zuerst von S. Smith aufgestellten allg. Satz (Phil. Trans. Vol. 151, p. 301) ist die Gesamtheit aller Flächen zweiter Ordnung, welche zu sieben Flächen zweiter Klasse

$$(1) \qquad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \varphi_7 = 0$$

gleichzeitig apolar liegen, analytisch dargestellt durch eine Gleichung der Gestalt

$$\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 = 0,$$

Digitized by Google

wobei die μ_i willkürliche Parameter und die drei quadratischen Formen der Punktkoordinaten: f_1, f_2, f_3 linear unabhängig sind, sobald das Gleiche auch von den Formen φ_k $(k = 1, 2, 3, \ldots, 7)$ gilt. Umgekehrt ist auch jede Fläche zweiter Klasse, welche zu einer solchen Fläche zweiter Ordnung

$$\mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \mu_3 f_3 = 0 \tag{2}$$

apolar liegt, darstellbar durch eine Gleichung der Form

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_7 \varphi_7 = 0. \tag{3}$$

Drei Flächen zweiter Ordnung $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ schneiden sich bekanntlich in 8 Punkten. Jeder dieser Punkte, doppelt genommen, kann als eine Fläche zweiter Klasse aufgefafst werden, die zu jeder der drei Flächen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ apolar liegt. Somit ist jeder dieser acht Doppelpunkte in der Gestalt (3) darstellbar.

Nimmt man im Besonderen für $\varphi_7 = 0$ den imaginären Kugelkreis $\omega = 0$, so sieht man, dafs es für irgend sechs linear unabhängige Flächen zweiter Klasse $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, …, $\varphi_6 = 0$ acht Darstellungen der Form giebt:

$$\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_6 \varphi_6 \equiv -\lambda_7 \omega + u_y^{(l)} \cdot u_y^{(l)} \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, 8), \tag{4}$$

worin die acht Schnittpunkte

$$u_y^{(l)} \equiv u_1 y_1^{(l)} + u_2 y_2^{(l)} + u_3 y_3^{(l)} + u_4 y_4^{(l)} = 0$$

die acht Schnittpunkte der Flächen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ bedeuten, die alle drei apolar zu $\omega = 0$ liegen, d. h. Asymptotenkegel besitzen, auf denen Tripel von Kanten liegen, die zu je zweien normal zueinander liegen. Dies ist aber genau das von mir (dieses Arch. **3**, 309, No. **60**) aufgestellte Theorem.

Ein bekannter Fall wird durch die acht Kugeln repräsentiert, welche die vier Seitenebenen eines Tetraeders berühren. Die sechs Flächen 2. Klasse $\varphi_1 = 0$, …, $\varphi_6 = 0$ sind dabei die sechs Eckenpaare, die auf den sechs Kanten des gegebenen Tetraeders liegen. Dieser Fall zeigt auch, dafs die drei Flächen zweiter Ordnung im allgemeinen acht verschiedene Schnittpunkte besitzen.

Besonders interessant ist die Voraussetzung, dafs die sechs Flächen $\varphi_1 = 0$, …, $\varphi_6 = 0$ sechs verschiedene Punkte im Raum, doppelt genommen, darstellen. Alsdann giebt es nur noch zwei weitere Doppelpunkte $u_y^{(l)} = 0$, $l = 7, 8$, so dafs für diese eine Identität der Form (4) statthat. In Worten:

Sind sechs Punkte im Raum willkürlich gegeben, so giebt es stets zwei ganz bestimmte Kugeln, für deren jede die sechs Punkte ein Polsechseck[1]) bilden. Dieser Satz ist die natürliche Verallgemeinerung des Steinerschen Kreises, für welchen ein beliebig gegebenes Dreieck Poldreieck

1) Teilt man die sechs Punkte in irgend zwei Tripel, so sind die beiden durch diese zwei Tripel gelegten Ebenen harmonische Polarebenen zu jeder der Kugeln.

Digitized by Google

ist. Dieser Satz zeigt auch, dafs von den acht Schnittpunkten des hier behandelten Theorems sechs willkürlich gewählt werden können.

Zum Schlufs mag noch angeführt werden, dafs durch die hier gegebene Betrachtung auch der Satz bewiesen ist: *Sieben beliebige quaternäre Formen können auf acht verschiedene Arten linear je durch dieselben sieben Quadrate dargestellt werden.* Man hat dabei nur zu beachten, dafs zwischen den acht Punkten $u_y^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ eine Identität der Form besteht

$$\nu_1 u_y^{(1)} u_y^{(1)} + \nu_2 u_y^{(2)} u_y^{(2)} + \cdots + \nu_8 u_y^{(8)} u_y^{(8)} \equiv 0.$$

Das Theorem habe ich in der letzten Gestalt Herrn Reye auf der Naturforscherversammlung zu München im Jahre 1877 mündlich mitgeteilt.

Darmstadt, 21. September 1902. S. Gundelfinger.

---

2. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften.

[Einsendungen für den Sprechsaal erbittet Franz Meyer, Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51.]

Zu III D 3. Die auf einer Fläche gezogenen Kurven.

III. S. 176, Nr. 36, Z. 2 und
S. 178, Nr. 37, Z. 3
statt „Transformation mittels reziproker Radien" hat es beidemal zu heifsen: „Transformation mittels reziproker Polaren."

Göttingen. F. Klein.

Zu IV C. Mechanik der deformierbaren Körper.

IV. S. 4—11: In den einleitenden Kapiteln hätte noch schärfer hervorgehoben werden können, dafs dem Unterschied zwischen den sog. *Vektoren erster* und *zweiter Klasse* oder den sog. *polaren* und *axialen* Vektoren in der Grafsmannschen Ausdehnungslehre nicht blofs Rechnung getragen wird, sondern dafs dieser Unterschied in dem Grafsmannschen System seine wahre Begründung erfährt.

Berlin. E. Jahnke.

Die Bedeutung der Diskriminantengleichung für eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung.

In der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Band II A, 4a (Painlevé, gewöhnliche Differentialgleichungen) sind auf Seite 212 die Fälle zusammengestellt, die bei einer Differentialgleichung erster Ordnung eintreten können, wenn längs eines Zweiges der Diskriminantenkurve $G = 0$ nur zwei Werte von y' zusammenfallen. Diese Zusammenstellung bedarf noch einer Ergänzung, die ich in dem Sprechsaale für die Encyklopädie der math. Wissenschaften bereits mitgeteilt habe. Um nun meine Mitteilung zu

Digitized by Google

begründen, werde ich im folgenden ebenfalls entwickeln, welche verschiedenen Fälle bei der angegebenen Voraussetzung möglich sind. Die ganze Betrachtung stützt sich auf die Ergebnisse der Arbeiten der Herren Fuchs (Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1884) und Hamburger (Crelles Journal, Bd. **112**, 1893). Ich behalte die von Herrn Painlevé benutzten Bezeichnungen bei.

Es sei also $F(y', y, x) = 0$ eine Differentialgleichung 1. Ordnung, wobei F eine rationale ganze Funktion von y' und y ist, deren Koeffizienten irgendwie von x abhängen. Es sei ferner $R(x, y) = 0$ die Bedingung dafür, dafs $F = 0$ gleiche Wurzeln y' habe, also die Resultante der Gleichungen $F = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$. Ist nun $G(x, y)$ ein irreduzibler Faktor von $R(x, y)$, also $G(x, y) = 0$ oder $y = g(x)$ ein Zweig der „Diskriminantenkurve", so müssen längs dieser Kurve mehrere Wurzeln y' einander gleich sein. Der einfachste und allgemeinste Fall ist der, dafs längs $G = 0$ nur zwei Werte von y' zusammenfallen. Es werde also jetzt vorausgesetzt, dafs $F = 0$ nur 2 gleiche Wurzeln $y' = h(x)$ habe, wenn darin $y = g(x)$ gesetzt wird; dann ist $\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$ und $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \neq 0$ für $y = g(x)$, $y' = h(x)$. Diejenigen Stellen x, für welche $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = 0$ ist, können nur vereinzelt auftreten und werden ausgeschlossen. Um nun zu erkennen, welche Bedeutung die Diskriminantenkurve $y = g(x)$ für die Differentialgleichung und ihre Lösungen hat, mufs man $y' - h(x)$ nach Potenzen von $y - g(x)$ entwickeln, und dies geschieht mit Benutzung des Newtonschen Polygons nach der von Puiseux genauer begründeten Methode. Entwickelt man zunächst $F(y', y, x)$ nach Potenzen von $y' - h$, $y - g$, so erhält man die Differentialgleichung in folgender Form:

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(y-g) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)(y-g)^2 + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\right)(y-g)(y'-h) \\ \qquad + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right)(y'-h)^2 + \cdots = 0. \end{cases}$$

Das Einklammern der Differentialquotienten soll andeuten, dafs in denselben $y = g(x)$, $y' = h(x)$ gesetzt wird, so dafs sie Funktionen von x allein sind, die im allgemeinen den Charakter einer ganzen Funktion haben. Es ist nun $y' - h$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach Potenzen von $y - g$ fortschreitet.

Fall I. Es sei $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq 0$, dann kommt in dem Newtonschen Polygon der Funktion F nur eine Polygonseite für die Glieder niedrigster Ordnung in Betracht, welche die Glieder $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(y-g)$ und $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right)(y'-h)^2$ enthält, und es ist demnach

$$(2)\qquad y' - h = c_1 (y-g)^{\frac{1}{2}} + c_2 (y-g)^{\frac{2}{2}} + c_3 (y-g)^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wobei die c_λ Funktionen von x sind, die im allgemeinen den Charakter einer ganzen Funktion haben. Diese Entwickelung konvergiert für alle x eines bestimmten Bereichs B, wenn $y - g$ hinreichend klein ist (vgl. Fuchs, Sitzungsberichte 1884, Seite 701).

Digitized by Google

Aus der Gleichung $F(h(x), g(x), x) = 0$ folgt durch Differenzieren, da $\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$ ist,

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) g'(x) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0. \tag{3}$$

Wir betrachten nun zunächst den

Fall Ia, wo

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) h(x) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) \neq 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial x} \neq 0 \quad \text{für} \quad y = g(x),\ y' = h(x)$$

und demnach $h(x) \neq g'(x)$ ist. Dann ist $y = g(x)$ keine Lösung der Differentialgleichung und aus (2) folgt (vgl. Hamburger, Cr. J. **112**, S. 213) die Integralgleichung

$$y - g(x) = \gamma (x - x_0) + \gamma_1 (x - x_0)^{\frac{3}{2}} + \cdots,$$

wo x_0 eine beliebige Stelle des Bereichs B ist, für die $h(x) \neq g'(x)$ ist. Die hierdurch dargestellte Integralkurve hat in dem Punkte $x_0,\ y_0 = g(x_0)$ eine Spitze, und die Spitzentangente ist von der Tangente der Kurve $y = g(x)$ in demselben Punkte verschieden. Die Diskriminantenkurve ist also der Ort der Spitzen der Integralkurven, aber keine Lösung.

Fall Ib. Wenn für $y = g,\ y' = h$ auch

$$\frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial F}{\partial x} = 0$$

ist, so ist nach (3) $h(x) = g'(x)$ und $y = g(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, deren Ableitung mit der Doppelwurzel y' übereinstimmt. Dann erhält man die von Herrn Hamburger auf Seite 216 abgeleitete Entwickelung, in der jetzt $\varkappa = 1$, $\alpha = 2$ ist, und die Integralgleichungen sind von folgender Form:

$$y - g(x) = \gamma_2 (x - x_0)^2 + \gamma_3 (x - x_0)^3 + \cdots,$$

wobei x_0 eine beliebige Stelle des Bereichs B ist, für die $c_1 \neq 0$ ist. Die hierdurch dargestellte Integralkurve enthält den Punkt $x_0,\ y_0 = g(x_0)$ als gewöhnlichen Punkt und hat dort dieselbe Tangente wie die Diskriminantenkurve $y = g(x)$. Die Diskriminantenkurve ist also in diesem Falle eine singuläre Lösung, denn sie wird von allen Integralkurven berührt.

Fall II. Es sei $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 0$ und deshalb infolge von (3) auch $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 0$, dagegen $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) \neq 0$. Die durch das Newtonsche Polygon bestimmten Glieder niedrigster Ordnung liegen auf einer einzigen Polygonseite, wenn $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) \neq 0$ ist, und heifsen dann

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right)(y' - h)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial y'}\right)(y' - h)(y - g) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)(y - g)^2, \tag{4}$$

Digitized by Google

oder auf zwei Polygonseiten, wenn $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0$ und $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial y'}\right) \neq 0$ ist. Jedenfalls erhält man, da nach Voraussetzung die Diskriminante der quadratischen Form (4) nicht Null ist, aus der Gleichung (1) zwei Entwickelungen von folgender Form:

$$(5) \qquad \begin{cases} y' - h = c_1 (y-g) + c_2 (y-g)^2 + \cdots, \\ y' - h = d_1 (y-g) + d_2 (y-g)^2 + \cdots, \end{cases}$$

worin die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, d_1, d_2, \ldots$ Funktionen von x sind, die im allgemeinen den Charakter einer ganzen Funktion haben. Beide Reihen konvergieren wieder für alle x eines gewissen Bereiches B, wenn $y - g$ hinreichend klein ist. Ist $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \neq 0$, so beginnen beide Entwickelungen mit der ersten Potenz von $y - g$, aber c_1 und d_1 sind nicht identisch einander gleich. Ist dagegen $\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) = 0$, so beginnt nur die eine Reihe mit der ersten Potenz von $y - g$. Jedenfalls sind, und darauf kommt es hier allein an, die Anfangsglieder in beiden Reihen nicht identisch gleich.

Es sei nun $(II a)$

$$h(x) \neq g'(x),$$

also die Diskriminantenkurve keine solche Lösung der Differentialgleichung, dafs ihre Ableitung mit der Doppelwurzel y' übereinstimmt.

Schreibt man dann die erste Gleichung (5) in der Form

$$y' - g'(x) = h(x) - g'(x) + c_1 (y-g) + c_2 (y-g)^2 + \cdots$$

und wählt x_0 in dem Bereiche B so, dafs $h(x_0) - g'(x_0) \neq 0$ ist, so lassen sich die Entwickelungskoeffizienten der rechten Seite als Potenzreihen von $x - x_0$ darstellen, und zwar ist

$$\begin{aligned} h(x) - g'(x) &= \lambda_0 + \lambda_1 (x - x_0) + \lambda_2 (x - x_0)^2 + \cdots, \\ c_1 &= \mu_0 + \mu_1 (x - x_0) + \mu_2 (x - x_0)^2 + \cdots, \qquad (\lambda_0 \neq 0) \\ c_2 &= \nu_0 + \nu_1 (x - x_0) + \nu_2 (x - x_0)^2 + \cdots \end{aligned}$$

u. s. w.

Setzt man $y - g(x) = u$, so erhält man für $\frac{du}{dx}$ eine Potenzreihe von u und $x - x_0$. Demnach giebt es für u eine einzige Lösung von der Form

$$u = \gamma_1 (x - x_0) + \gamma_2 (x - x_0)^2 + \cdots.$$

Die Koeffizienten dieser Reihe lassen sich bestimmen, indem man die Reihe in die Differentialgleichung einsetzt und gleich hohe Potenzen von $x - x_0$ auf beiden Seiten vergleicht. Man erhält

$$\gamma_1 = \lambda_0, \quad 2\gamma_2 = \lambda_1 + \gamma_1 \mu_0 \text{ oder } 2\gamma_2 = \lambda_1 + \lambda_0 \mu_0, \quad 3\gamma_3 = \lambda_2 + \gamma_1 \mu_1 + \gamma_2 \mu_0 + \gamma_1^2 \nu_0$$

u. s. w.

Digitized by Google

Demnach ergeben sich aus den beiden Differentialgleichungen (5) zwei Integralgleichungen von folgender Form:

$$(6) \qquad \begin{cases} y - g(x) = \gamma_1 (x - x_0) + \gamma_2 (x - x_0)^2 + \cdots, \\ y - g(x) = \gamma_1 (x - x_0) + \delta_2 (x - x_0)^2 + \cdots, \end{cases}$$

die nur in dem ersten Gliede übereinstimmen, während im allgemeinen $\gamma_2 \neq \delta_2$ ist. Denn es ist eben nachgewiesen worden, dafs γ_2 bez. δ_2 noch von dem ersten Entwickelungskoeffizienten von c_1 bez. d_1 abhängen, und c_1 ist in unserem Falle nicht identisch gleich d_1. Die beiden durch (6) dargestellten Integralkurven berühren sich also in dem Punkte x_0, y_0 von der ersten Ordnung, und ihre gemeinsame Tangente ist von der Tangente der Diskriminantenkurve in demselben Punkte verschieden. Demnach ist in diesem Falle $y = g(x)$ der Ort für die Berührungspunkte von zwei verschiedenen Integralkurven.

Es sei (*II b*)

$$h(x) = g'(x),$$

d. h. $y = g(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung, deren Ableitung $g'(x)$ mit der Doppelwurzel y' übereinstimmt. Dann ergiebt sich aus den Differentialgleichungen (5) (vgl. Hamburger, Cr. J. **112**, Seite 216, wo jetzt $\alpha = 1$, $\varkappa > 1$ ist, und Seite 218 unter 2), dafs $y = g(x)$ die einzige durch den Punkt x_0, y_0 gehende und der Doppelwurzel $h(x)$ entsprechende Lösung der Differentialgleichung ist.

Fall III. Ist auch noch

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \cdot \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\right) = 0,$$

so ergeben sich aus der Differentialgleichung (1) mit Hilfe des Newtonschen Polygons entweder zwei Entwickelungen von der Form (5), in denen aber jetzt $c_1 = d_1$ ist, oder eine Entwickelung von der Form

$$(7) \qquad y' - h = c_\varkappa (y - g)^{\frac{\varkappa}{2}} + c_{\varkappa+1} (y - g)^{\frac{\varkappa+1}{2}} + \cdots,$$

worin $\varkappa$ mindestens gleich 2 ist.

Ist (*III a*) $g'(x) \neq h(x)$, d. h. $y = g(x)$ keine Lösung der Differentialgleichung, deren Ableitung mit der Doppelwurzel y' übereinstimmt, so erhält man im ersten Falle zwei Integralgleichungen von der Form (6), die aber rechts nicht nur in dem Koeffizienten der ersten Potenz, sondern auch noch mindestens in dem Koeffizienten der zweiten Potenz übereinstimmen. Dann ist die Diskriminantenkurve $y = g(x)$ der Ort von Punkten, in welchen sich die Integralkurven von höherer als der ersten Ordnung berühren.

Im zweiten Falle folgt aus (7) eine Integralgleichung von der Form:

$$y - g(x) = \gamma (x - x_0) + \gamma_1 (x - x_0)^{\frac{3}{2}} + \gamma_2 (x - x_0)^{\frac{4}{2}} + \cdots,$$

worin $\gamma = h(x_0) - g'(x_0) \neq 0$ ist. In dem jetzt in Rede stehenden Falle mufs aber γ_1 verschwinden. Denn es ist

$$y' - g'(x) = \gamma + \tfrac{3}{2} \gamma_1 (x - x_0)^{\frac{1}{2}} + 2 \gamma_2 (x - x_0) + \cdots.$$

Digitized by Google

Aus (7) folgt aber

$$y' - g'(x) = h(x) - g'(x) + c_\varkappa (y-g)^{\frac{\varkappa}{2}} + c_{\varkappa+1}(y-g)^{\frac{\varkappa+1}{2}} + \cdots.$$

Entwickelt man hier die rechte Seite nach Potenzen von $x - x_0$, so wird, weil $\varkappa \geqq 2$ ist, die Potenz $(x-x_0)^{\frac{1}{2}}$ nicht auftreten. Demnach mufs $\gamma_1 = 0$ sein, und der Punkt x_0, $y_0 = g(x_0)$ ist deshalb für die Integralkurve eine Spitze zweiter Art (Schnabel).

Ist dagegen $(III b)$ $g'(x) = h(x)$, so ist $y = g(x)$ wieder die einzige Lösung, die durch den Punkt x_0, y_0 geht und der Doppelwurzel y' entspricht.

Zum Schlufs noch einige Beispiele für die unter $(III a)$ aufgeführten Fälle. Den ersten Fall haben wir bei der Differentialgleichung

$$[a(y'-h) + b(y-g)]^2 = c(y-g)^4 + d(y-g)^5,$$

den zweiten bei der Differentialgleichung

$$[a(y'-h) + b(y-g)]^2 = c(y-g)^3,$$

wenn g, h, a, b, c, d beliebige Funktionen von x oder Konstanten sind und $h(x) \neq g'(x)$ ist. Ist z. B. $(y'-1-y)^2 = y^4 + y^5$, so ist $y = 0$ Diskriminantenkurve und $y' = 1$ die Doppelwurzel der Differentialgleichung. Aus der Differentialgleichung erhält man folgende zwei Entwickelungen:

$$y' = 1 + y + y^2 + \tfrac{1}{2}y^3 + \cdots, \quad y' = 1 + y - y^2 - \tfrac{1}{2}y^3 - \cdots.$$

Ist nun x_0 ein beliebiger Wert von x, so ergiebt sich aus der ersten Gleichung

$$y = (x-x_0) + \tfrac{1}{2}(x-x_0)^2 + \tfrac{1}{2}(x-x_0)^3 + \cdots,$$

aus der zweiten

$$y = (x-x_0) + \tfrac{1}{2}(x-x_0)^2 - \tfrac{1}{6}(x-x_0)^3 + \cdots.$$

Die Diskriminantenkurve $y = 0$ ist also der Ort von Punkten, in welchen sich die Integralkurven von höherer als der ersten Ordnung berühren.

Ist

$$(y'-1-y)^2 = y^3,$$

so wird

$$y' = 1 + y + y^{\frac{3}{2}}$$

und

$$y = (x-x_0) + \tfrac{1}{2}(x-x_0)^2 + \tfrac{2}{5}(x-x_0)^{\frac{5}{2}} + \cdots.$$

Der Punkt $x = x_0$, $y = 0$ ist also für die Integralkurve eine Spitze zweiter Art.

Mainz, im November 1901. CARL SCHMIDT.

Digitized by Google

3. Bei der Redaktion eingegangene Bücher.

Abel, N. H., Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance. Leipzig 1902, B. G. Teubner.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Vierzehntes Heft: A. A. Björnbo, Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. — H. Suter, Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke". — K. Bopp, Antoine Arnauld als Mathematiker. Leipzig 1902, B. G. Teubner. 337 S.

Alasia, C., I complementi di geometria elementare. 244 S. Milano 1903, U. Hoepli (Manuali Hoepli 326).

Annuaire pour l'an 1903, publié par le bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars. 1.50 fr.

Auerbach, F., Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. Aus Natur und Geisteswelt Nr. 40. 156 S.

Baltin, R. u. Segger, F., Rechenbuch für die Präparandenanstalten. Vorstufe der Müller-Baltin-Maiwaldschen Aufgabensammlung für Seminare und Präparandenanstalten. Unter Mitwirkung von Prof. H. Müller (Charlottenburg) bearbeitet. [VII u. 316 S.] gr. 8. Leipzig 1903, B. G. Teubner. geb. M. 3.20.

Bardey-Pietzker, Anleitung zur Auflösung eingekleideter algebraischer Aufgaben. Zweite Auflage. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 159 S. M. 2.60.

Berliner Studenten-Almanach. Ein Führer durch die Berliner Hochschulen. Winter-Semester 1902—1903. Berlin 1902, Lachs u. Co.

Bes, K., L'équation finale. Sonderabdruck aus den Verh. der Amst. Ak. 61 S. Amsterdam 1901, Joh. Müller.

Bes, K., Les systèmes de racines d'un système d'équations homogènes à $n+1$ variables. 51 S. Amsterdam 1902, Joh. Müller.

Bork, H.-Nath, M., Mathematische Hauptsätze. Erster Teil. Leipzig 1903, Dürr.

Brüsch, W., Grundriss der Elektrotechnik für technische Lehranstalten (Baugewerk-, Berg-, Gewerbe-, Maschinenbauschulen etc.). Mit 248 Abbildungen im Text. [XII u. 168 S.] Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 3.

Chwolson, O. D., Lehrbuch der Physik. Erster Band: Einleitung — Mechanik — Einige Messinstrumente und Messmethoden — Die Lehre von den Gasen, Flüssigkeiten und festen Körpern. Übersetzt von H. Pflaum. Braunschweig 1902, F. Vieweg & Sohn. 791 S. M. 12.

Comenius-Gesellschaft, Die Studentenschaft und die Volksbildung. Bericht über die Arbeiterbildungskurse der Sozialwissenschaftlichen Abteilung der Wildenschaft der Technischen Hochschule zu Berlin erstattet von W. Wagner. Berlin 1902, R. Gaertner. 15 S.

Coulon, J., Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre par la méthode des caractéristiques. Thèse prés. à la Fac. des Sc. de Paris 1902, Gauthier-Villars. 122 S.

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. Zweiter Teil. Leipzig 1902, B. G. Teubner. 289 S. M. 14.

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. Leipzig 1903. B. G. Teubner. 594 S.

Dressel, A., Formeln zur christlichen Zeit- und Festrechnung. 24. S. Feldkirch 1902. Unterberger.

Dinglers Polytechnisches Journal **317**, 40—50. Berlin 1902, R. Dietze.

Dünner, L., Die älteste astronomische Schrift des Maimonides. Würzburg 1902, C. J. Becker. 54 S.

Emde, F., Die Arbeitsweise der Wechselstrommaschinen. Berlin 1902, Springer. 93 S.

Encyklopädie der math. Wiss. Band III_1, Heft 1: Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Kurven und Flächen. Von H. v. Mangoldt, Aachen. — Die auf einer Fläche gezogenen Kurven. Von R. v. Lilienthal, Münster i. W.

Exner, F., und Haschek, E., Wellenlängen-Tabellen für spektralanalytische Untersuchungen auf Grund der ultravioletten Funkenspektren der Elemente. Leipzig und Wien 1902, F. Deuticke. I 83 S. II 269 S. M. 16.

Fouët, E., Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques I. Paris 1902, Gauthier-Villars. 330 S. 7.50 fr.

Digitized by Google

Fricke, R., Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn. 218 S. M. 5

Fürle, Rechenblätter I, II (Kubische Gleichungen). Berlin 1902, Mayer & Müller.

Fürle, Rechenblatt für photographische Zwecke. Berlin 1902, Mayer & Müller.

Furtwängler, Ph., Über das Reziprozitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Berlin 1902, Weidmann

Ganter, H. und Rudio, F., Die analytische Geometrie der Ebene. Fünfte Auflage. Leipzig 1903, B. G. Teubner.

Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke. II. Bd. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Leipzig 1902, B. G. Teubner. 266. S. M. 14.

Heller, Th., Lehrbuch der Arithmetik nebst Übungsaufgaben. Kempten 1902, J. Kösel. I 127 S., M. 1.30; II 76 S., M. 0.90.

Heun, K., Formeln und Lehrsätze der allgemeinen Mechanik. Leipzig 1902, Göschen. 112 S. M. 3.50.

Holzmüller, G., Elemente der Stereometrie. IV. Leipzig 1902, Göschen. 311 S. M. 9.

Isenkrahe, Ch., Ableitung einiger Eigenschaften der Kegelschnitte in Anschluß an die bei der Dreiecksberechnung vorkommenden Formeln. Festschr. z. 50jähr. Jubelfeier. Kgl. Friedr. Wilhelms-Gymn. Greifenberg in Pom. 14 S.

Jahnke, E., Nachruf auf Ferdinand Caspary. Mit dem Bildnis F. Casparys, einem Verzeichnis seiner Schriften sowie einem Briefe Ch. Hermites an H. Bertram. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 30 S.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. **31,** 1 (1900, VI u. 480 S.). Berlin 1902, Reimer. M. 15.

Kleiber-Karsten, Physik für Techniken. München 1902, R. Oldenbourg. 351 S.

Koch, K. R., Relative Schweremessungen. II. Messungen auf 10 Stationen des Pariser Parallel. Mit einem Anhang: Ein Hypsometer mit elektrischer Temperaturmessung. (Sond.-Abd. a. d. Jahresb. d. Ver. f. vaterländische Naturk. i. Württemberg. Jahrg. 1903.) Stuttgart, 1902.

Koenigsberger, L., Hermann von Helmholtz. Erster Band. Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn. 375 S. M. 8.

Koppe-Diekmann, Geometrie für Realanstalten. I, 248 S. II, 268 S. Essen 1903, Baedeker. je M. 2.40.

Kübler, J., Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. Erster Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knicktheorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? Leipzig 1902, B. G. Teubner. 52 S.

Landfriedt, E., Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale. Leipzig 1902, Göschen. 294 S. (Sammlung Schubert 31.) M. 6.40.

Landfriedt, E., Thetafunktionen und hyperelliptische Funktionen. Leipzig 1902, Göschen. (Sammlung Schubert 46.) M. 3.40.

Lorenz, H., Lehrbuch der technischen Physik. Erster Band: Technische Mechanik starrer Systeme. Berlin 1902, R. Oldenbourg. 625 S. M. 15.

Ludwig, W., Die Horopterkurve mit einer Einleitung in die Theorie der kubischen Raumkurve. Halle a. S. 1902, M. Schilling. 36 S.

Melinat, G., Physik für deutsche Lehrerbildungsanstalten. Leipzig 1903, B. G. Teubner. geh. M. 5.60, geb. M. 6.40.

Müller, Emil, Lehr- und Übungsbuch der ebenen Geometrie mit besonderer Berücksichtigung des Zusammenhangs zwischen Lehrsatz und Konstruktionsaufgabe für Gymnasien und Realschulen. 172 S. Berlin 1903, Winckelmann & Söhne. M. 1.80.

Olivier, J. v., Was ist Raum, Zeit, Bewegung, Masse? Was ist die Erscheinungswelt? 2. Aufl.

Pascal, E., I gruppi continui di trasformazioni (parte generale della teoria) 358. Milano 1903, U. Hoepli (Manuali Hoepli 327—328).

Pascal, E., Lezioni di calcolo infinitesimale. Parte I: Calcolo differenziale. 311 S. Parte II: Calcolo integrale. 329 S. Milano 1902, 1903, U. Hoepli (Manuali Hoepli 178—179, 180—181).

Pözl, W., Lehrbuch der Arithmetik mit zahlreichen Übungsaufgaben von X. Steck und J. Bielmayr. 12. Auflage. Kempten 1902, J. Kösel. I, 100 S. II, 98 S. je M. 0.80.

Digitized by Google

Bernhard Riemanns gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Leipzig 1902, B. G. Teubner.

Sauerbeck, P., Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von J. P. de Gua de Malves. Ein Beitrag zur Kurvendiskussion. Leipzig 1902, B. G. Teubner. 166 S. M. 8.

Schering, E., Gesammelte mathematische Werke. Herausg. v. R. Haußner und K. Schering. Erster Band. Berlin 1902, Mayer & Müller. 412 S.

Schubert, H., Neuer ewiger Kalender zur Bestimmung des Wochentags für jedes beliebige Datum nach und vor Christi Geburt, mit Berücksichtigung der Ausnahmejahre 42 vor bis 4 nach Christi Geburt und zur Bestimmung der Daten der christlichen Feste. Leipzig 1902, Göschen.

Schuster, M., Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie. Zweiter Teil: Trigonometrie. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 112 S.

Serret, J. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Zweite Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Her. von G. Bohlmann und E. Zermelo. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 304 S.

Sitzungsberichte der Berliner Mathem. Gesellschaft. Herausgegeben vom Vorstande der Gesellschaft. 1. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 2.40.

Snyder, V., and Hutchinson, J., Differential and Integral Calculus. New York 1902, American Book Company. 320 S. $ 2.50,

Study, E., Geometrie der Dynamen. Leipzig 1903, B. G. Teubner. 603 S.

Thieme, H., Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. Leipzig 1902, G. Freytag. I, 118 S. II, 196 S.

Veröffentlichung des Königl. Preuss. Geodätischen Institutes. Lotabweichungen. Heft II. Geodätische Linien südlich der europäischen Längengradmessung in 52 Grad Breite von A. Börsch und L. Krüger. Berlin 1902, P. Stankiewicz. 204 S.

Vetters, K., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Hannover 1902, Jänecke. 285 S. M. 5.60.

Vollprecht, H., Das Rechnen, eine Vorbereitung zur allgemeinen Arithmetik. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 0.50.

Weierstrass, K., Mathematische Werke. Vierter Band: Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten. Berlin 1902, Mayer & Müller. 631 S. M. 24.

Weinnold, Leitfaden der analytischen Geometrie. Auf Veranlassung der Kaiserl. Inspektion des Bildungswesens der Marine bearbeitet. Leipzig 1902, B. G. Teubner. M. 1.60.

Wertheim, G., Anfangsgründe der Zahlenlehre. Braunschweig 1902, Vieweg & Sohn. 427 S. M. 9.

Whittaker, E. T., A course of modern analysis. Cambridge university Press 1902. C. J. Clay. 378 S.

Wienecke, E., Die Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben. Berlin 1901, L. Oehmigke. 74 S. M. 1.20.

Wienecke, E., Geometrie in Volksschulen mit ca. 400 Übungsaufgaben. 2. Aufl. Berlin 1902, L. Oehmigke. 76 S. M. 0.45.

Williot, V., Etudes sur les nombres premiers. I^e partie. La voie de Riemann. Paris 1903, Hermann. 39 S.

Wrobel, E., Resultate zu dem Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. Erster Teil. 26. Aufl. Rostock 1902, H. Koch. M. 2.

Zindler, K., Liniengeometrie mit Anwendungen. I, 380. S. Leipzig 1902, Göschen. M. 12.

Digitized by Google

ARCHIV
DER MATHEMATIK UND PHYSIK

MIT BESONDERER RÜCKSICHT AUF DIE BEDÜRFNISSE DER LEHRER AN HÖHEREN UNTERRICHTSANSTALTEN.

GEGRÜNDET 1841 DURCH J. A. GRUNERT.

DRITTE REIHE.

HERAUSGEGEBEN

VON

E. LAMPE IN BERLIN

W. FRANZ MEYER IN KÖNIGSBERG I. PR.

E. JAHNKE IN BERLIN.

4. BAND. 1. UND 2. (DOPPEL-) HEFT

MIT 15 TEXTFIGUREN.

AUSGEGEBEN AM 16. OKTOBER 1902.

LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON E. LAMPE, W. FRANZ MEYER UND E. JAHNKE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare u. s. w.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Dr. E. Jahnke, Berlin W 15, Pariser Straße 55

zu richten. Es nehmen aber auch Geheimer Regierungsrat Prof. Dr. E. Lampe in Berlin W 15, Fasanenstraße 82 und Prof. Dr. W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr., Mitteltragheim 51, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen u. s. w. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band des Archivs umfaßt 24 Druckbogen in 4 Heften und kostet 14 Mark; jährlich sollen zunächst etwa 6 Hefte ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Die Redaktion ersucht die Herren Autoren, in ihrem eigenen Interesse den Umfang der für das Archiv bestimmten Manuskripte nach Möglichkeit einschränken zu wollen, da nur solche geringen Umfanges Aussicht haben, in nächster Zeit abgedruckt zu werden.

INHALT DES VORLIEGENDEN DOPPELHEFTES.

Seite

Über Konvergenz-Kriterien für Reihen mit komplexen Gliedern. Von **Alfred Pringsheim** in München 1

Sur le degré de réalité d'une courbe algébrique à coefficients réels; Par **Paul Appell** à Paris 20

Über die Konstruktion von Isophengen auf Flächen 2. Ordnung Von **E. Weinnoldt** in Kiel. Mit 5 Figuren im Text 22

Über die Herleitung der Formeln für Lebensversicherungsprämien. Von **B. Oster** in Mannheim 44

Ein bemerkenswertes Pentagonikositetraeder. Von **Wilhelm Thienemann** in Essen (Ruhr). Mit 1 Figur im Text 50

Rotationszykliden und Lamésche Produkte. Von **Emil Hilentzschel** in Berlin . . 57

Notiz über die Kreisteilungs-Polynome. Von **E. Netto** in Gießen 65

Eine Eigenschaft der geodätischen Linien. Von **Paul Stäckel** in Kiel 68

Zur Lehre von der Teilbarkeit dekadischer Zahlen. Von **H. Züge** in Linden . . 73

Über gewisse Scharen homothetischer Kegelschnitte in der Dreiecksgeometrie. Von **Georg Majcen** in Agram. Mit 6 Figuren im Text 76

Synthetische Theorie der Zentrifugal- und Trägheitsmomente eines Raumstückes. Von **Stanislaus Jolles** in Berlin 100

Über eine besondere Klasse transzendenter Kurven. Von **E. Wölffing** in Stuttgart 117

Unabhängige Darstellung der Mac Mahonschen symmetrischen Funktionen. Von **L. Saalschütz** in Königsberg 123

Angenäherte n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Zirkel und Lineal. Von **Heinrich Schoeler** in Berlin. Mit 1 Figur im Text 128

Bemerkungen über einige angenäherte n-Teilungen von Winkeln. Von **E. Lampe** in Berlin. Mit 2 Figuren im Text 130

[Fortsetzung auf der 3. Seite des Umschlags.]

Seite

Rezensionen. Von **R. Güntsche**, **E. Kullrich**, **A. Loewy**, **H. Lorenz**, **E. Müller**, **H. Samter** 331

Baudet E., Algebraische Gleichungen nebst den Resultaten und den Methoden zu ihrer Auflösung. Von **E. Kullrich**. S. 331. — Riemann's Rechentabellen für Multiplikation. Von **E. Kullrich**. S. 333. — Dickson, L. E., linear groups with an exposition of the Galois field theory. Von **A. Loewy**. S. 333. — Lemoine, E., Géométrographie ou art des constructions géométriques. Von **R. Güntsche**. S. 336. — Bernhard, M., Darstellende Geometrie mit Einschluß der Schattenkonstruktionen. Von **E. Müller**. S. 343. — Wilhelm, J., Die Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt in ihrem Zusammenhang mit den Kreisen der Ebene. Von **E. Müller**. S. 345. — Börnstein, R., Leitfaden der Wetterkunde. Von **H. Samter**. S. 345. — v. Bebber, Anleitung zur Aufstellung von Wettervorhersagen. Von **H. Samter**. S. 346. — Musil, A., u. Ewing, J. A., Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Von **H. Lorenz**. S. 347.

Vermischte Mitteilungen 349

1. Aufgaben und Lehrsätze. Lösungen.

A. Aufgaben und Lehrsätze 68—78. Von **E. N. Barisien**, **K. Cwojdzinski**, **A. Kneser**, **P. Kokott**, **E. Lampe**, **W. F. Meyer**, **O. Olitsch**, **P. Wolfskehl** 349

B. Lösungen zu 37 (S. Gundelfinger) von **S. Gundelfinger**. S. 352 — Zu 60 (S. Gundelfinger) von **S. Gundelfinger**. S. 352 352

2. Sprechsaal für die Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften. **E. Jahnke**, **F. Klein**, **C. Schmidt** 354

3. Bei der Redaktion eingegangene Bücher 360

Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft: Anhang Seite

Zehnte Sitzung am 29. Oktober 1902 63

Elfte Sitzung am 26. November 1902 63

Über quadrierbare Kreisbogenzweiecke. Von **E. Landau** 63

Ein einfaches System flächentheoretischer Grundformeln. Von **J. Knoblauch** . . . 68

Geometrographische Siebzehnteilung des Kreises. Von **R. Güntsche**. Mit 2 Figuren im Text 72

Mitglieder-Verzeichnis 77

Eingelaufen sind und zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren: **M. Bauer**, **O. Biermann**, **Fr. Daniëls**, **E. Eckhardt**, **F. Fitting**, **R. Güntsche**, **O. Gutsche**, **T. Hayashi**, **G. Heisenberg**, **C. Heumann**, **E. Jahnke**, **Ed. Jaulsch**, **F. Jung**, **S. Kantor**, **L. Klug**, **C. Kohler**, **P. Kokott**, **E. Lampe**, **Lerch**, **H. Liebmann**, **R. v. Lilienthal**, **A. Loewy**, **F. London**, **Ph. Maennchen**, **G. Majcen**, **L. Maurer**, **O. Meissner**, **E. Meyer**, **P. Mlian**, **E. Netto**, **N. Nielsen**, **W. Pexider**, **E. Rehfeld**, **L. Saalschütz**, **W. Schell**, **L. Schlesinger**, **Schoute**, **H. Stahl**, **J. Studnicka**, **R. Sturm**, **Tachauer**, **W. Thiesenmann**, **E. v. Weber**, **J. Weingarten**, **J. Wellstein**, **A. Wendler**, **G. Zemplén**

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Repertorium der höheren Mathematik

(Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteraturnachweise)

von **Ernesto Pascal.**

ord. Prof. an der Universität zu Pavia.

Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Schepp in Wiesbaden.

In 2 Teilen.

I. Teil: **Die Analysis.** [XII u. 638 S.] 8. Biegsam in Leinw. geb. ℳ 10.—

II. Teil: **Die Geometrie.** [X u. 712 S.] 8. Biegsam in Leinw. geb. ℳ 12.—

Der Zweck des Buches ist, auf einem möglichst kleinen Raum die wichtigsten Theorieen der neueren Mathematik zu vereinigen, von jeder Theorie nur so viel zu bringen, daß der Leser imstande ist, sich in ihr zu orientieren, und auf die Bücher zu verweisen, in welchen er Ausführlicheres finden kann.

Für das Studierenden der Mathematik soll es ein „Vademecum" sein, in welchem er kurz zusammengefaßt, alle mathematischen Begriffe und Resultate findet, die er während seiner Studien sich angeeignet hat oder noch aneignen will.

Die Anordnung der verschiedenen Teile ist bei jeder Theorie fast immer dieselbe: zuerst werden die Definitionen und Grundbegriffe der Theorie gegeben, alsdann die Theoreme und Formeln (ohne Beweis) aufgestellt, welche die Verbindung zwischen den durch die vorhergehenden Definitionen eingeführten Dingen oder Größen bilden, und schließlich ein kurzer Hinweis auf die Litteratur über die betreffende Theorie gebracht.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. Vierzehntes Heft. Mit 113 Figuren im Text. [VIII u. 337 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 16.—

Inhalt: Axel Anthon Bjornbo, Studien über Menelaos' Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen. — Heinrich Suters Nachträge und Berichtigungen zu „Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke". — Karl Bopp, Antonius Arnaldus, der grosse Arnauld, als Mathematiker.

Bachmann, Professor Dr Paul, niedere Zahlentheorie. In 2 Teilen. I. Teil. [X u. 402 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 14.—

Curtze, M., Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance. In 2 Teilen. Mit zahlreichen Textfiguren. gr. 8. 1902. geh. I. Teil. [X u. 336 S.] n. ℳ 16.—; II. Teil. [IV u. 291 S.] n. ℳ 14.—

Czuber, E., Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung. [XV u. 594 S.] gr. 8. 1903. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

Gleichen, Dr. A., Oberlehrer am Kgl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Band VIII. Mit 241 Figuren im Text. [XIV u. 411 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 14.—

Hensel, K., und **G. Landsberg**, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. ℳ 14.—)

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 362 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

Serret-Bohlmann, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Zweite, durchgesehene Auflage. Dritter Band. Erste Lieferung. Differentialgleichungen. Herausgegeben von G. Bohlmann und E. Zermelo. Mit 10 in den Text gedruckten Figuren. [304 S.] gr. 8. 1903. geh. n. ℳ 6.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. Bearbeitet von E. Study. Mit in den Text gedruckten Figuren und einer Tafel. [XIII u. 603 S.] gr. 8. 1903. geh. ℳ 21.—, in Halbfranz geb. ℳ 23.—

Hierzu Beilagen von **Friedrich Vieweg & Sohn** in **Braunschweig** und **B. G. Teubner** in **Leipzig.**

ROOM USE ONLY

Digitized by Google